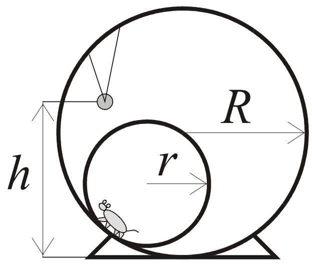
FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

3. kolo zimnej časti 18. ročníka
B – kategória (mladší)
školský rok 2002/2003
termín príchodu riešení
4. 12. 2002

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
`riesenia@fks.sk`
`info@fks.sk`

B–3.1 Myš(ka) (5 bodov)
Vo vnútri upevneného valca je menší valec (so zanedbateľnou hmotnosťou) a v ňom Myš(ka). Ako každá myš, aj tá naša vie veľmi rýchlo utekať. Vďaka jej ostrým pazúrikom dokáže roztočiť malý valec, ktorý sa potom pohybuje po stene väčšieho. Šmykové trenie medzi valcami je veľmi veľké. Jej dobrí priatelia zvyknú do valca zavesiť nejaké to papanie (niekam do výšky $h = R/5$). Zistite, akú najmenšiu hodnotu musí mať hmotnosť vnútorného valca m, aby mala Myš(ka) šancu najesť sa – teda dostať sa do výšky h nad podložkou. Polomer vnútorného valca je $R/3$. Hmotnosť Myšky je M, na stene malého valca sa pritom dokáže udržať maximálne vo zvislej polohe (nevie teda sedieť na jeho hornej polovici).



B–3.2 Ďalekohľad (6 bodov)
Ak pri ceste autom na mieste spolujazdca pozorujete cestu pred sebou ďalekohľadom, zdá sa vám, že cesta pred vami ubieha oveľa pomalšie. Vypočítajte, koľkokrát sa cesta „spomalí“ v závislosti od parametrov ďalekohľadu.

B–3.3 Jupiter (5 bodov)
Verte – neverte, v okamihu, keď sa Jupiter pri pohľade zo Zeme na oblohe bude javiť presne oproti Slnku, sa stane strašná vec. Zmizne Slnko i všetky planéty okrem Zeme a Jupitera. Zem si bude musieť nájsť novú dráhu, po ktorej môže obiehať. V ohnisku tejto novej dráhy bude Jupiter. Aký dlhý bude náš „nový rok“?

B–3.4 Hrebeň (4 body)
Nejakým vhodným spôsobom zelektrizujte hrebeň. Ak si teraz pustíte vodu (tak aby tiekla čo najtenším súvislým prúdom) a priblížite k nej už zelektrizovaný hrebeň, prúd vody sa vychýli. Napíšte prečo, a ktorým smerom. Aké problémy by vznikli, keby ste chceli z odklonenia prúdu vypočítať náboj na hrebeni? Ako by sa dali tieto problémy odstrániť?

Tento seminár je organizovaný s podporou
Nadácie Pre Otvorenú Spoločnosť – Open Society Fund
a KZDF FMFI UK

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

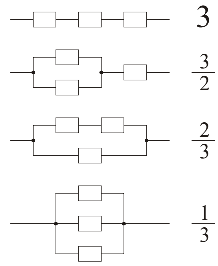
vzorové riešenia 2. série
B – kategória (mladší)
18. ročník
zimný semester
školský rok 2002/2003

www.fks.sk

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

B–2.1 Odpory (opravovala Rebro)

Máte k dispozícii a) tri, b) štyri 1 Ω odpory. Zostrojte z nich všetky možné zapojenia (s dvoma výstupmi) a vypočítajte ich odpory týchto zapojení v Ohmoch. Tieto číselné výsledky medzi sebou vynásobte. Aký je výsledok v prípadoch a) a b)?

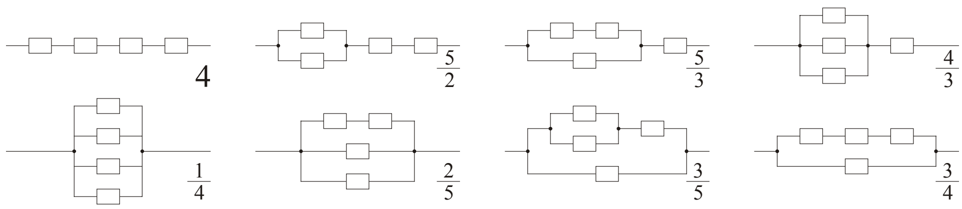


Milí moji riešitelia! Tak na úvod by som vám chcela napísať základné vzorčeky, s ktorými bolo treba rátať. Odpory môžem zapojiť za sebou (sériovo, do série) alebo vedľa seba (paralelne). V prvom prípade výsledný odpor vypočítam takto $R_V = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$ a v druhom prípade takto $\frac{1}{R_V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$ V druhom prípade upozorňujem viacerých z vás na to, že prevrátené hodnoty sú trochu nepríjemnejšie na úpravu, ale stále sú to len zlomky, existujú však pravidlá na úpravu zlomkov, ktoré len tak meniť nemožno, tak pozor na to!

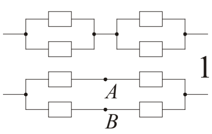
A teraz už konkrétne k jednotlivým zapojeniam. Tri odporíky si môžeme zapojiť štyrmi rôznymi spôsobmi. Napr. na druhom obrázku sú dva odpory zapojené vedľa seba a ďalší sériovo, to je to isté, ako keby bol najprv jeden odpor zapojený sériovo a zvyšné dva vedľa seba. Ak nemáme medzi odpormi žiadny ďalší prístroj, nič sa nemení. Nuž a porátať výsledné odpory daných zapojení už pre takmer všetkých nebol problém. Číselné hodnoty sú uvedené vedľa schém zapojení. Nuž a na počudovanie, keď vynásobím výsledné odpory medzi sebou, vyjde mi jedna.

Pre štyri odpory nastal už trošku problém nájsť všetky možné schémy zapojenia. Asi najjednoduchší spôsob, ako ich nájsť, je zobrať si štyri predchádzajúce zapojenia troch odporov a najprv k nim pripojiť štvrtý sériovo (za sebou), to je prvý riadok zapojení pod týmto textom. A potom zas k nim štvrtý pridať paralelne (vedľa seba), to je druhý riadok schém. No a zostali mi ešte dve zapojenia (šikmo dole), ktoré sú podľa mňa dosť viditeľné. Vypočítať odpor týchto zapojení je trošku zložitejšie, ale ešte stále nie tak zložité, aby som považovala za nutné ich tu osobitne vyratávať. Číselné hodnoty sú zasa uvedené vedľa schém. Nuž a čuduj sa svete, po vynásobení výsledných odporov to vyjde zasa jedna. Mnohí z vás sa čudovali, mnohí i uvažovali nad touto prečudesnou zhodou. Ale len jeden z vás to aj naozaj tak trochu dokázal. Týmto pozdravujem Miška Dzetkuliča, má môj úprimný obdiv (a to ste mali vidieť ako sa tváril Nagi a Matúš), ktorý matematicky dokázal to, čo ostatní len vytušili. Žiaľ, jeho krásny dôkaz funguje len pre menej ako 5 odporov. Vedúci sa s tým ďalej pekne pohrali a papiere vo FKS sú teraz plné odporov. Či výsledkom násobenia bude vždy jedna, žiaľ, ešte stále nevieme. Pre 5 a 6 to ale tiež funguje…

Lepšie sa ale ešte pozrime na schémy pre štyri odpory, ktoré sú ešte aj tak pekne nakreslené pod sebou. Možno si všimnúť, že zapojenia sú vlastne k sebe určitým spôsobom inverzné. Napríklad prvá dvojica. Tam mám štyri odpory za sebou a pod tým štyri vedľa seba. Vedľajšia dvojica: Mám dva paralelne a k nim sériovo ďalšie dva. Zapojenie pod obsahuje zasa dva sériovo a k nim paralelne ďalšie dva. Takto sa dá uvedomiť aj inverzia ďalších dvojíc. Nuž a keď si pozriem tie dva hore napísané vzorce... Keď sú odpory rovnaké a majú veľkosť 1 Ω, vtedy to tvrdiť môžem. Jeden z dôvodov je, že jednotka je také pekné číslo, že jej prevrátená hodnota je zasa jedna.



Ešte v krátkosti k dvojici napravo. Ak majú všetky odpory rovnakú hodnotu, tieto zapojenia sú tiež rovnaké. Prepojením bodov A, B sa nič nemení, lebo napätie v týchto bodoch je rovnaké a vodičom, ktorý spája body A, B nepreteká prúd. K úplnému záveru vám ešte prajem krajšie počasie ako je dnes a nech nám napadá sniežik.



B–2.2 Prevracanie (opravoval Cyril Adamuščín)

Predstavte si pravidelný trojboký hranol (dĺžka hrany podstavy je a, výška tiež a, hustota ρ). Akou najmenšou silou musíme na hranol pôsobiť, aby sme ho prevrhli? Aký musí byť pritom koeficient trenia medzi hranolom a podložkou, aby sa nám to podarilo?

Milé a milí dievčatká a chlapci, najprv si musíme pripomenúť, ako vyzerá trojboký hranol. Takže hranol je niečo také ako valec, len jeho podstavou nie je kruh, ale iný geometrický útvar, zväčša nejaký mnohouholník. V našom prípade ide o hranol trojboký, teda bude mať tri boky. Bok však nie je ľubovoľná stena, ale len bočná stena, takže podstavou trojbokého hranola je trojuholník. Tak to by bolo.

