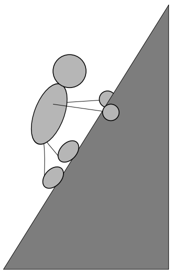
Riešenia 1. série letnej časti

1.1 „Miujem tuenie“

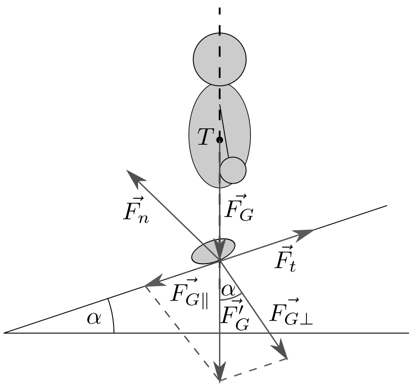
vzorák **Vladko**, opravoval **Vladko**

Samašec sa počas jesene rozhodol liezť po skalách. Vyhliadol si vo svojom okolí šikmú skalu bez akýchkoľvek puklín, o ktoré by sa mohol zachytiť, a v pevnej turistickej obuvi s kvalitnou podrážkou sa ju rozhodol zdolať. Ako tak lezie, zrazu začne panikáriť, lebo sa mu skala zdá príliš strmá, a preto pre istotu položí na skalu aj ruky. To sa mu však stáva osudným a Samašec sa zošmykne po skale smerom dole. Prečo sa to udialo?



Obrázok 1: *Samašec na skale*

Predstavme si Samašca, ako stojí na šikmej skale tak, že ak by bola čo i len o trošku šikmejšia, tak by sa zošmykol. Nech zatiaľ stojí celou svojou váhou na nohách. Čo musí platiť pre takúto rovnovážnu polohu? Súčet všetkých síl aj súčet momentov síl musí byť nulový. Momenty síl vie vybalansovať naklonením svojho tela,[1] teda nás budú trápiť iba veľkosti síl.



Obrázok 2: *Ako Samašec stojí na skale*

Uvažujeme nasledovné sily: tiažová (pôsobiaca v ťažisku vo zvislom smere nadol), normálová od podložky (pôsobiaca na chodidlá šikmo nahor – kolmo na stenu) a trecia (pôsobiaca na chodidlá v rovnobežnom smere s podložkou a proti smeru šmyku). Tiaž si rozložíme do rovnobežného a kolmého smeru na podložku. Z rovnosti kolmých zložiek vyplýva, že normálová sila má veľkosť príslušnej zložky tiažovej sily. V rovnobežnom smere platí, že trecia sila vyrovnáva rovnobežnú zložku tiažovej sily. Vo všeobecnosti je trecia sila menšia

[1] Tvrdenie hodné zamyslenia, odporúčam nakresliť si obrázok s označeným uhlom naklonenia postavičky a premyslieť si momenty síl.

alebo rovná súčinu normálovej sily $F_n \leq F_g \cos\alpha$ a koeficientu statického trenia medzi topánkou a skalou f_t. V prípade, že Samašec by sa pri ľubovoľnom väčšom naklonení zošmykol, môžeme znak nerovnosti prepísať na znak rovnosti:[2]

$$F_g \sin\alpha = f_t F_g \cos\alpha$$
$$f_t = \tan\alpha$$

Teraz Samašec položí na skalu ruky, teda istá časť kolmej zložky tiažovej sily je vyrovnávaná normálovou silou v mieste nôh a druhá časť v mieste rúk. Môžeme povedať, že normálová sila pôsobiaca v mieste nôh je $F_{n1} = f_t p F_g \cos\alpha$ a v mieste rúk je $F_{n2} = f_r(1-p)F_g \cos\alpha$, kde f_r je koeficient statického trenia medzi rukami a skalou a $p \in \langle 0; 1 \rangle$ vyjadruje, akú časť hmotnosti nesú nohy. Pre stabilnú polohu musí platiť, že rovnobežná zložka tiažovej sily je menšia alebo rovná maximálnej hodnote trecej sily.

$$F_g \sin\alpha \leq f_t F_g p \cos\alpha + f_r F_g (1-p)\cos\alpha$$
$$\tan\alpha \leq p f_t + (1-p) f_r$$

Teraz využijeme výsledok z predošlej situácie $\tan\alpha = f_t$.

$$f_t \leq p f_t + (1-p) f_r$$
$$f_t \leq f_r$$

Za predpokladu spomenutého v zadaní, že Samašec má kvalitnú obuv, teda koeficient trenia medzi topánkou a stenou je väčší ako medzi rukou a stenou, nie je splnená podmienka stability a nasleduje zošmyknutie sa. K záchrane protagonistu by mohli dopomôcť rukavice pokryté brúsnym papierom alebo z iného materiálu, ktorý by zvýšil koeficient statického trenia.

1.2 Piatok večer na kanoe

vzorák **Kvík**, opravoval **Kvík**

Robinson a Piatok našli vo fľaši starú nábojovú zbierku. Počas obdobia dažďov sa im podarilo vyriešiť všetky príklady okrem jedného z orbitálnej mechaniky, v ktorom zlomyseľní autori chceli aj presný číselný výsledok. Lenže ak namiesto papiera máte iba paličku a piesok, deliť gravitačnú konštantu druhou mocninou zemského polomeru nie je ľahké, takže po šiestich nevydarených pokusoch sa začali navzájom obviňovať z diletantstva a navyše sa pritom hrozne pohádali, aký ten polomer Zeme vlastne je.

Po dvoch týždňoch neustáleho škriepenia, keď polovica políčok s jačmeňom vyschla, všetky papagáje odleteli na tichšiu časť ostrova a nepodojené kozy sa naučili skákať v ohrade škôlku, Piatka napadlo, že spor predsa môžu rozsúdiť sami experimentom.

Pomôžte im vymyslieť čo najjednoduchší a zároveň najpresnejší spôsob, ktorým sa dá odmerať polomer Zeme. Na ostrove majú kanoe, meracie pásmo, pušky, ďalekohľad a iné bežné veci z roku 1670, prípadne si nejaké pomôcky môžu v rámci svojich možností vyrobiť. Navyše skúste pouvažovať, čo by mohli robiť, ak by bolo zamračené, noc, alebo by nemali poruke more. Nezabudnite dôkladne vysvetliť, prečo váš spôsob funguje a rádovo odhadnite, akú presnosť je ním možné dosiahnuť.