Teraz by sme radi začali počítať, ale natrafíme na ťažký problém. Nevieme, ako by mal taký trojboký hranol ležať na zemi (stole, posteli, pieskovisku a pod.). Existujú dve možnosti:

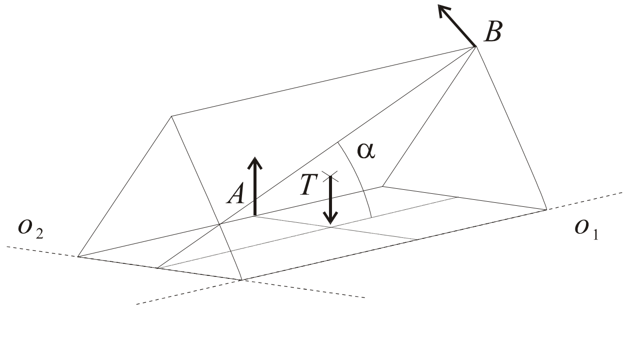
1. môže ležať na boku (potom to vyzerá ako stan),
2. alebo môže stáť na trojuholníkovej podstave.

Keďže sa medzi vami našli jedni aj druhí, vyrátame obe možnosti. V oboch prípadoch rátame najmenšiu možnú silu potrebnú na prevrátenie hranola (každému je snáď jasné, že slovné spojenie „Aká sila stačí?“ je ekvivalentné „Aká najmenšia sila stačí?“). Prevrátenie je otáčavý pohyb, teda z princípu páky je jasné, že najmenšiu silu budeme potrebovať pri najdlhšom ramene. Hm... tak budeme dvíhať v mieste, ktoré je najďalej od osi otáčania.

Poďme teda konkrétne na prvý prípad. „Prefíkanejší“ z vás si zvolili práve tento prípad, lebo je tam akoby menej rátania, ale to je chyták. Ak chceme určiť potrebnú silu musíme si zvoliť, okolo ktorej strany budeme hranol otáčať a kde budeme pôsobiť silou, aby bola čo najmenšia. Opäť existujú dve možnosti. Buď ho budeme otáčať okolo bočnej strany (1.1), alebo okolo strany podstavy (1.2).

Prípad 1.1 je najľahší. Moment gravitačnej sily je

$$M_g = \frac{F_g a}{2}.$$



Pre nás je najvýhodnejšie pôsobiť v bode A (ako na obrázku), lebo tam máme najväčšie rameno a teda moment našej sily bude

$$M = Fa.$$

Aby sme hranol vôbec zdvihli musí pre

momenty platiť

$$M_g = M \quad \Rightarrow \quad F = \frac{F_g}{2} = \frac{\sqrt{3}\rho a^3 g}{4},$$

kde $\sqrt{3}a^3/2$ je objem hranola. A teda poznáme aj hľadanú silu. Avšak je to len sila na začiatku prevracania, no neskôr sa pomer ramien bude meniť v prospech našej sily (výpočet je trošku komplikovanejší, takže ho nechám zvedavému čitateľovi, ale dá sa na to nahliadnuť už nakreslením jednoduchého obrázka. Tento argument používame aj pri ďalších prípadoch ☺), teda neskôr budeme potrebovať dokonca menšiu silu. No a čo sa týka trenia podložky, na tú v tomto prípade nemáme žiadne požiadavky, pretože žiadna naša sila nemala žiadnu zložku v horizontálnom smere.

Ale my hľadáme najmenšiu silu potrebnú na prevrátenie a v tejto stanovej polohe je jednoduchšie prevracať stan možnosťou 1.2. Opäť je moment gravitačnej sily

$$M_g = F_g a/2.$$

Ale tentokrát je ľahšie pôsobiť v bode B, lebo tak získame dlhšie rameno sily. Ak sa pohráte s Pytagorovou vetou dostanete, že jeho dĺžka je

$$r = a\sqrt{7}/2.$$

Moment našej sily teda bude

$$M = Fa\sqrt{7}/2.$$

A sila potrebná na prevrátenie je

$$M_g = M \quad \Rightarrow \quad F = \frac{F_g}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}\rho a^3 g}{2\sqrt{7}},$$

čo je menej ako pri prevracaní v prvom prípade (toto je teda dobre!!!). Lenže v tomto prípade je zasa nenulová horizontálna zložka sily a preto sa bude hranol šmýkať. Iba, ak by medzi podložkou a hranolom bolo dostatočné trenie. Nato, aby sa hranol nešmýkal, dostávame podmienku

$$F_X \le F_t,$$

pričom $F_X = F\sin\alpha$ a $F_t = (F_g - F\cos\alpha).f$, kde ľahko overíme, že uhol α je ten istý, čo na prvom obrázku. Teda dostávame podmienku

$$f \ge \frac{F\sin\alpha}{F_g - F\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{5} = 0{,}35.$$

Avšak, dá sa vyrátať, že keď budeme hranol ďalej zdvíhať, bude potrebný ešte väčší koeficient trenia. Na výpočet je však potrebná vyššia matematika a tak ostaneme pri tomto výsledku ☹.

Druhá možnosť je v podstate o tom istom. Najmenšiu silu budeme potrebovať v prípade, že preklápame cez ľubovoľnú zo strán podstavy (nie cez vrchol), lebo vtedy je rameno tiažovej sily len jedna tretina výšky. Teda moment tiažovej sily bude

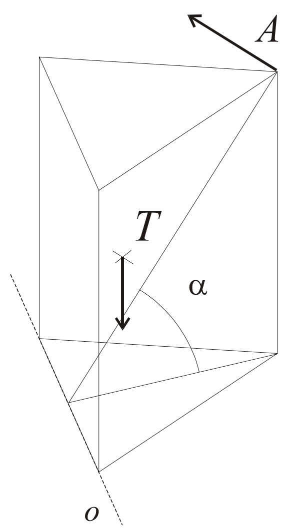
$$M_g = \sqrt{3}F_g a/6.$$

Aby sme dosiahli čo najdlhšie rameno našej sily, budeme pôsobiť silou v protiľahlom hornom vrchole (v bode A na druhom obrázku) kolmo na telesovú uhlopriečku. Dĺžku uhlopriečky sme vyrátali už v prípade 1.2, teda moment našej sily bude

$$M = Fa\sqrt{7}/2.$$

Teda z rovnováhy momentov dostávame

$$M_g = M \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2\sqrt{3}F_g}{6\sqrt{7}} = \frac{\rho a^3 g}{2\sqrt{7}}.$$



Opäť pre treciu silu dostávame podmienku

$$F_X \le F_t \quad \Rightarrow \quad f \ge \frac{F\sin\alpha}{F_g - F\cos\alpha} = \frac{2}{7-\sqrt{3}} = 0{,}19$$

Rovnako ako v predchádzajúcom prípade je to len koeficient trenia potrebný na začiatku zdvíhania. Neskôr bude musieť byť väčší, ale ...

To je asi tak všetko. A komu vŕta v hlave ten koeficient trenia, nech si na počítači nechá vykresliť graf závislosti f od uhla α naklonenia hranola a uvidí. Čaf.

B–2.3 Zápalky (opravoval Priky)

Zožeňte si päť prázdnych zápalkových škatuliek (najlepšie nových, zachovalých). Pokúste sa pomocou nich postaviť čo najdlhšie schodište podobné tomu na obrázku. Akú najväčšiu dĺžku presahu sa vám podarilo dosiahnuť? Aká je jej teoretická hodnota?

Zdravím všetku omladinu! Príklad so schodiskom zo zápaliek dopadol celkom fajn, až na pár nešťastlivcov, pre ktorých tu je pekný vzoráčik. Najprv si skúsme zistiť, aký najväčší previs by sa nám mohlo podariť vytvoriť a potom s hrôzou zistíme, že sme nešikovnučkí :). Všetci ste správne uvažovali, že to má súvis s ťažiskami, no... niektorí neprišli na tú správnu fintu „fň“, ako na to. Bolo treba určovať ťažiská vždy novej a novej sústavy (ktorá vzniká pridaním novej škatuľky). Pre zjednodušenie si zaveďme súradnicový systém. V ňom nám v pohode postačí jedna os, lebo nás nezaujíma poloha ťažiska vo vertikálnom smere (nerozhoduje výška ťažiska). Jej počiatok bude zhodný s prevísajúcim okrajom najvrchnejšej škatuľky. To znamená, že výsledný previs získame ako súradnicu ľavého okraja spodnej škatuľky.

Na začiatok si označme dĺžku zápalkovej škatuľky a = 5,1 cm a začnime pekne zhora. Prvá škatuľka má vzdialenosť od začiatku súradnicového systému $x_1 = 0$ a jej ťažisko $a/2$. A teraz je na rade veľkolepá myšlienka, ktorá vás mala osvietiť :). Poloha okraja nasledujúcej škatuľky bude pod miestom spoločného ťažiska sústavy (v tomto prípade jedinej škatuľky :). Pýtate sa prečo? Lebo... keby nebolo miesto spoločného ťažiska nad spodnou škatuľkou, tak by sa nám sústava preklopila. Teraz už teda isto vieme, že ťažisko novej sústavy musí byť vždy niekde nad škatuľkou. A prečo práve na hrane? Pretože chceme zistiť maximálnu teoretickú hodnotu previsu. No a teraz už ľahko určíme súradnicu okraja aj ťažiska druhej škatuľky, pretože nad 2. škatuľkou je len 1. škatuľka:

$$x_2 = t_1 = a/2,$$
$$t_2 = x_2 + a/2.$$

Ďalej, opäť podľa toho, čo sme si povedali na začiatku, vieme, že začiatok tretej škatuľky sa nachádza pod spoločným ťažiskom 1. a 2. škatuľky. A kde to presne je, zistíme veľmi jednoducho. Keďže škatuľky sú navlas rovnaké, tak poloha výsledného ťažiska sa bude rovnať aritmetickému priemeru polôh oboch ťažísk:

$$x_3 = (t_1 + t_2) / 2 = (a/2 + a) / 2 = 3a/4,$$

potom

$$t_3 = x_3 + a/2 = 5a/4.$$

Analogicky okraj 4. škatuľky sa nachádza pod spoločným ťažiskom 1., 2., 3. škatuľky:

$$x_4 = (t_1 + t_2 + t_3) / 3 = (a/2 + a + 5a/4) / 3 = 11a/12,$$
$$t_4 = 11a/12 + a/2 = 17a/12.$$