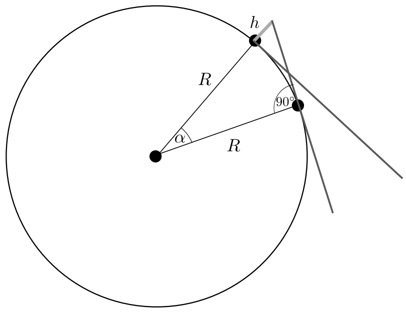
Tak sme zasa raz skúsili, ako sa viete vynájsť, keď je cieľom úlohy niečo odmerať… a tentokrát sa to dokonca obišlo aj bez bravčového karé.

V 17. storočí už zemský polomer samozrejme odmeraný bol, a dokonca celkom presne. Stačilo zobrať nejaký už vynájdený prístroj na meranie uhlov, napríklad kvadrant alebo astrolábium. Precízna technika sa však zvykne vyznačovať slabou odolnosťou voči stroskotaniu, takže Robinson s Piatkom zrejme nič také nemajú, no a žeby ľudožrúti používali zvyšné kosti z obeda na zostrojovanie astronomických pomôcok sa takisto nedá očakávať. Lenže zemský polomer v skutočnosti šlo odmerať už v staroveku, a s trochou dôvtipu mohol niektoré z navrhnutých metód použiť aj praveký človek.

[2] Prečo? No lebo trecia sila dosiahla svoje maximum a teda pri väčšom naklonení skaly by už sily nedokázali byť v rovnováhe.

Máme more aj Slnko

Ak máme aj more, aj Slnko (a povedzme, že existuje dôvodný predpoklad, že Robinson a Piatok oboje mali), dá sa vymyslieť všeličo. Jedna elegantná metóda vyzerá takto: posadíme Piatka na západný breh ostrova tak, aby mal oči tesne nad hladinou, a Robinsona pošleme na blízky kopec známej výšky. Výškový rozdiel h nie je ťažké odmerať – medzi obomi bodmi napneme špagát a odmeriame pásmom, akú výšku prekonal na dĺžke jedného metra. Keď zmeriame celkovú dĺžku špagáta, trojčlenkou ľahko zistíme, o koľko vyššie sú Robinsonove oči. Potom stačí počkať na západ Slnka. Ako taký západ vyzerá? Zem sa postupne otáča a unáša body na svojom povrchu smerom do tieňa. Táto hranica medzi svetlom a tieňom sa odborne nazýva *terminátor*.



Obrázok 3: *Metóda západu Slnka*

Piatkovi slnko zapadne v momente, keď jeho hlava prejde terminátorom, sváko Robinson ho však z kopca bude vidieť až do chvíle, keď terminátorom prejde jeho horizont. Kopec samozrejme musí byť buď dosť strmý na to, aby sme mohli vodorovnú vzdialenosť zanedbať, alebo by mal byť kolmo vzhľadom na Slnko od miesta, kde sedí Piatok. Z časového rozdielu západov Slnka t vieme zistiť uhol α medzi horizontami oboch experimentátorov meraný od stredu Zeme. Stačí zobrať pomer

$$\frac{t}{\text{jeden deň}} = \frac{\alpha}{2\pi\ (\text{čiže } 360°)}.$$

Robinson teda vie, že za čas t sa Zem otočí o toľko, ako ďaleko dovidí z výšky h. Túto vzdialenosť síce nepoznáme, ale z obrázka vieme určiť, že

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+h},$$

odkiaľ úpravami dostaneme

$$R = h\cdot\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = h\cdot\frac{\cos\left(2\pi\cdot\frac{t}{86\,400\,\mathrm{s}}\right)}{1-\cos\left(2\pi\cdot\frac{t}{86\,400\,\mathrm{s}}\right)}.$$

Ostáva nám ale ešte spomenúť jednu vec: celý čas sme predpokladali, že Slnko zapadá do mora kolmo. To nemusí byť vždy pravda, našťastie Piatok s Robinsonom sú dostatočne blízko rovníka, takže im to príliš veľkú chybu nevyrobí (a keby aj, meraním rozdielu polohy prvého a posledného kontaktu Slnka s horizontom sa to dá opraviť, rozmyslite si ako).

Pre porovnanie s realitou: ak by Robinson vyliezol na stometrový kopec, jeho horizont bude vzdialený približne 36 km, čo je asi tretina stupňa zemepisnej šírky alebo $\frac{1}{3\cdot 360} = \frac{1}{1080}$ obvodu Zeme. Slnko by mal teda vidieť približne o minútu a štvrť dlhšie, než Piatok. Pri takomto výškovom rozdieli je skutočne možné zemský polomer odmerať veľmi presne aj bez stopiek.

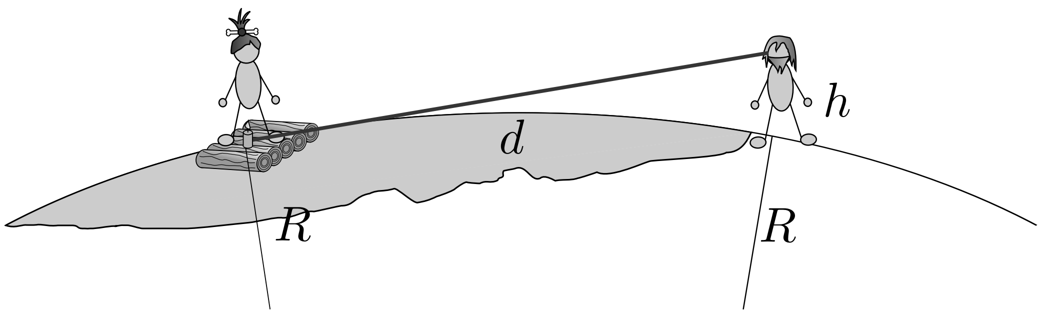
More máme, ale je zamračené

Teoreticky to spravíme takto: počkáme na pokojnú hladinu, Piatka večer posadíme na kanoe a pošleme ho, nech vesluje, až kým nezmizne Robinsonovi, stojacemu na brehu, z dohľadu. Zo zakrivenia Zeme by sme potom mali vedieť určiť aj jej polomer.

Pravda, musíme vyriešiť zopár technických detailov. Napríklad je ťažké presne určiť, či ešte kanoe stále vidíme. Preto pribalíme Piatkovi sviečku. V noci budeme vedieť presne povedať, či ju ešte vidíme, alebo už nie.

Rovnako by sme potrebovali poznať presnú výšku sviečky nad hladinou a tiež výšku Robinsonových očí, tie však vieme odmerať alebo nastaviť, ako potrebujeme. Tak napríklad sviečku umiestnime na kanoe presne dva metre nad hladinu, a Robinson si sadne do vody tak, aby mal oči tesne nad hladinou. Alebo miesto kanoe použijeme placatú plťku[3], sviečku dáme niekam do stredu a Robinson sa postaví tak, aby mal oči v známej výške nad hladinou. Dva metre sú fajn, jeho horizont je potom v realistickej vzdialenosti 5,1 km.

Samozrejme, nestačí vedieť, kedy svetielko zmizlo, ale musíme poznať presnú vzdialenosť loďky od brehu. Tu je však pomoc ľahká… kanoe priviažeme na dlhý motúz a zaznačíme si, koľko z neho sa odvinulo. Ak by sme náhodou nenašli dostatočne dlhý motúz, môžeme to urobiť ešte inakšie, aj keď za cenu podstatne nižšej presnosti. Môžeme použiť napríklad dve pušky (každému dáme jednu). Keď svetielko zmizne, Robinson vystrelí zo svojej. Keď Piatok začuje výstrel, odpovie mu rovnako, a zo známeho oneskorenia spočítame vzdialenosť ako $d = v\Delta t/2$.



Obrázok 4: *Metóda s kanoe*

Mohli by sme namietnuť, že Robinson s Piatkom možno nepoznajú rýchlosť zvuku. Než by sa však stihli zase do krvi pohádať a odplašiť aj zvyšok ostrovnej fauny, prezradíme im, že si ju môžu odmerať. Stačí rovnaký experiment vykonať na súši, kde si vzdialenosť môžu odkrokovať alebo odmerať pásmom.

Keď už poznáme vzdialenosť k horizontu d, polomer dopočítame z Pytagorovej vety

$$(R + h)^2 = R^2 + d^2.$$

Toto si rozpíšeme a malý člen h^2 zanedbáme (lebo h je omnoho menšie, než R), ostane nám

$$R = \frac{d^2}{2h}.$$

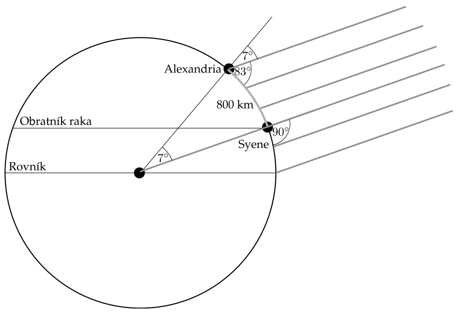
Nemáme more, ale je jasno

Meranie sa dá úspešne vykonať aj vtedy, keď more nemáme (alebo je hrozne rozbúrené). Známym príkladom už zo staroveku je metóda, ktorú vyhútal strýco menom Eratostenes: všimol si, že v meste Syene (dnešný

[3] Nevieš, čo je plťka? https://www.youtube.com/watch?v=R2zo02pxY4U

Asuán v Egypte) majú studňu, do ktorej v deň letného slnovratu Slnko svieti zvislo zhora. V Alexandrii, ktorá je o niečo severnejšie, to už však nešlo – Slnko nikdy na oblohe nevystúpilo až do zenitu. Eratostenes si uvedomil, že ak presne odmeria poludníkovú vzdialenosť medzi týmito dvomi mestami a uhly, pod ktorými Slnko vrhá tiene na poludnie v rovnaký deň, bude vedieť zistiť, aký je jej obvod a teda aj polomer.

Takže sa pokúsime Eratostenovu metódu aplikovať v malej škále, zato s trochu lepšou presnosťou, aká sa dala dosiahnuť so studňou. Najprv potrebujeme zistiť, ktorým smerom je sever. To je ľahké, stačí nám nájsť Polárku alebo odmerať azimut východu a západu Slnka a nájsť stred medzi nimi. Potom niektorou zo spomenutých metód odmeriame čo najväčšiu vzdialenosť v tomto smere – povedzme, že dvadsať kilometrov zvládneme a ešte nevybehneme z ostrova. Pravdaže, tieto dve miesta nemusia ležať presne na poludníku, dôležitá je iba ich vzájomná severo-južná vzdialenosť.



Obrázok 5: *Eratostenova metóda*

Následne na každom z týchto miest zavesíme olovnicu a počkáme, kým Slnko vystúpi na najvyšší bod svojej zdanlivej dráhy, čiže na poludnie. Vtedy odmeriame dĺžku tieňa olovnice a z nej zistíme uhlovú výšku Slnka nad obzorom na oboch miestach, β_1 a β_2. Najlepšie bude, ak každý pôjde na iné miesto a meranie vykonajú v ten istý deň, keďže výška Slnka nad obzorom je v rôzne dni rôzna. Teraz nám bude stačiť jednoduchá úvaha: poznáme rozdiel uhlov $\beta_1 - \beta_2$ a vieme, akej skutočnej vzdialenosti zodpovedá. Trojčlenkou ľahko získame obvod Zeme a delením 2π dostaneme jej polomer.

Nemáme ani more, ani Slnko

Tu to už začína byť náročné. Ak je jasná noc, môžeme spraviť niečo podobné, ako v minulom prípade: miesto Slnka použijeme niektorú hviezdu a namiesto tieňa budeme sledovať jej vzdialenosť od vodorovnej roviny pri jej dolnej kulminácii[4].

Na určenie vodorovnej roviny nám bude stačiť mištička s vodou. Sextant síce nemáme, ale ak sa zvolená hviezda približuje dosť blízko k horizontu, Piatok môže napríklad použiť svoju obľúbenú kľúčnu kosť z portugalského námorníka, ktorý kedysi stroskotal na vedľajšom ostrove.[5] Ak ju bude držať v natiahnutej ruke, pomocou pásma a jednoduchej trigonometrie môže zistiť, aký uhol mu zaberá v zornom poli.

Alebo opäť použijeme olovnicu – Robinson si pod ňu ľahne tak, aby mal oko presne pod závažím. Potom bude už len čakať, kým mu presne ponad hlavu (teda spojnicu špičky olovnice a jej závesu) neprejde nejaká hviezda. Ďalšiu noc sa prejde na druhé vybrané miesto o niečo severnejšie a znovu počká na tú istú hviezdu aj s olovnicou. Teraz by mal vidieť, že hviezda už neprejde zenitom, ale kúsok vedľa. Piatkovou metódou odmeria tento maličký uhol a je vybavený. Uhol síce bude v skutočnosti dosť malý (rádovo jeden stupeň na 111 kilometrov), ale ak bude olovnica dosť dlhá, meranie by malo vyjsť. Pravda, presnosť bude pomerne nízka.