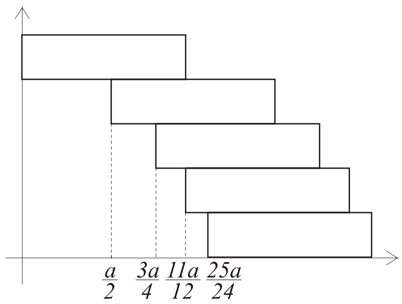
Okraj 5. škatuľky sa nachádza pod spoločným ťažiskom 1., 2., 3. a 4. škatuľky:

$$x_5 = (t_1 + t_2 + t_3 + t_4) / 4 = (a/2 + a + 5a/4 + 17a/12) / 4 = 25a/24.$$

Čiže teoreticky najväčšia hodnota previsu nám vyšla $25a/24$. A ako som už spomínal, moje škatuľky mali dĺžku 5,1 cm, takže najväčší možný previs, ktorý by som s nimi mohol dosiahnuť, by bol 5,3 cm.

A čo sa týka experimentu, tak som sa len opäť raz presvedčil, že som nešikovný :). Podaril sa mi maximálny previs 4,2 cm, čo má k 5,3 cm trošku ďaleko. Ale to už sme my starší ľudia, to sa už aj ruky trasú a tak :).

Na záver ešte malá drobnosť. Len niektorí ste si všimli, že obrázok v zadaní bol nakreslený trochu divne. Pretože je jasné, že sústava bude stabilnejšia, keď sa previs bude postupne zväčšovať, ako keby to bolo naopak. Veď aj pri stavbe domu si treba dať najväčší pozor na základy (lebo príde vietor a ... :). Keby sme mali hneď na začiatku najväčší možný previs, tak naša sústava je omnoho nestabilnejšia a nedokázali by sme vytvoriť maximálny previs! Teda obrázok bol len mätúci, a u niektorých aj splnil účel :).

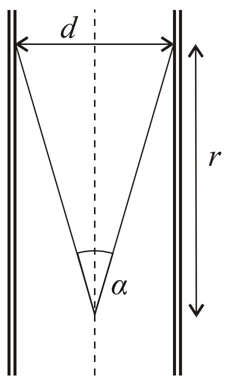


B–2.4 Jedna a či dve? (opravovala Saša)

Pokúste sa odhadnúť, v akej vzdialenosti vám koľajnice splývajú do jednej.

Ako tak rozmýšľam, také koľajnice to majú ťažké... celý život sú tak blízko seba, tiahnu sa svetom, kľukatia sa, klesajú a stúpajú v rovnakých chvíľach a predsa sa nikdy nestretnú, aby si vychutnali spoločné chvíle:(Alebo predsa sa stretnú?

Tak sa poďme na to spoločne pozrieť. Viacerým z vás vŕtalo v hlave to, že v zadaní nie je presne dané, o aké koľajnice ide. Na Slovensku máme niekoľko druhov koľajníc, ktoré sa od seba líšia hlavne ich vzdialenosťou od seba – odborným slovom sa táto vzdialenosť nazýva rozchod (možno to je príčina prečo sa tie koľajnice nikdy nechcú stretnúť:) A tak máme úzkorozchodné trate (rôzne lesné železnice), ktorých rozchod sa pohybuje v rozmedzí 600 až 800 mm, električkové trate s rozchodom 1000 mm, klasické osobné, nákladné a rýchlikové vlaky chodia po koľajniciach s normálnym rozchodom 1435 mm a na východe Slovenska, smerom od Košíc na Ukrajinu je širokorozchodná trať s rozchodom 1520 mm. Nehovoriac o tom, že v Austrálii majú v každom treťom štáte iný rozchod koľajníc... Každopádne, keď sa povie 'koľajnice', asi väčšinu z vás napadnú tie klasické a v podstate o ne aj išlo – viacerí ste vyčítali údaje o rozchode z literatúry alebo na internete (napr. Rozum do vrecka, www.zsr.sk), iní šli aj v daždivom počasí do terénu a merali, príp. sa pýtali ujov v modrej rovnošate, avšak tým, ktorí spravili len hrubý odhad, pripomínam, že aj získavanie údajov v teréne patrí často k úlohe.



No, ale poďme konečne k odhadovaniu. Vyskytli sa viaceré viac či menej dobré prístupy k riešeniu tejto úlohy, uvediem dva. V obidvoch prípadoch uvažujeme o normálnom rozchode koľajníc $d = 1435$ mm.

Prvý spôsob je skôr teoretický. V literatúre (napr. Fyziológia človeka a pod.) sa dočítame, že medzný uhol, pri ktorom ľudské oko vidí dva body ako dva a ešte nesplynú do jedného, je približne $\alpha = 1'$. Teda vzdialenosť r, v akej splývajú, odhadneme, ak vypočítame, v akej vzdialenosti musia byť dva body (vzdialené od seba d) tak, aby sme ich videli ako jeden, t.j., aby ich uhlová vzdialenosť bola menšia ako α. Ak si to celé nakreslíme, dostávame rovnoramenný trojuholník, so základňou d, uhlom oproti základni α a neznámou výškou r (pozri obrázok). Jednoduchým použitím goniometrických vzťahov máme $\mathrm{tg}(\alpha/2) = (d/2)/r$, z čoho $r = d/(2.\mathrm{tg}(\alpha/2)$, po dosadení číselných hodnôt $\alpha = 1'$ a $d = 1435$ mm dostávame hľadanú hodnotu približne 4,9 km. Vplyv toho, či stojíme presne medzi koľajnicami alebo nie a výšky odkiaľ sa pozeráme (či na zemi, alebo z mosta) je pri takejto vzdialenosti zanedbateľný.

Druhý spôsob je založený na priamej úmere. Ním viac odhadneme skutočné vlastnosti nášho oka. Na papier si blízko seba (napr. 1 mm) nakreslíme dve rovnobežné čiary. Pomaly sa od toho papiera vzďaľujeme a zaznamenáme si vzdialenosť x, pri ktorej tieto dve čiary už prestávame vnímať ako dve a splývajú nám do jednej čiary. Vzdialenosť r, pri ktorej nám splynú koľajnice s rozchodom d, vypočítame ako $r = xd/1$ mm. Spravila som experiment na sebe aj na spolubývajúcej a vzdialenosť x pre obe bola približne 3 m. (Pripomínam, že sme experimentovali ráno, zopár minút po prebudení, s rozospatými očami, takže isté odchýlky mohli vzniknúť). Približne rovnaká vzdialenosť sa objavovala aj vo vašich riešeniach. Po dosadení číselných hodnôt $x = 3$ m, $d = 1435$ mm dostávame $r = 4{,}3$ km. Z tohto výsledku vidieť, že oproti teoretickej hodnote sme zrejme zohľadnili aj (ne)kvalitu nášho zraku.

K obom prípadom ešte treba dodať, že takto vypočítaná hodnota je iba ideálna, lebo ako viacerí správne podotkli, nájsť tak dlhý, nezakľukatený, rovinný úsek koľajníc je na Slovensku naozaj ťažké. Rovnako na výslednú hodnotu má vplyv aj kvalita zraku, teplota vzduchu a s tým súvisiaca absorbcia a difrakcia, čistota vzduchu, počasie... Nehovoriac o tom, že skôr, ako by nám mohli koľajnice splynúť, môže sa stať, že nám pri pohľade z malej výšky zájdu za obzor.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina B – kategórie po 2. sérii zimného semestra 18. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	①	B-2.1	B-2.2	B-2.3	B-2.4	☠	Σ
1.	Imriška	Jakub	1 A	G BA J. Hronca	17.0	5.0	5.0	5.0	4.0		36.25
2.	Štolcová	Jana	kv.	G Nitra Párovská	17.8	5.0	4.0	5.0	3.8		36.15
3.	Dzetkulič	Michal	2 A	G PH Michalovce	14.0	6.0	4.0	5.0	4.0		33.00
4.	Sasák	Róbert	2 D	SPŠE Piešťany	14.0	5.0	4.0	5.0	4.0		32.00
5.	Simančík	František	sx.	G BA Grösslingova	13.5	5.0	4.0	5.0	4.0		31.50
6.	Škrovinová	Katarína	kv.	G Nitra Párovská	13.4	4.5	4.0	5.0	3.8		31.44
7.	Savincová	Katarína	2 E	G PH Michalovce	15.0	5.0	4.0	1.0	3.8		28.80
8.	Demím	Michal	1 B	G Nitra Golianova	11.5	5.0	3.5	4.0	3.8		28.69
9.	Duník	Matej	1 B	G VOZA	11.5	5.0	3.0	5.0	3.0		28.46
10.	Molčány	Dušan	1 B	SPŠS BA Fajnorovo	13.0	4.5	1.5	4.0	4.0		28.23
11.	Hrdá	Marcela	kv.	G Turčianske Teplice	12.3	5.0	3.5	3.5	4.0	-1	28.22
12.	Komorovský	Marek	kv.	G Dubnica n. Váhom	12.9	4.0	0.5	5.0	3.8		27.54
13.	Lalinský	Ján	sx. A	G Varšavská cesta	15.0	3.0	3.5	3.0	3.8	-1	27.30
14.	Struhár	Pavel	2 A	G BA J. Hronca	11.5	5.0	3.5	5.0	4.0	-2	27.00
15.	Chotváčová	Katarína	kv. B	G KE Alejová 1	14.4	2.0	1.0	4.0	3.5		26.36
16.	Kováč	Adrián	2 A	G PH Michalovce	11.0	5.0	4.0	2.0	3.8		25.80
	Molnárová	Katarína	2 D	G KE Šrobárova	12.5	4.5	0.0	5.0	3.8		25.80
18.	Pôbišová	Zuzana	1 F	G BB Tajovského	12.5	5.0	1.5	5.0	1.0	-1	25.39
19.	Hlavačiková	Jana	2 A	G BA Einsteinova	9.5	5.0	3.5	1.5	3.8		23.30
20.	Džunko	Ján	sx.	G Spišská Stará Ves	9.0	4.5	4.0	1.0	4.0		22.50
21.	Veselovská	Lenka	kv.	G Liptovský Mikuláš	7.8	5.0	1.0	3.5	3.8		22.45
22.	Foltin	Miroslav	1 C	G Jána Hollého	13.0	4.0	1.0	0.5	2.5		22.41
23.	Bratko	Milan	sx. A	G BA Pankúchova	12.5	5.0	1.0	5.0	0.5	-2	22.00
24.	Rajniaková	Gabča	sx.	G Liptovský Mikuláš	9.5	5.0	1.0	3.5	2.5		21.50
25.	Ďurčík	Miroslav	1 C	G BST Lučenec	11.0	4.5	0.5	3.0	1.0		21.48