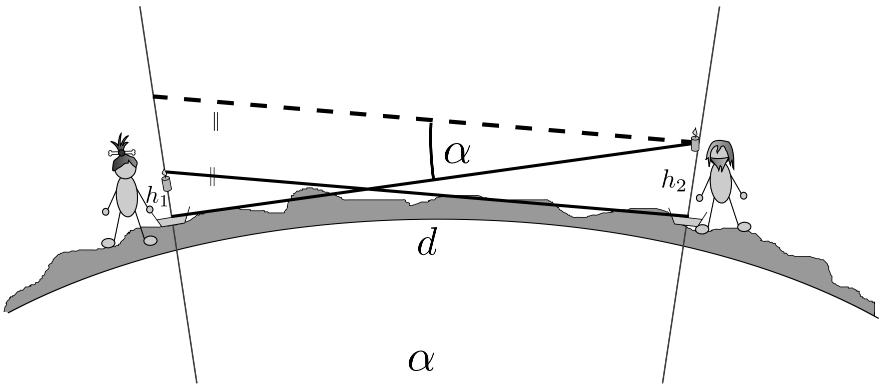
[4]To je okamih, keď je hviezda najnižšie nad obzorom, na severnej pologuli to nutne nastáva presne na severe.
[5]Takže napriek tomu, čo sme si povedali v úvode, si ľudožrúti predsa len astronomické pomôcky vyrábajú ;-)

Nemáme ani hviezdy

Čo však robiť, ak je zamračená noc a more je veľmi rozbúrené? Prvou odpoveďou môže byť aj „sadnúť si na najbližší placatý kameň a plakať", lebo tu už to naozaj jednoduché nebude. Druhá odpoveď však bude, že sa to stále dá, aj keď presnosť nebude veľmi veľká.

Vyjdeme z toho, že aj keď nemáme nejaký globálny horizont, stále vieme určiť vodorovnú rovinu lokálne, napríklad pomocou misky s vodou. Piatok aj Robinson si zoberú každý jednu misku a odídu každý na iné miesto – tak, aby sa navzájom videli a aby ich nadmorské výšky boli aspoň približne rovnaké. Dobre poslúži dlhé piesčité pobrežie alebo dve úbočia nejakej širokej doliny. Pred začiatkom experimentu ešte niektorým z vyššie popísaných spôsobov určia svoju vzájomnú vzdialenosť. Potom každý u seba postaví malú vežičku (ak budú od seba povedzme 4 km, bude stačiť asi dvojmetrový kolík).

Robinson postaví svoju misku na zem a naleje do nej vodu až po okraj. Tým určí dotyčnú rovinu k Zemi. Potom priloží oko alebo ďalekohľad k hladine tak, aby videl iba to, čo sa deje nad ňou a dá signál Piatkovi (napríklad výstrelom z pušky, alebo odpáli trochu pušného prachu…). Piatok začne veľmi pomaly spúšťať sviečku z vrchola svojej vežičky. Keď sviečka Robinsonovi zmizne z dohľadu, znovu vystrelí z pušky a Piatok si urobí na svojom stĺpe značku. Potom to isté vykonajú aj v opačnom smere a dostanú situáciu ako na obrázku:



Obrázok 6: *Keď všetko ostatné zlyhá...*

Odtiaľ im stačí vyjadriť súčet výšok h_1 a h_2, a už by sme mali vidieť, že v priblížení malých uhlov platí

$$\frac{h_1 + h_2}{d} = \tan\alpha \approx \alpha.$$

No a z α a d už polomer R získame rovnako ako vyššie trojčlenkou.

1.3 Čaj o piatej

vzorák **Jaro**, opravovala **Natália**

Je nádherný jarný deň a Maťo sa rozhodne, ako sa na správneho Angličana patrí, uvariť si tradičný čaj o piatej. Zaleje si svoj obľúbený Earl Grey vodou z čajníka a pustí sa naspäť do študovania umelej inteligencie. Keď sa o chvíľku pozrie na svoju obľúbenú šálku s vytúženým čajom, zistí, že z čaju mu viditeľne ubudlo. Prečo sa tak stalo?[6]

Vieme, že Maťo si zalial svoj obľúbený čaj, a potom sa pustil do študovania. Od tohto momentu nikto s čajom nemanipuloval, tak sa zamyslime nad tým, čo sa s ním mohlo stať. Hneď prvá vec, ktorá nám intuitívne napadne, je, že čaj bude postupne chladnúť. Akosi tušíme, že tu by mohol byť pes zakopaný, tak sa pozrime na to, čo sa s čajom pri chladnutí deje. No tak najpodstatnejší je fakt, že čaj musí strácať teplo. To sa deje tromi spôsobmi:

[6] Nie, nie je tam žiaden drzý prísediaci, ktorý by využil chvíľku nepozornosti a z čaju odpil.

- tepelnou výmenou s okolím;
- vyžarovaním v podobe EM vĺn;
- vyparovaním.

V prvých dvoch prípadoch sa množstvo čaju[7] nemení, v treťom evidentne z čaju unikajú molekuly vody, takže množstvo čaju klesá. Mohlo by sa zdať, že za úbytok čaju je zodpovedné výlučne vyparovanie, ale nezavrhujme ešte ani prvé dva spôsoby. To, čo Maťo pozoroval, bol predsa úbytok na objeme a nie na hmotnosti.

Ale ako sa môže meniť objem, keď sa nemení hmotnosť látky? Jednoducho. Musí sa zmeniť jej hustota. Teplota vlastne odzrkadľuje pohyb častíc látky. Čím je voda teplejšia, tým sa jej molekuly pohybujú rýchlejšie a sú ďalej od seba. Preto, keď voda chladne, pohyb molekúl sa spomaľuje a molekuly sa dostanú bližšie k sebe, čo sa prejaví makroskopickým zmenšením objemu vody.

Odhalili sme teda dva mechanizmy, ktoré stoja za úbytkom čaju – vyparovanie a teplotná rozťažnosť. Pokúsme sa určiť, ktorý z nich je dominantný. V nasledujúcich úvahách budeme predpokladať, že vždy prebieha len jeden z nich.