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina B – kategórie po 2. sérii zimného semestra 18. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	①	B-2.1	B-2.2	B-2.3	B-2.4	☠	Σ
26.	Pettyová	Silvia	kv. B	G KE Alejová	6.7	4.0	0.0	5.0	3.8		20.88
27.	Gašparík	Peter	2 B	G AV Levice	7.5	4.5	–	5.0	3.8		20.80
28.	Trnovcová	Zuzana	2 C	G BA J. Hronca	9.5	4.5	1.5	2.0	3.8	-1	20.30
29.	Gottweis	Martin	1 B	G BA J. Hronca	6.1	5.0	2.5	1.5	3.5		20.03
30.	Novák	Ľubomír	1 B	G BA J. Hronca	8.0	4.5	1.0	1.5	3.5		19.99
31.	Kravec	Martin	1 A	G PH Michalovce	6.3	5.0	1.0	2.0	4.0		19.70
32.	Rubovič	Peter	sx. B	G KE Alejová	6.0	4.0	3.0	2.5	3.8		19.30
	Uhrin	Tomáš	2 E	G PH Michalovce	9.5	5.0	0.5	0.5	3.8		19.30
34.	Vojtko	Andrej	sx. A	G Skalica	7.5	2.0	–	5.0	4.0		18.50
35.	Lampášová	Júlia	sx.	G Považská Bystrica	7.0	4.5	2.5	2.0	1.5		17.50
36.	Kažmér	Ladislav	1 A	G Veľké Kapušany	6.1	5.0	–	–	4.0		16.61
37.	Pápayová	Zuzana	1 A	G Veľké Kapušany	4.7	5.0	0.5	0.5	3.8		16.02
38.	Sojáková	Stanka	2	G BA J. Hronca	6.0	5.0	4.0	1.5	0.5	-1	16.00
39.	Šomodiová	Kristína	1 A	G Piešťany	7.8	4.5	1.0	1.0	0.2		15.85
40.	Hergelová	Beáta	1 B	G BST Lučenec	5.1	5.0	0.5	4.0	1.5	-2	15.61
41.	Kissová	Marcela	1 A	G Veľké Kapušany	3.8	5.0	0.5	2.0	2.0		14.76
42.	Czókolyová	Eva	1 A	G Piešťany	6.7	4.5	0.1	1.5	0.5		14.62
43.	Regec	Mário	1 A	G PH Michalovce		5.0	3.0	1.0	4.0		14.37
44.	Schlosáriková	Eva	2 B	G Piešťany	9.0	2.5	0.5	2.0	–		14.00
45.	Dolejšia	Edita	sx.	OG ZA Varšavská	9.0	1.0	0.5	2.5	–		13.00
46.	Lázár	Tomáš	1 A	G Veľké Kapušany	3.8	4.0	0.5	1.0	2.0		12.67
47.	Kulík	František	2 E	G Humenné	6.0	3.0	0.5	2.0	1.0		12.50
48.	Přikrylová	Veronika	kv. A	OG ZA Varšavská	5.0	4.0	–	1.5	0.2		11.88
49.	Pašuth	Ondrej	1 A	G PH Michalovce	-0.7	5.0	0.5	2.5	4.0	-1	11.70
50.	Perešíni	Peter	1 F	G BB Tajovského	11.5	–	–	–	–		11.50
51.	Kováč	Michal	kv.	G BA Grösslingova	4.0	5.0	–	2.0	0.8	-2	11.19
52.	Karasová	Barbora	1 B	G Púchov	4.3	0.0	0.5	2.0	3.2		11.18
53.	Rochová	Alica	kv.	G Banská Štiavnica	3.8	4.5	–	1.0	0.5		11.03
54.	Kanovszký	Michal	2 A	OG Štúrovo	6.0	1.0	1.0	2.5	0.5		11.00
55.	Malčická	Martina	kv.	G Banská Štiavnica	3.8	4.5	0.0	1.0	0.5	-1	10.03
56.	Beňuš	Ondrej	2 A	G Štúrovo	6.0	1.0	0.5	2.0	0.5		10.00
	Rušin	Michal	sx.	G Spišská Stará Ves	2.5	2.5	0.5	0.5	4.0		10.00
58.	Jandošeková	Alexandr	2 A	OG Štúrovo	5.0	1.0	0.5	2.5	0.5		9.50
59.	Máčaiová	Zuzana	1 A	OG Štúrovo	0.8	4.5	0.5	1.5	–		8.58
60.	Leová	Iveta	4 G	G VPT Martin	4.4	1.5	1.0	–	0.5		8.13
61.	Holičková	Ivana	kv.	G Banská Štiavnica	3.8	4.5	–	–	0.5	-2	7.89
62.	Bruncko	Milan	2 C	G V.P.Tótha	3.0	–	0.5	1.5	3.8	-1	7.80
63.	Kuchta	Miroslav	3 A	Evanjelické gym. BA	6.9	–	–	–	–		6.91
64.	Krajčírovič	Michal	kv. B	G Trnava Hollého	1.9	2.5	–	1.5	–		6.88
65.	Táborský	Roman	1 C	G BA J. Hronca	6.1	–	–	–	–		6.13
66.	Vasilová	Elena	kv.	G Sabinov	3.8	0.5	0.5	0.5	0.5	-2	4.31
67.	Kubová	Miška	2 A	G Vrbové	3.5	0.5	–	1.0	0.5	-2	3.50
68.	Nagy	Jakub	8 C	ZŠ-Požiarnicka	2.8	–	–	–	–		2.77
69.	Kabát	Lukáš	1 D	SPŠE Piešťany	0.0	0.5	–	1.0	0.2		2.17
70.	Šaturová	Zuzana	2	G BA Einsteinova	2.0	–	–	–	–		2.00
71.	Molnárová	Zuzana	kv.	OG KE Alejová	0.8	–	–	–	–		0.77
72.	Machajdová	Katarína	2 C	G V.P.Tótha	0.5	–	–	–	–		0.50
73.	Taploová	Arikó	1 A	OG Štúrovo	-0.4	–	–	–	–		-0.35
74.	Melegová	Jazmína	1 A	OG Štúrovo	-5.5	–	–	–	–		-5.46

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

3. kolo zimnej časti 18. ročníka
A – kategória (starší)
školský rok 2002/2003
termín príchodu riešení
4. 12. 2002

www. **.sk**

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A–3.1 Lietadlo (5 bodov)
Bežné dopravné lietadlo letí vo výške 11 km nad hladinou mora rýchlosťou 890 km/h. V tejto výške je tlak vzduchu približne 10000 Pa a teplota okolia –65°C. V kabíne lietadla je izbový tlak aj teplota. Keďže každé lietadlo má netesnosti, musí do kabíny vháňať stále nový vzduch z okolia. Musí lietadlo vháňaný vzduch zohrievať, alebo ochladzovať, aby sa udržiavala vnútri želaná teplota? Prečo?

A–3.2 Global warm(n)ing (5 bodov)
Ak by sa teplota na Zemi zvýšila o 5°C, časť ľadu na jej povrchu by sa roztopila. V dôsledku toho by stúpla hladina oceánov. Popíšte javy vplývajúce na tento vzostup a pokúste sa odhadnúť jeho číselnú hodnotu.

A–3.3 Kozmický seriál (5 bodov)
Odmyslite si na chvíľu zemskú atmosféru a predstavte si, že stojíte na rovníku. Zvislo nahor vyhodíte prvou kozmickou rýchlosťou kameň. Do akej výšky nad povrchom Zeme sa dostane? Pri riešení úlohy otáčanie Zeme: a) neuvažujte,
b) uvažujte.

A–3.4 Celaskon (5 bodov)
Odmerajte, aký objem plynu (bubliniek) sa uvoľní z jednej tablety „šumivého celaskonu“.