Pozrime sa najskôr na teplotnú rozťažnosť. Uvažujme, že Maťo zalial čaj vodou s objemom $V = 2\,\mathrm{dl}$ a teplotou $T = 373{,}15\,\mathrm{K}$. Odhadnime, ako sa zmenil objem, ak teplota čaju poklesla o ΔT. Pri malých teplotných zmenách možno uvažovať lineárnu závislosť objemu na teplote, teda

$$\Delta V \approx \alpha V \Delta T,$$

kde α je súčiniteľ teplotnej rozťažnosti vody. Jeho presnú hodnotu možno vyhľadať v tabuľkách. Nám vystačí rádový odhad $\alpha \approx 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K^{-1}}$. V takom prípade $\Delta V \approx 4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m^3K^{-1}} \cdot \Delta T$, čiže ak teplota poklesne napríklad o $\Delta T = 25\,\mathrm{K}$, objem čaju poklesne o $\Delta V \approx 1\,\mathrm{ml}$, čo vyzerá ako celkom rozumná hodnota.[8]

Zamerajme sa teraz výlučne na vyparovanie. Molekuly vody na seba navzájom silovo pôsobia. Ak by chcela niektorá z molekúl opustiť kvapalinu, musela by mať dostatočnú energiu na prekonanie príťažlivých síl a k tomu ešte správny smer pohybu a byť dostatočne blízko k hladine. K tomu naozaj dochádza a vtedy hovoríme o vyparovaní. Čo z toho pre nás vyplýva? Predovšetkým to, že takýmto spôsobom unikajú molekuly s najvyššou energiou a ako sme už uviedli, energia molekúl zodpovedá teplote, takže keď unikajú molekuly s najvyššou energiou, tak teplota vody klesá. Toto je však úloha pre molekulovú a štatistickú fyziku, čo presahuje naše znalosti.

Otázka preto znie, či by sa to nedalo zrátať jednoduchšie. A skutočne, dalo. Stačí sa pozrieť na makroskopický popis problému. Ak teplota klesne o ΔT, kvapalina odovzdá teplo $Q = mc\Delta T$. Merná tepelná kapacita je funkciou teploty, ale pre malý teplotný rozdiel ju možno považovať za konštantu. Opäť jej presnú hodnotu pre vodu pre danú teplotu možno vyhľadať v tabuľkách, no my si vystačíme s približnou hodnotou $c \approx 4{,}2 \cdot 10^3\,\mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$. Na vyparenie vody s hmotnosťou m je potrebné teplo $L = ml$, kde l je merné skupenské teplo vyparovania a taktiež je funkciou teploty. Nám však ide iba o rádový odhad, takže stačí zobrať iba približnú hodnotu pre vodu $l \approx 2{,}2 \cdot 10^6\,\mathrm{Jkg^{-1}}$ pri teplote $T = 373{,}15\,\mathrm{K}$.

Nech sa teda vyparí voda s objemom ΔV. Na to je potrebné teplo $L \approx \rho \Delta V l$. Toto teplo pochádza z poklesu teploty zvyšného objemu vody. Ak jej teplota klesla o ΔT, tak sa takýmto spôsobom uvoľnilo $Q \approx \rho\,(V - \Delta V)\,c\Delta T$. Dajme do rovnosti tieto dve hodnoty a dostaneme

$$\Delta V \approx \frac{Vc\Delta T}{l + c\Delta T}.$$

[7] látkové množstvo, hmotnosť

[8] Experimentálne to vieme overiť tak, že by sme šálku naplnili takmer až po okraj a ihneď po zaliatí čaju prikryli povedzme tanierikom, aby pary nemohli unikať. Tým pádom vieme, že zmena objemu bola spôsobená len teplotnou rozťažnosťou.

Merná tepelná kapacita vody je asi 500-krát menšia než merné skupenské teplo vyparovania. Rozumné teplotné rozdiely dosahujú maximálne nejakých 50 K.[9] To ale znamená, že výraz $c\Delta T$ je rádovo menší než l, a teda ho možno zanedbať. Dostávame $\Delta V \approx \frac{Vc\Delta T}{l}$.

Vyčíslime, v akom pomere sú zmeny objemu spôsobené teplotnou rozťažnosťou k zmenám objemu spôsobeným vyparovaním

$$\frac{\Delta V_{\text{rozťažnosť}}}{\Delta V_{\text{vyparovanie}}} \approx \frac{V\alpha\Delta T}{\frac{Vc\Delta T}{l}} = \frac{\alpha l}{c} \approx \frac{2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{K^{-1}}\cdot 2{,}2\cdot 10^{6}\,\mathrm{Jkg^{-1}}}{4{,}2\cdot 10^{3}\,\mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}} \approx 0{,}1.$$

Už sme vypočítali, že vplyvom teplotnej rozťažnosti ubudne asi 1 ml čaju. Na základe práve vykonaných výpočtov by malo vplyvom vyparovania ubudnúť približne 10-krát viac. No nezabúdajme na to, že tieto výpočty boli vykonané na základe predpokladu, že teplo sa stráca výlučne vyparovaním, resp. spoločne tepelnou výmenou a vyžiarením ale bez vyparovania, teda ide o horné odhady. Pokojne sa môže stať, že ak sa vyparovaním stratí omnoho menej tepla než zvyšnými spôsobmi dokopy, tak úbytok na objeme vplyvom vyparovania môže byť dokonca menší než vplyvom teplotnej rozťažnosti. To na základe našich výpočtov s určitosťou povedať nevieme.

V tomto momente s našimi úvahami skončíme, pretože v podrobnejšom skúmaní nám bráni náš nedostatočný matematický aparát. Uzavrieme to s tým, že na zmene objemu sa podieľajú oba javy - vyparovanie i teplotná rozťažnosť. Oba sa nám podarilo kvantifikovať. Avšak na to, aby sme vedeli urobiť predikciu, o koľko sa zmenší objem vplyvom vyparovania a o koľko vplyvom rozťažnosti, museli by sme poznať pomer, v akom sa stráca teplo vplyvom vyparovania k zvyšným spôsobom. Tento pomer, žiaľ, nevieme nijako jednoducho vypočítať.[10]

A ako ste za túto úlohu mohli získať veľa bodov? Bolo si treba uvedomiť, že vyparovanie nie je jediný jav zodpovedný za zmenu objemu a zamyslieť sa nad tým, do akej miery sa jednotlivé mechanizmy prejavujú.

1.4 Nezávideniahodná hovadina

vzorák **Zuzka**, opravovala **Zuzka**

Po pálení múky a ohadzovaní sa cestom dostali FKSáci ďalší bláznivý nápad na najbližšie letné sústredenie – miešanie octu so sódou. Zmiešame dva decilitre octu s určitým množstvom sódy. Kedy to urobí najväčší neporiadok? No predsa vtedy, keď sa uvoľní čo najviac plynu. Pomôžte FKS vedúcim zistiť,[11] aký objem plynu vznikne pri reakcii octu so sódou v závislosti od množstva sódy. Pokúste sa aj teoreticky odhadnúť objem uvoľneného plynu na základe vlastného modelu.

Našou úlohou je zmerať objem uvoľneného plynu pri reakcii nejakého množstva sódy s dvoma decilitrami octu. Poďme sa najprv pozrieť na to, aké reakcie budú v našej sústave prebiehať (lebo teoretický model, pokiaľ máme kapacity na to, aby sme ho spravili, všeobecne vôbec nie je od veci).[12]

Teória

Obyčajný kuchynský ocot je osempercentným (a podľa údajov na obale sa tým zjavne myslia objemové percentá) vodným roztokom kyseliny octovej. Okrem toho je tam ešte nejaké smiešne množstvo konzervantu a farbiva, ale to môžeme zanedbať. Sóda, teda hydrogénuhličitan sodný bude reagovať s kyselinou octovou, avšak môže reagovať aj s vodou. V našej sústave budú teda prebiehať dve reakcie

$$\mathrm{NaHCO_3(s) + H_2O(l) \longrightarrow Na^+(aq) + H_2O(l) + HCO_3^-(aq)},$$
$$\mathrm{NaHCO_3(aq) + CH_3COOH(aq) \longrightarrow Na^+(aq) + CH_3COO^-(aq) + H_2O(l) + CO_2(g)}.$$

[9] Maťo predsa nebude piť studený čaj.

[10] Ak by ste chceli predsa len vedieť, do akej miery je za pokles objemu zodpovedné vyparovanie a teplotná rozťažnosť, môžete to vyskúšať zmerať experimentálne. Nevylučujeme, že nejaká takáto úloha sa môže vyskytnúť v niektorej z nasledujúcich sérií.

[11] Či experimentálku budete riešiť alebo nie, to, či sa táto hlúposť objaví na ďalšom sústredku, to neovplyvní :)

[12] Samozrejme, nevyžadovali sme to takto presne od vás, stačilo spraviť zopár odhadov.

V podstate ide o to, že sóda sa rozpustí na ióny a hydrogénuhličitanový anión sa účinkom kyseliny octovej rozkladá na oxid uhličitý a vodu. Ako vidíme, reakcie sú to celkom jednoduché, dokonca ani stechiometrické koeficienty nebudú robiť problémy, keďže sú všetky rovné jednej.

Na to, aby sme z týchto rovníc vedeli niečo rozumné vyrátať, si najprv potrebujeme zistiť zopár konštánt.

- Mólová hmotnosť sódy: $M(\mathrm{NaHCO_3}) = 84{,}01\,\mathrm{gmol^{-1}}$
- Mólová hmotnosť kyseliny octovej: $M(\mathrm{CH_3COOH}) = 60{,}05\,\mathrm{gmol^{-1}}$
- Mólová hmotnosť vody: $M(\mathrm{H_2O}) = 18{,}02\,\mathrm{gmol^{-1}}$
- Mólová hmotnosť oxidu uhličitého: $M(\mathrm{CO_2}) = 44{,}01\,\mathrm{gmol^{-1}}$
- Hustota oxidu uhličitého pri 20 °C a 104 658 Pa: $\rho(\mathrm{CO_2}) = 1{,}902 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{gcm^{-3}}$[13]
- Hustota kyseliny octovej: $\rho(\mathrm{CH_3COOH}) = 1{,}049\,\mathrm{gcm^{-3}}$
- Hustota vody pri 20 °C: $\rho(\mathrm{H_2O}) = 0{,}998\,\mathrm{gcm^{-3}}$

Máme obmedzené množstvo octu, to znamená, že existuje nejaké maximálne množstvo sódy, ktoré tam môžeme nasypať, a ktoré ešte bude mať s čím zreagovať. Poďme si to najprv spočítať:

Chemické rovnice prebiehajúcich reakcií nám v podstate hovoria to, že na každý zreagovaný mól kyseliny octovej vznikne jeden mól oxidu uhličitého. Teda platí

$$n(\mathrm{CH_3COOH}) = n(\mathrm{CO_2}).$$

Látkové množstvo kyseliny octovej vieme spočítať z údajov o objeme a zložení octu:

$$n(\mathrm{CH_3COOH}) = \frac{200\,\mathrm{cm^3} \cdot 0{,}08 \cdot 1{,}049\,\mathrm{gcm^{-3}}}{60{,}05\,\mathrm{gmol^{-1}}} \doteq 0{,}28\,\mathrm{mol}.$$

Teda maximálne látkové množstvo vzniknutého oxidu uhličitého je 0,28 mol. Objem vzniknutého oxidu uhličitého bude teda rovný

$$V(\mathrm{CO_2}) = \frac{n(\mathrm{CO_2}) \cdot M(\mathrm{CO_2})}{\rho(\mathrm{CO_2})} = \frac{0{,}28\,\mathrm{mol} \cdot 44{,}01\,\mathrm{gmol^{-1}}}{1{,}902 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{gcm^{-3}}} \doteq 6\ 479\,\mathrm{cm^3}.$$

Jeden pohár octu má potenciál viac ako šesť litrov oxidu uhličitého. Na takéto množstvo potrebujeme $n(\mathrm{CO_2}) \cdot M(\mathrm{NaHCO_3}) = 0{,}28\,\mathrm{mol} \cdot 84{,}01\,\mathrm{gmol^{-1}} \doteq 23{,}5\,\mathrm{g}$ sódy. Teda vieme, že viac sódy tam nemá zmysel sypať. Teraz vyjadríme závislosť objemu oxidu uhličitého od hmotnosti zreagovanej sódy a máme, čo sme chceli:[14]

$$V(\mathrm{CO_2}) = \frac{\frac{m(\mathrm{NaHCO_3})}{M(\mathrm{NaHCO_3})} \cdot M(\mathrm{CO_2})}{\rho(\mathrm{CO_2})} \doteq m(\mathrm{NaHCO_3}) \cdot 275\,\mathrm{cm^3g^{-1}}$$

Na každý gram sódy sa nám majú uvoľniť takmer tri deci oxidu uhličitého.