Tento seminár je organizovaný s podporou
Nadácie Pre Otvorenú Spoločnosť – Open Society Fund
a KZDF FMFI UK

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 2. série
A – kategória (starší)
18. ročník
zimný semester
školský rok 2002/2003

www. fks .sk

FKS, KZDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
riesenia@fks.sk
info@fks.sk

A–2.1 Rýchlovlak (opravoval Čermo, so vzorákom sa pohrali aj Nagi s Matúšom)

Pri maximálnom výkone lokomotívy prejde rýchlovlak 200 km dlhú trať Bratislava – Žilina za dve hodiny. Odhadnite, aký je najmenší čas, za ktorý dokáže prejsť túto trasu opačným smerom. Výškový rozdiel medzi koncovými stanicami je 150 metrov, hmotnosť vlaku je 1000 ton. Pre jednoduchosť predpokladajte konštantný sklon trate, rozbiehanie a spomaľovanie vlaku neuvažujte.

Nuž, ako vidieť z vašich riešení, nie každý chcel byť v piatich rokoch rušňovodičom a tí, ktorí áno, tak asi len na TGV ☺. No, ale nevadí, keď už nie rušňákom, tak aspoň fyzikom. Keď sme už prišli na to, čím chceme byť, môžeme sa pustiť do riešenia tejto pomerne náročnej úlohy.

Prvým krokom bude pohľad na danú problematiku fyzikálnymi očami. Každý z vás určite aspoň raz v živote cestoval vlakom (alebo to aspoň videl v TV). Iste si spomeniete, že vlak počas cesty udržuje konštantnú rýchlosť. Aj keď bol tento fakt uvedený v zadaní, veľa riešiteľov naň zabudlo a neuvažovali o odporových silách, ale iba o zmene kinetickej energie na potenciálnu, čo v konečnom dôsledku znamenalo, že vlak počas celej cesty zrýchľoval (nielen tiažou, ale aj vlastným výkonom P) a výsledný čas sa potom pohyboval okolo 1 hod, teda priemerná rýchlosť 200 km/h!

Poučení touto chybou sa vyberieme po stopách našej odporovej sily. Treba si uvedomiť, že vlak okrem trecích síl F_t nezávisiacich od rýchlosti (napríklad valivý odpor kolies na koľajniciach) brzdia sily F_v, ktorých veľkosť závisí od rýchlosti. Mocninu, v akej tam vystupuje v určuje prostredie, v ktorom sa teleso pohybuje a aj samotná rýchlosť. Pre laminárne obtekanie v kvapalinách je $F_v \approx v$, pri vzduchu a rýchlostiach rádovo $10\,\mathrm{ms^{-1}}$ je to $\approx v^2$, ak sa narúša lineárnosť obtekania je potrebné brať do úvahy člen $\approx v^3$. Na začiatok skúsme uvažovať len so silami: $F_0 = F_t + F_v(v^2)$.

Posilnení týmito poznatkami sme pripravení vrhnúť sa do samotného riešenia. Pre rovnomerný pohyb platí podmienka: $F_{\text{výsl}} = 0$. V našom prípade na vlak pôsobia tri sily: sila lokomotívy F_L, tiaž G a odporová sila F_o. Zrejme platí:

$$\text{pre smer z Blavy do Žiliny:}\quad F_L(v_1) = F_v(v_1^2) + G\sin\alpha + F_t$$

$$\text{pre smer zo Žiliny do Blavy:}\quad F_L(v_2) = F_v(v_2^2) - G\sin\alpha + F_t$$

Pritom pre jednotlivé sily platí:

$$F_L(v) = P/v = PT/d, \qquad F_v(v) = Kv^2 = Kd^2/T^2,$$

kde P je výkon lokomotívy, T je príslušný čas, teda t pre cestu B→Ž a pre cestu nazad (Ž→B) zase τ, označíme si k konštantu v závislosti odporovej sily F_v od rýchlosti a d bude vzdialenosť BŽ. Pričom, ak je h výškový rozdiel, tak $\sin\alpha \approx h/d$. Po týchto uváženiach dostávame sústavu 2 rovníc s neznámou τ a parametrami P, K, F_t :

$$\frac{Pt}{d} = K\frac{d^2}{t^2} + G\frac{h}{d} + F_t, \qquad \frac{P\tau}{d} = K\frac{d^2}{\tau^2} - G\frac{h}{d} + F_t.$$

Teraz sa nám naskytujú dve možnosti, ako sa s daným problémom popasovať. Môžeme sa priamo pustiť do riešenia *a)*, alebo spraviť nejaké ďalšie zanedbania ohľadom neznámych veličín *b)*.

Takže *a)*: Po odčítaní rovníc sa zbavíme trecej sily F_t, ktorá sa dosť ťažko odhaduje vzhľadom na zložitosť sústavy, akou je rušeň s vozňami:

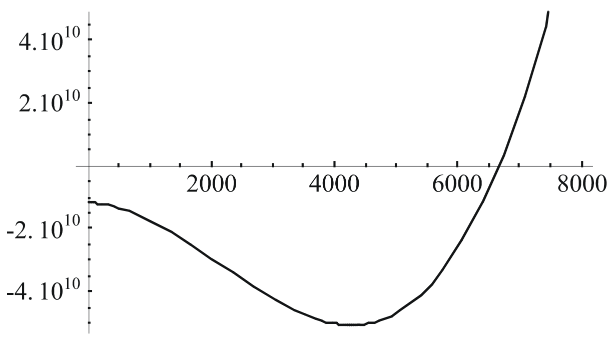
$$P\tau^3 + \tau^2\left(K\frac{d^3}{t^2} - Pt + 2Gh\right) - Kd^3 = 0. \qquad (1)$$

Dostali sme nepeknú kubickú rovnicu. Netreba ju ale presne riešiť, pretože chceme len odhad času τ. Všetko, čo v rovnici vystupuje vieme odhadnúť. Efektívny výkon lokomotívy P (existuje množstvo zdrojov odkiaľ možno čerpať údaje: encyklopédie, železničné stanice....) sa teda pohybuje okolo 5 MW. Konštanta $K = CS\rho/2 \approx 7{,}4$ pre parametre $\rho = 1{,}23$ kg.m^{-3}, $C \approx 1$ (kvádrovitý slovenský vlak) a $S \approx 4\times3 = 12$ m^2. Ďalej poznáme vzdialenosť $d = 200$ km a hmotnosť $M = 1\,000\,000$ kg. Rovnica (1) dostane teda tvar

$$5.10^6\tau^3 - 3{,}2.10^{10}\tau^2 - 5{,}92.10^{16} = 0, \qquad (2)$$

čiže

$$\tau^3 - 6400\tau^2 - 1{,}18.10^{10} = 0. \qquad (3)$$



Ideme nájsť približné riešenie. Buď ho odčítate z grafu (nakreslí ho počítač), alebo si popočítate na kalkulačke. Trebárs takto:

Do Žiliny to trvalo 7 200 sekúnd, nazad by to mohlo byť o čosi menej. Čo tak 7 000? Výraz vľavo v rovnici (3) vypľuje po naťukaní do kalkulačky $1{,}76.10^{10}$. Teda vyzerá to, že sme prestrelili, pretože už sme nad nulou a τ^3 prebilo zvyšok. Skúsme teraz 6500. Výsledkom je -7.10^9. Dobrým tipom je teda asi 6700. Dá to $1{,}6.10^9$. Dáme teda 6650, vyhodí to $-7{,}4.10^8$. S dosť dobrou presnosťou teda vieme povedať, že výsledok je niečo nad 6650 a pod 6700. Po 4 dosadeniach do kalkulačky…

Všetko by bolo krásne, ale keď si spätne vypočítame treciu silu, tak nám vyjde koeficient trenia μ približne 0,01, čo je pre kolesá vlaku asi 10-krát viac ako reálne. Ak by sme sa v rovnici snažili správne odhadnúť treciu silu $\approx G.\mu$ (koeficient valivého odporu pre kolesá vlaku je podľa tabuliek približne 0,001) vypočítali by sme čas $\approx$ 7000 s, ale K by malo hodnotu asi 210!

Zjavne bol náš model moc zjednodušený a preto jednotlivé parametre vychádzali nereálne. Z týchto výsledkov môžeme odhadnúť, že správny výsledok bude niekde medzi hodnotami 6650-7000 s. Pre otrlejšie povahy by sme mohli do odporu započítať aj nelaminárne prúdenia, o ktorých sme sa na začiatku rozprávali, ale to je už iná rozprávka...

Ešte nám tu zostáva možnosť b) – zanedbávanie. Ide v nej o to, že by sme jednu z odporových síl neuvažovali a spočítali sústavu rovníc. Ak sa na vec bližšie pozriete (rozpočítate si hodnoty pre nejakú reálnu situáciu), zistíte že pôsobiace sily sú navzájom porovnateľné a len tak škrtnúť niektorú z nich sa nedá. Smola, radšej vycúvajme.

A teraz pozor. Ak si skúsite dosadiť nejaké rozumné hodnoty, zistíte, že pri ceste z Bratislavy do Žiliny je (s použitím zadaných údajov) výkon lokomotívy necelý jeden Megawatt! To znamená, že predpoklad *„pri maximálnom výkone"* zo zadania má veľmi ďaleko k pravde. Veru tak, lokomotívy používajú svoju silu naplno iba pri rozbiehaní vlaku, počas jazdy už iba udržiavajú rýchlosť, ktorá je obmedzená technickým stavom našich tratí. Teda úloha, ktorú sme riešili bola síce pekná, ale k realite mala dosť ďaleko...

A–2.2 Kúzelníkov recept (opravovala Lucia)

Do dutej hliníkovej tyče vpustíme cez horný otvor magnet. Na dolnom konci spozorujeme, že akosi dlho trvá, kým magnet z tyče vylezie von. Prečo?