[13] Použila som obyčajný izbový barometer, teplomer a http://www.peacesoftware.de/einigewerte/co2_e.html

[14] Z chemických rovníc je zrejmé, že podobne ako pre kyselinu octovú aj pre sódu platí, že na každý mól sódy sa uvoľní jeden mól oxidu uhličitého, teda látkové množstvo dodanej sódy je rovné látkovému množstvu uvoľneného oxidu uhličitého. Platia vzťahy:

$$V(\mathrm{CO_2}) = \frac{n(\mathrm{CO_2}) \cdot M(\mathrm{CO_2})}{\rho(\mathrm{CO_2})},$$

$$n(\mathrm{CO_2}) = n(\mathrm{NaHCO_3}) = \frac{m(\mathrm{NaHCO_3})}{M(\mathrm{NaHCO_3})}.$$

Meranie

Tak a teraz k meraniu[15]. Spôsobov ako to merať je viacero, my uvedieme jeden z nich.

Použili sme fľašu naplnenú vodou obrátenú hore dnom vo vedre s vodou, do ktorej sme zaviedli hadičku z fľaše, v ktorej by mala prebiehať reakcia. Pri tejto metóde si treba dať pozor na vzduchotesnosť aparatúry, čo môže byť v domácich podmienkach trochu ošemetné, ale všetko sa dá vyriešiť.[16] V reakčnej fľaši sme zmiešali dva decilitre octu s daným množstvom sódy, rýchlo fľašu zavreli vzduchotesným uzáverom s hadicou a sledovali, ako oxid uhličitý buble do fľaše vo vedre, kým reakcia neprestala bežať. V tomto kroku sme museli byť trpezliví a reakčnú zmes občas aj trochu pomiešať. Potom sme vyrovnali hladiny vody vo vedre a v ponorenej fľaši, čím sme vyrovnali tlaky. Keby sme tak neurobili, plyn by zostal stlačený a celé meranie by sme tým pokazili. Zaujíma nás predsa objem pri atmosferickom tlaku. Vytiahli sme fľašu tak, aby z nej nevytiekla voda a odmerali sme, aký objem vody treba doliať do fľaše (teda aký objem vody nám oxid uhličitý vytlačil). To sa dalo urobiť napríklad tak, že odvážime fľašu po meraní a fľašu plnú vody.

Obrázok 7: *naša aparatúra*

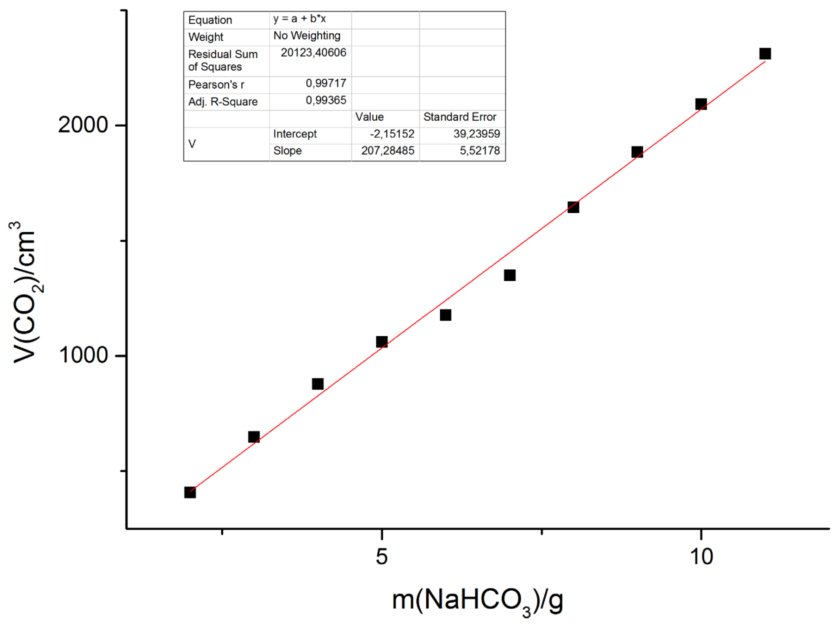
Obrázok 8: *reakčná fľaša*

[15]To je to, čo sme od vás už vyžadovali poriadne.
[16]Múdrosti starej matere kapitola 1. – domáce destilačky sa vždy izolovali cestom.

Meranie	$m(NaHCO_3)$ [g]	$V(CO_2)$ [cm^3]
1.	2	407
2.	3	648
3.	4	878
4.	5	1060
5.	6	1177
6.	7	1350
7.	8	1645
8.	9	1884
9.	10	2092
10.	11	2311

Tabuľka 1: *Objem uvoľneného oxidu uhličitého v závislosti od hmotnosti hydrogénuhličitanu sodného*

Meranie sme spravili pre desať rôznych hmotností sódy. Samozrejme, meranie pre každú hmotnosť sa patrí viackrát zopakovať, aby sme získali presnejšie výsledky. My sme tak neurobili, ale dúfame, že vy áno ;) Výsledky sme spracovali v softvéri OriginLab. Existuje kopa ďalších, Excel, Calc, Gnuplot… Môžete si vybrať.



Obrázok 9: *graf k tabuľke*

Vidíme, že merania sa správajú približne podľa nášho teoretického modelu. Keby sme mali desaťlitrovú fľašu, tak by sme videli, že od 23,5 g sódy by sa už objem nezvyšoval.

Na záver, ako zvyčajne, sa treba zamyslieť nad zdrojmi nepresností merania. Meranou veličinou bola hmotnosť, ktorá k chybe merania veľmi neprispieva, ak hovoríme o meraní hmotnosti fľaše pred a po pokuse. Avšak pri meraní hmotnosti sódy pred nasypaním do reakčnej fľaše môže byť rozdiel signifikantný, nakoľko naša váha meria s presnosťou na 1 g a hmotnosť použitej sódy pri jednotlivých meraniach je tiež rádovo v gramoch, pričom veľké množstvá sódy by ani nemalo zmysel používať, lebo by celá nezreagovala.

Ďalším veľkým zdrojom nepresností je únik vzniknutého plynu. Či chceme, či nie, sódu musíme do octu nejako nasypať, teda je potrebná interakcia zvonka a až potom sa môže reakčná sústava uzavrieť (aj tak je vysoko možné, že v domácich podmienkach sústava veľmi vzduchotesná nebude). Bohužiaľ, práve na začiatku reakcie je jej rýchlosť najväčšia a vznikne naraz najviac oxidu uhličitého, teda nám určite nejaký stihne uniknúť, kým sústavu uzavrieme.

Potom sa ešte môže stať, že pri vyťahovaní fľaše z vedra po skončení reakcie sa z nej vyleje nejaká tá voda, resp. zanedbávame objem hadice vo fľaši.