Hlavný krok je uvedomiť si, že za celým zázrakom stojí Faradayov a Lenzov zákon. Pre začiatok si napíšme ten druhý z nich. Dovolím si citovať z jednej knižočky: „Indukovaný prúd má vždy taký smer, že svojimi účinkami pôsobí proti zmene, ktorá ho vyvolala.“ To teda znamená, že keby sa nám pôsobením padajúceho magnetu v hliníkovej tyči indukoval nejaký prúd, pôsobil by proti padaniu magnetu, brzdil by jeho pád. Nedočkavcom prezradím, že takéto prúdy sa volajú „vírivé“ a vznikajú vtedy, keď sa v okolí vodiča mení magnetické pole. No a ako to s vodičmi býva, napriek vodivosti majú nejaký nenulový odpor a preto sa dôsledkom spomínaných vírivých prúdov uvoľňuje v tyči teplo (rovnako ako sa uvoľňuje teplo vo vlákne žiarovky, ktorým tečie prúd).

No a teraz sa pozrime na vec z druhej strany. Potenciálna energia nemagnetu hodeného do našej hliníkovej trubky sa mení iba na jeho kinetickú energiu. Naproti tomu potenciálna energia rovnako padajúceho magnetu sa premieňa nielen na kinetickú energiu, ale aj na teplo uvoľňované v tyči! (Odkiaľ inokadiaľ by sa mohlo to teplo nabrať? Do Vianoc je ďaleko, Ježiško nám ho teda nedonesie!) Na kinetickú energiu – rýchlosť magnetu sa preto nezvyšuje toľko ako pri bežnom voľnom páde a tak magnetu neostáva nič iné než padať pomalšie.

Toľko stručné zdôvodnenie javu popísaného v zadaní úlohy. Aby ste nefrflali, že to boli všetko len také reči, o malú chvíľku sa do veci pustíme poriadnejšie. Miestami to síce nebude nič pre slabé žalúdky, ale, kto sa prenesie cez tú matematiku (alebo nad ňou privrie oči), nájde ešte veľa zaujímavého. Takže...

Faraday si okolo roku 1831 všimol, že ak približujeme magnet k vodiču, začne ním prechádzať prúd. Podobne je to so závitom, ktorý sa otáča v konštantnom magnetickom poli. Jav elektromagnetickej indukcie vzniká teda vtedy, keď sa buď s časom mení indukcia $\boldsymbol{B}(t)$, alebo sa mení uhol $\alpha(t)$ medzi smerom magnetického poľa $\boldsymbol{B}$ a normálou $\boldsymbol{N}$ k ploche S, alebo sa s časom mení plocha $S(t)$, o ktorú sa zaujímame. Matematicky môžeme indukované napätie pri nehomogénnom poli $\boldsymbol{B}$ vyjadriť nasledovne

$$U_i = -\mathrm{d}\Phi / \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \qquad (1)$$

kde Φ označuje s časom sa meniaci tok magnetického poľa našou plochou S. Pri konštantnom poli $\boldsymbol{B}$ môžeme jednoduchšie písať $\Phi = BS\cos\alpha$.

Keď priložíme magnet k železu, magnet sa k nemu priťahuje. Ako je to v prípade hliníka? Hliník nie je feromagnetický materiál, magnet sa k nemu nepriťahuje. Predsa len, hliníková tyč je niečím zaujímavá. Keď si pozriete periodickú tabuľku prvkov, zistíte, že taký hliník má na valenčnej vrstve voľné elektróny. A to je podstatné.

Vráťme sa teraz k úvahe nášho padajúceho magnetu. Predstavme si ho napríklad ako tyčový magnet a okolo neho vykreslíme siločiary. Tie smerujú od južného pólu magnetu S k severnému N. Vezmime si ďalej časť, malý valcový prúžok tyče, v nejakej vzdialenosti od pólu, napr. od N, a sledujme tento prúžok, ako postupuje spolu s magnetom rýchlosťou $v(t)$ nadol. Hustota siločiar sa v prúžku nemení, preto aj veľkosť magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ zostáva konštantnou. Plôšku prúžku si môžeme vyjadriť

$$\mathrm{d}S = 2\pi rv\,dt. \qquad (2)$$

Plôška samozrejme závisí od rýchlosti magnetu, r je polomer valcovej tyče. Podľa vzťahu (1) si ľahko určíme veľkosť indukovaného napätia v našom prúžku

$$U_i = -2\pi rvB. \qquad (3)$$

Uhol α je nulový. Keby sme teraz zobrali iný prúžok nad pólom N, vzťah (3) by sa nezmenil, iba hodnota B by sa o niečo líšila, v závislosti od rozloženia magnetických siločiar nad pólom. Keby sme sa dostali s naším mysleným prúžkom do takej vzdialenosti, v ktorej by sme už pôsobenie magnetického poľa od magnetu mohli zanedbať, potom by U_i bolo nulové. Podobne by sa napätie U_i indukovalo aj pod južným pólom magnetu, tentokrát s opačným znamienkom

$$U_i = 2\pi rvB. \tag{4}$$

Prečo iné znamienko? Uhol α je teraz 180 stupňový. Normála plôšky smeruje od valca, ale siločiary pretínajúce plochu valca smerujú dnu. Tretiu situáciu na úseku povrchu valcovej tyče medzi pólmi magnetu nechám na vás, ale tvrdím, že výsledok je

$$U_i = 0. \tag{5}$$

Zistili sme teda, že na povrchu valcovej tyče sa indukuje napätie, a to v miestach nad severným pólom magnetu a pod južným pólom magnetu. V oblasti medzi pólmi aj v oblasti ďaleko od magnetu sa napätie neindukuje. Urobme teraz približný odhad, aký veľký prúd sa indukuje v hliníkovej tyči a aké veľké sú tepelné straty v materiáli.

Vďaka voľným elektrónom môže povrchom tyče tiecť prúd $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$. Celkový náboj Q môžeme pomocou kapacity C, ktorá je konštantou závislou od materiálu a tvaru tyče, vyjadriť $Q = U_i / C$. Aby sme mohli počítať ďalej, urobme vo výpočte jedno priblíženie. Do úvahy vezmime len oblasť nad severným pólom N, pod južným pólom magnetu je situácia podobná. Nech na dĺžke l vo vzdialenosti od pólu je veľkosť U_i od miesta k miestu približne rovnaká. Zanedbávam teda nehomogénnosť magnetického poľa nad N a budem predpokladať, že vo vzdialenosti l je magnetické pole $\boldsymbol{B}$ konštantné a vo vzdialenosti väčšej ako l je nulové. Potom podľa vzťahu (3) na celom úseku dĺžky l je $U_i = -2\pi rvB$.

Zapísať môžeme aj rovnosť $\mathrm{d}l/l = \mathrm{d}Q/Q$, kde $\mathrm{d}l = v\,\mathrm{d}t$ je dĺžka nášho valcového prúžka. Použitím všetkých spomínaných vzťahov pre veľkosť indukovaného prúdu dostávame

$$I = -2\pi r\gamma Bv^2, \tag{6}$$

kde $\gamma = C/l$ je dĺžková kapacita.

Keďže hliník má svoj merný, napr. dĺžkový odpor $\rho = R/l$, pri pretekaní prúdu v ňom dochádza k tepelným stratám. Tie ľahko vyjadríme pomocou Joulovho zákona, $P = RI^2$. Otázkou teda zostáva, odkiaľ čerpať energiu na to, aby sa mohla premieňať na Joulovo teplo. Odpoveď je: v kinetickej a potenciálnej energii magnetu pri voľnom páde. Cyklus vymieňania energií si môžeme predstaviť nasledovne. Nech sa na začiatku magnet pohybuje voľným pádom. Jeho rýchlosť narastá. Pri pohybe sa však indukuje prúd, ktorý spôsobuje, že časť energie z pohybu sa premieňa na teplo. Preto magnet postupne viac stráca na rýchlosti. Predstavme si, že by sa toľko energie spotrebovalo na Joulov ohrev, až by magnet temer zastal. Potom by sa ale neindukoval skoro žiaden prúd a žiadna energia z pohybu by sa „neodčerpávala“. Magnet by začal zrýchľovať. Cítime, že celý dej speje k rovnomernému pohybu magnetu nejakou rýchlosťou v. Z našich skorších úvah o indukovanom prúde si ju môžeme približne odhadnúť.

Chceme dať do rovnosti energie, vtedy nastáva energetická rovnováha, čo je to isté, ako keď dáme do rovnosti výkony. Takže máme $mgv = 4\pi r^2\gamma^2\rho B^2 lv^4$ a odtiaľ

$$v^3 = mg/4\pi r^2\gamma^2\rho B^2 l.$$

Všetky veličiny na pravej strane rovnosti sú buď materiálové konštanty, napr. γ a ρ, alebo súvisia s veľkosťou magnetického poľa $\boldsymbol{B}$, ktoré sme si povedali, že je konštantné. Rýchlosť, ako vidieť teda nezávisí od času, je konštantná.

Treba si ale uvedomiť, že výpočet indukovaného prúdu v sebe zahŕňa priblíženie s konštantným magnetickým poľom na úseku l. Toto priblíženie, ako vidieť z výsledku konštantnej rýchlosti po ustálení pohybu magnetu, však bolo pomerne dobré. Okrem toho sme získali nejakú predstavu o tom, čo elektromagnetická indukcia v tomto prípade spôsobuje. Vo všeobecnosti podobné javy nastávajú aj v iných situáciách. Spolu hovoríme o Foucaltových vírivých prúdoch, ktoré, podľa Lenzovho zákona, pôsobia proti zmene, ktorá ich vyvolala. S vírivými prúdmi sa môžeme stretnúť napríklad v transformátoroch, elektromeroch, elektromagnetických brzdách. Mimochodom, myslím, že rôzne zábavné parky ich využívajú tiež. Ako inak by sa dal ubrzdiť taký „Freefall“?

A–2.3 Balón (opravovala Miška)

Do akej výšky môže vystúpiť teplovzdušný balón? Predpokladajte, že má konštantný objem, polomer 8 m, hmotnosť záťaže je 100 kg a potrebné údaje nájdete v tabuľkách.

Balónik nám bude stúpať a bude sa asi snažiť dodržiavať nejaké tie naše fyzikálne zákony. Na začiatku sa bližšie pozrieme na tri z nich: stavovú rovnicu ideálneho plynu (1), tabuľkovú barometrickú rovnicu (2) a rovnicu rovnováhy síl pôsobiacich na balón v hľadanej výške výstupu (3):

$$pV = nRT \text{ , resp. } pM = \rho RT \tag{1}$$

$$p_H = p_0 e^{\frac{-Mgh}{RT}} \tag{2}$$

(Vo všetkých používaných rovniciach je M molová hmotnosť vzduchu, veličiny s indexom i sa vzťahujú na balón – ρ_i je hustota vzduchu v balóne, T_i teplota vzduchu v balóne.)

Balón nám bude stúpať až dovtedy, kým sa vztlaková sila nebude rovnať tiažovej. Potom naša rovnica (3) bude vyzerať nejako takto:

$$(M'+m)g = \rho_H .V.g$$

$$V(\rho_H - \rho_i) = M' , \tag{3}$$

kde M' je daná hmotnosť záťaže (100kg), m je hmotnosť vzduchu v balóne ($m = V_{balóna}.\rho_i$), ρ_H je hustota vzduchu v okolí balóna v tejto výške. Obe hustoty sa nám ale zákerne menia v závislosti od výšky a teda i tlaku. Z (1) a (2) dostaneme

$$\rho_H = \frac{Mp_0 e^{-\frac{Mgh}{RT_H}}}{RT_H} \quad \text{a analogicky} \quad \rho_i = \frac{Mp_0 e^{-\frac{Mgh}{RT_H}}}{RT_i} .$$

Po ich dosadení do (3) a po niekoľkých úpravách (na ktoré vám stačí jedna prednáška z optiky :-) budeme majiteľmi krásnej finálnej rovnice v tvare

$$\frac{M'R}{MV} = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT_H}} \left(\frac{1}{T_H} - \frac{1}{T_i} \right) .$$

Tak a máme tu jeden ďalší veľký problém, s ktorým sa musíme popasovať. Zákerné totiž pri našej dobrodružnej ceste balónom nie sú iba hustoty, ale i celkom obyčajná teplota vzduchu v okolí balóna T_H závisí od výšky podľa ďalšieho tabuľkového vzťahu $T_H = T_0 - 0{,}0065\ h$. Jeho presnosť je obmedzená iba do výšky 11 km, vo vyšších výškach je už jeho použitie nepresnejšie, ale predsa užitočné. V tabuľkách sa dajú nájsť teploty, ktoré sú pre rôzne výšky konštantné a dá sa ďalej pracovať i s nimi ako s T_H. Musíme však dávať pozor na to, ako ich budeme dosadzovať do finálnej rovnice (nie vždy je to také jednoduché ako vo väčšine vašich riešení).

Ak budeme uvažovať, že teplotu vzduchu T_i v balóne dokážeme udržiavať konštantnú (vo vašich riešeniach ste ju celkom pekne reálne odhadovali napríklad na nejakých tých 60°C), numerickým riešením rovnice (napríklad pomocou počítača alebo vašich pevných nervov pri pokusnom dosadzovaní výšky h) zistíme, že balón by v takýchto ideálnych podmienkach mohol vystúpiť až do výšky viac ako 16 km. Lenže...

...od určitej výšky h (zhruba už od takých 3 – 4 km) majú oveľa väčší vplyv na teplotu vzduchu v balóne tepelné straty ako zmena hustoty plynu. Tepelné straty sú spôsobené tým, že teplotný rozdiel medzi teplotou vzduchu v balóne a teplotou okolia je väčší a teda i vyžarovanie tepla bude väčšie. Preto bude naša najvyššia dosiahnutá výška nižšia ako tých optimistických 16 km (Bus sa dôkladne pohral práve s týmto javom a balón s ním vystúpil iba do výšky 5 km.).

Vcelku je toto riešenie dosť hnedohusté (podľa Braňa a Peťa), a preto som bola potešená tým, že mnohí z vás mali vo svojich riešeniach postupy nanajvýš invenčné (ani som nevedela, koľko internetových stránok obsahuje informácie o teplovzdušných balónoch :-) a oveľa jednoduchšie. Otázne však už bolo, nakoľko boli tieto postupy správne. Nie vždy sa dá totiž čosi zanedbať a tváriť sa, že to výsledku a javu samotnému neublíži. Ale aj tak sa tešte, lebo ste mali vcelku fajn riešenia a nabudúce možno bude potrebné spočítať ešte niečo horšie...

A–2.4 Narkoman (opravoval Fajo)

Pokúste sa experimentálne zistiť (bez priameho merania), aký vnútorný priemer má ihla na injekčnej striekačke.

Nazdárek, ak si podľa názvu myslíte, že by vám mal o tomto príklade porozprávať niekto kompetentný, tak vedzte, že táto podobnosť je s mojou osobou čisto náhodná. Táto úloha bola taká teoreticko-experimentálna a dala sa riešiť niekoľkými rovnako dobrými spôsobmi. Podstatné je, že ste všetci správne pochopili vetičku: „bez priameho merania“ a neskúšali ste strkať do ihly všelijaké drôtiky a zisťovať ich priemer a pod.

Skoro všetci ste vo výpočtoch využívali známu rovnicu kontinuity pre tok kvapaliny:

$$S_1.v_1 = S_2.v_2\,. \qquad (1)$$

Teda, ak natiahneme do injekcie vodu a budeme tlačiť piest rýchlosťou v_1, bude kvapalina vytekať z ihly rýchlosťou v_2, ktorá bude podľa rovnice väčšia. V našom prípade je S_1 vnútorný obsah prierezu piestu a S_2 obsah prierezu ihly. Je jasné, že ak budeme vedieť prierez ihly S_2 , vypočítať jej priemer už bude hračka. Ako ale zistiť hodnoty S_1, v_1 a v_2?

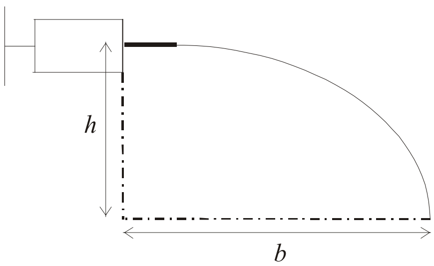
Finta je v tom, že my ani nepotrebujeme S_1, v_1 tak, ako ich súčin $S_1.v_1$. To je ale vlastne objemový prietok $Q_v = V / t$, čiže objem vody V, ktorý z injekcie vytečie za čas t.

Vnútro injekcie má tvar valca s podstavou S_1 a výškou (dĺžkou) l . Potom jeho objem (objem vody) je $V = S_1.l$. Objemový prietok je:

$$Q_v = \frac{S_1 l}{t} = S_1\frac{l}{t} = S_1 v_1\,.$$

Keďže injekcia je objemovo okalibrovaná, vieme koľko vody v nej je. Stačí namerať čas t, za ktorý túto vodu vytlačíme a ľavú stranu rovnice (1) máme vybavenú.

Ostáva už len namerať rýchlosť vytekajúcej vody v_2. Tu si pomôžeme tým, že využijeme gravitáciu a niektorý z vrhov – vodorovný, šikmý, zvislý... Ja som sa rozhodol pre vodorovný, pretože je asi najľahšie merateľný.



Dôležité je držať striekačku vo vodorovnej polohe. Voda je teda vrhnutá vo vodorovnom smere počiatočnou rýchlosťou v_2 a padá na zem. Nech h je kolmá vzdialenosť hrotu ihly od zeme a b vzdialenosť, do ktorej dopadá vytekajúca voda. Rovnice pre vodorovný vrh:

$$b = v_2.t_1 \quad \text{a} \quad h = 1/2.gt_1^2.$$

Z prvej rovnice vyjadríme čas t_1 a dosadíme do druhej:

$$h = \frac{1}{2}g\left(\frac{b}{v_2}\right)^2, \qquad \text{z toho} \qquad v_2 = b\sqrt{\frac{g}{2h}}\,.$$

Hodnoty h a b sa dajú namerať, takže už nám nič nebráni určiť prierez S_2, čiže aj hľadaný priemer ihly d:

$$S_2 = \pi\frac{d^2}{4} \ \text{ z toho } \ d = \sqrt{\frac{4S_2}{\pi}}, \ \text{ kde } \ S_2 = \frac{S_1 v_1}{v_2} = \frac{Q_v}{v_2}, \ \text{ po dosadení:}$$

$$d = \sqrt{\frac{4V}{\pi . t . b} \sqrt{\frac{2h}{g}}}\ .$$

Vidíme, že na určenie *d* potrebujeme namerať 4 veličiny: *V*, *t*, *h*, *b*. Postup je asi takýto:

Umiestnime injekciu na stôl s nejakou výškou *h*. Vo vzdialenosti *b* od stola spravíme na zem značku - cieľ. Naberieme do striekačky známy objem V. Zoberieme stopky a triafame vodu na cieľ, pričom zmeriame čas *t*. Dôležité je, aby voda dopadala stále na značku, čiže, aby sme piest tlačili konštantnou rýchlosťou. To si vyžaduje nejaký ten tréning. Druhou možnosťou je použiť zvislý vrh nahor, kde bude teba merať výšku h_1, do ktorej voda vystrekne. Potom pre výšku výstupu zo zákona zachovania energie platí: Teleso vyletí do takej výšky, že celá jeho počiatočná kinetická energia sa premení na polohovú:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = mgh_1 \quad \text{z toho} \quad v_2 = \sqrt{2gh_1} \quad \text{a} \quad d = \sqrt{\frac{4V}{\pi . t . \sqrt{2gh_1}}}$$

No a tu sú nejaké vami namerané hodnoty:

V [ml]	*h* [m]	*b* [m]	*t* [s]	*d* [mm]
1	0,105	0,10	8,97	0,46
20	0,87	2,39	21,16	0,46
20	0,35	0,30	22,60	0,49

vodorovný vrh

V [ml]	*h1* [m]	*t* [s]	*d* [mm]
5	0,75	5,4	0,55
20	0,80	15,0	0,64
10	0,30	20,2	0,51

zvislý vrh

Vaše riešenia nasvedčujú tomu, že ste sa potrápili a väčšina z vás namerala priemer *d* s dosť slušnou presnosťou. Hodnotil som nielen teoretické riešenie, ale aj to, ako sa vám podarilo samotné meranie – hlavne, koľko ste ich urobili (jedno nestačí). Najlepšie bolo, ak ste opakovali merania aj pri zmenených hodnotách *V*, *h*, *b*, pretože ste tým zmenšili aj celkovú chybu merania. A aké sú výrobcom udávané priemery ihiel? Najčastejšie používané sú ihly s vonkajším priemerom *d* = 0,5; 0,7 a 1,1 mm, z čoho sa dá usudzovať, že vaše výsledky by mohli byť celkom správne.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 2. sérii zimného semestra 18. ročníka

	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	①	A-2.1	A-2.2	A-2.3	A-2.4	☠	Σ
1.	Závodný	Jakub	se.	G BA Grösslingova	18.0	3.5	4.50	5.0	5.0		36.54
2.	Štolc	Miroslav	se.	G Nitra Párovská	17.4	5.0	3.50	3.5	4.5		34.73
3.	Batmendijnová	Zuzana	se.	G Terézie Vansovej	17.2	3.0	3.50	5.0	5.0		34.52
4.	Neilinger	Pavol	3 A	G Dunajská Streda	18.4	5.0	3.50	1.5	5.0		34.51
5.	Baník	Dušan	3 A	G Poprad Popr. nábr.	16.8	3.0	2.50	4.5	5.0		32.92
6.	Škorupa	Martin	3 D	G Liptovský Mikuláš	17.2	4.5	3.00	2.0	5.0		32.85
7.	Smrek	Ján	ok. N	1SG BA Čapkova	16.0	4.0	3.50	4.0	5.0		32.50
8.	Zajac	Peter	3 B	G BA Grösslingova	16.2	3.0	4.00	3.5	3.0		31.02
9.	Kvašnáková	Katka	3 E	G K2 Prešov	16.4	3.0	3.50	3.0	3.5		30.74
10.	Tekel	Juraj	ok.	G M.M. Hodžu	17.0	2.0	3.50	3.0	5.0		30.50
11.	Fialka	Vlado	3 E	G K2 Prešov	16.7	3.0	2.50	2.5	3.5		29.68
12.	Svrček	Matúš	se.	G Terézie Vansovej	13.7	3.0	3.75	3.0	5.0		29.63
13.	Burger	Michal	se.	G BA Grösslingova	12.3	5.0	4.00	5.0	5.0	-2	29.57
14.	Brutovská	Eva	se.	G Kežmarok	17.6	3.0	3.00	1.0	3.0		29.11
15.	Naď	Miroslav	3 A	G Veľké Kapušany	13.4	3.0	2.50	2.0	4.5		26.88

16.	Kysel	Róbert	3 A	G BB Š. Moyzesa	12.8	0.5	3.50	4.0	3.5		25.74
17.	Mikulík	Andrej	3 B	G BA Grösslingova	13.4	3.0	0.00	2.5	5.0		25.44
18.	Trubenová	Barbora	3 A	G BA J. Hronca	9.8	3.0	3.00	3.0	4.5		24.57
19.	Dzurňák	Tomáš	1 E	G Spišská Nová Ves	10.5	3.0	3.00	5.0	2.5	-2	23.32
20.	Zalom	Peter	4 G	G Poprad Tatarku	11.3	4.0	3.50	1.0	3.5		23.30
21.	Molčány	Michal	3 E	SPŠE BA K.Adlera	14.8	0.5	2.50	0.5	3.0		22.63
22.	Krššák	Martin	se.	G Piaristické Nitra	8.8	3.0	1.50	4.5	2.5		21.72
23.	Maták	Peter	3 E	G VBN Prievidza	12.0	4.0	4.25	–	–		21.70
24.	Potočková	Zuzana	se.	G Liptovský Mikuláš	12.8	–	4.00	1.5	2.0		21.68
25.	Šoltésová	Mária	3 B	G BA Grösslingova	8.9	3.0	0.00	2.5	5.0		20.90
26.	Dzetkulič	Michal	2 A	G PH Michalovce	10.2	–	3.00	2.0	3.5		20.14
27.	Struhár	Pavel	2 A	G BA J. Hronca	13.4	1.0	–	–	4.5	-1	19.14
28.	Lakatoš	Pavol	3 A	G Veľké Kapušany	12.8	1.0	1.00	0.5	2.5		18.90
29.	Feketeová	Erika	3 A	G Veľké Kapušany	11.0	3.0	–	0.5	2.5		18.26
30.	Hornák	Rastislav	3 D	SPŠE Piešťany	13.0	1.0	3.00	–	–		17.93
31.	Čajka	Jozef	3 A	G Spišská Stará Ves	8.9	1.0	3.50	1.0	1.5		17.27
32.	Perešíni	Peter	1 F	G BB Tajovského	16.0	–	–	–	–		15.95
33.	Staňák	Ľuboš	se.	G Dunajská Streda	12.4	–	3.50	–	–	-1	15.81
34.	Flak	Juraj	se.	G BA Vazovova	9.7	0.5	0.50	2.0	4.5	-3	15.60
35.	Ďurák	Michal	3	G BST Lučenec	15.5	–	–	–	–		15.52
36.	Putiš	Marián	4 B	G BB Sládkoviča	7.5	1.0	4.50	1.5	2.0	-1	15.50
37.	Mánik	Tomáš	3 C	G BST Lučenec	14.6	–	–	–	–		14.64
38.	Bukovina	Lukáš	3 A	G Spišská Stará Ves	6.6	1.0	3.50	1.0	2.0	-1	14.50
39.	Salajka	Lukáš	3 A	SPŠ IG	13.7	–	–	–	–		13.72
40.	Ferko	Tomáš	3 A	G Spišská Stará Ves	5.9	1.0	2.00	2.0	2.0	-1	13.29
41.	Kramarič	Michal	3 C	G BA I. Horvátha	6.8	3.0	3.50	–	–	-2	12.63
42.	Dravecky	Pavol	3 IB	G BA J. Hronca	12.5	–	–	–	–		12.49
43.	Ploszek	Tomáš	3 D	SPŠE Piešťany	9.4	–	1.50	0.5	0.0		11.98
44.	Galovič	Marián	4 B	G Kurzw.-Eisenstadt	11.5	–	–	–	–		11.50
45.	Lauko	Martin	se. A	G JL Martin		3.0	0.00	2.5	3.5		10.49
46.	Kuruc	Pavol		G Želiezovce	6.1	0.5	3.00	1.5	–	-2	10.25
47.	Makovníková	Zuzana	3 D	G Žilina Hlinská	10.0	–	–	–	–		10.00
48.	Majorošová	Gabriela	3 A	G Veľké Kapušany	3.7	3.0	–	0.5	2.5	-1	9.98
49.	Vavrovič	Juraj	3 A	G Piaristické Nitra	5.5	1.0	0.00	0.5	2.0		9.91
50.	Santusová	Iva	3 C	G VPT Martin	5.0	0.5	0.00	0.5	1.5		8.12
51.	Kamenská	Katarína	3 C	G VPT Martin	5.5	0.5	0.50	–	1.0		8.09
52.	Žák	Vladimír	3 A	G LS Bardejov	7.9	–	–	–	–		7.91
53.	Vontorčíková	Lenka	3 C	G VPT Martin	7.8	–	–	–	–		7.82
54.	Haizer	Ľudovít	ok.	G BA sv. Uršule	7.5	–	–	–	–		7.50
55.	Varga	Matej	2 B	Evanjelické gym. BA	7.3	–	–	–	–		7.26
56.	Rybár	Jozef	ok. B	G BA sv. Uršule	7.0	–	–	–	–		7.00
57.	Pikna	Peter	3 D	G BA Metodova	5.5	1.0	–	–	–		6.83
58.	Vančo	Tomáš	3		6.7	–	–	–	–		6.70
	Sčensný	Jozef	se. B	G Nitra	6.7	–	–	–	–		6.70
60.	Boháčová	Iveta	3 C	G VPT Martin	5.7	–	–	–	1.5	-1	6.61
61.	Patáčik	Ivan	3 C	G Partizánske	6.7	0.5	0.00	–	–	-1	6.34
62.	Franček	Igor	3	G Žilina Hlinská	2.9	0.5	3.00	–	1.0	-3	5.45
63.	Trtílek	Radovan	3 C	G VPT Martin	5.3	–	–	–	–		5.31
64.	Bellanová	Jana	3 E	G Žilina Hlinská		0.5	3.00	–	1.0	-3	2.55
65.	Oceľák	Michal	4 AB	G KE Šaca	2.0	–	–	–	–		2.00
66.	Breuer	Tomáš	3 E	SPŠE Piešťany	0.0	–	–	–	–		0.00

A po ťažkých vzorákoch...