To by bolo asi tak všetko. Čo sa toho najväčšieho bordelu týka, veľmi mu napomáha aj rýchlosť reakcie. Čím vyššia, tým lepšie. Teda keď chceme mať celú kuchyňu od octu, treba sa uistiť, že maximalizujeme povrchový kontakt sódy s octom. Pomôže napríklad to, že sypeme sódu do octu a nie naopak, a snažíme sa sódu čo najviac rozprášiť. Keď k tomu pridáme veľa sódy naraz, výsledkom je poriadny bordel a niekoľkohodinová čuchová apokalypsa.

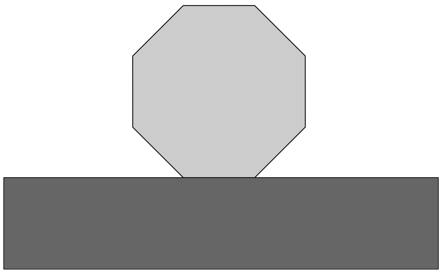
1.5 Kajkin model trenia

vzorák **Jaro**, opravoval **Jaro**

Kajka sa na poslednom sústredku dozvedela, že trenie je vlastne to, čo umožňuje ísť okrúhlym veciam vpred. Doma si to chcela otestovať, a tak vzala valček polomeru R zo stavebnice, nechala ho kotúľať a na oštaru zistila, že spomaľuje.

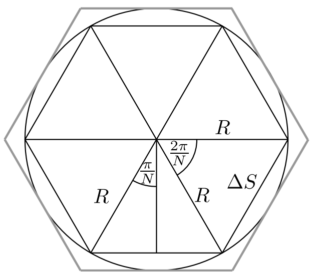
Keďže Kajka je motivovaná, rozhodla sa preraziť na poli teoretickej fyziky a prišla s vlastným modelom valivého trenia. Predstavila si, že ten valček je vlastne hranol s podstavou pravidelného N-uholníka a vypočítala, koľko energie sa stratí pri prevaľovaní cez hrany. Pre jednoduchosť si povedala, že pri prevalení cez hranu sa po dopade hranola na podložku všetka energia potrebná na prevalenie premení na teplo.

Aký by musel byť koeficient šmykového trenia pri šmýkaní kvádra rovnakej hmotnosti o podložku, aby spomaľoval rovnako ako Kajkin hranol? Bude tento model trenia fungovať aj pre nekonečné N?



Obrázok 10: *Kajkin hranol*

V prvom rade sa musíme rozhodnúť, ako aproximujeme valec hranolom. Hranol môžeme vpísať do valca, môžeme ho opísať valcu, no môžeme si vybrať aj ľubovoľnú polohu z intervalu týchto dvoch krajných polôh. Vo vzoráku budeme detailne skúmať prípad, keď hranol do valca vpíšeme, a potom len stručne uvedieme, aké výsledky by sme dostali, keby sme mu ho opísali. Ale poďme pekne po poriadku.



Obrázok 11: *schematický nákres*

Najskôr si vypočítajme, akú energiu spotrebujeme pri prevalení hranola cez hranu. Uvažujme hranol s podstavou pravidelného N-uholníka. Rozdeľme si hranol na N zhodných trojbokých hranolov, ktorých podstavami sú rovnoramenné trojuholníky s uhlom oproti základni veľkosti $\frac{2\pi}{N}$ a ramenami dĺžky R. Keď hranol leží na podložke, jeho ťažisko je vo výške $R\cos\frac{\pi}{N}$ nad podložkou. Pri prevaľovaní sa dostane do maximálnej výšky R, preto je na prevalenie potrebná energia aspoň

$$\Delta E = MgR\left(1-\cos\frac{\pi}{N}\right).$$

Po každom prevalení hranol stratí túto energiu (podľa zadania sa všetka premení na teplo). Ak hranol nemá túto energiu, už sa ďalej nemôže prevaľovať a spadne späť, kde zostane stáť.[17] Pri každom prevalení sa hranol posunie ďalej o dĺžku základne trojuholníka

$$\Delta s = 2R\sin\frac{\pi}{N}.$$

Zodpovedzme najskôr otázku, či tento model funguje aj pre nekonečné N. Jednému otočeniu valca zodpovedá N prevalení, a preto sa spotrebuje celková energia

$$N\Delta E = NMgR\left(1-\cos\frac{\pi}{N}\right)\Big|_{N\to\infty} = MgR\lim_{N\to\infty}\frac{\pi^2}{2N} = 0.$$

[18]Vidíme, že v limitnom prechode, keď N ide do nekonečna, sa pri jednom otočení valca nespotrebuje žiadna energia, a teda valec nebude spomaľovať. To znamená, že musíme uvažovať nejaké konkrétne, dostatočne veľké, no konečné N, aby sme hranolom dostatočne presne aproximovali valec, no zároveň, aby model trenia ešte stále fungoval.

Udeľme valcu rýchlosť v_0. To znamená, že má energiu

$$E_0 = E_k + E_r = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}\left(M+\frac{J}{R^2}\right)v_0^2,$$

kde J je moment zotrvačnosti hranola. Pre dostatočne veľké N možno uvažovať, že sa len málo líši od valca, a teda možno položiť $J \approx \frac{1}{2}MR^2$.[19]

Nech má teda valec energiu E_0. To znamená, že dôjde k $\left\lfloor\frac{E_0}{\Delta E}\right\rfloor$ prevaleniam a valec pred tým, než zastane, prejde vzdialenosť $s = \left\lfloor\frac{E_0}{\Delta E}\right\rfloor\Delta s$.[20] Dosaďme do tohto vzťahu príslušné výrazy. V priblížení $J\approx\frac{1}{2}MR^2$ dostávame[21]

$$s = \left\lfloor\frac{\frac{3}{4}Mv_0^2}{MgR\left(1-\cos\frac{\pi}{N}\right)}\right\rfloor 2R\sin\frac{\pi}{N} \approx \frac{\frac{3}{4}v_0^2}{gR\frac{\pi^2}{2N^2}}2R\frac{\pi}{N} = \frac{3N}{\pi}\frac{v_0^2}{g}.$$

Pre záujemcov uveďme aj výsledok, ktorý by sme dostali, keby sme uvažovali exaktný vzťah pre moment zotrvačnosti hranola. S využitím uvedených priblížení by sme dostali $s\approx\left(\frac{3N}{\pi}-\frac{2\pi}{3N}\right)\frac{v_0^2}{g}$.

[17]Poznamenajme ešte, že tento model je veľmi citlivý na sklon podložky a už pri jej sklone $\frac{\pi}{N}$ oproti vodorovnému smeru sa stáva neúčinný, keďže pri prevalení sa v takom prípade ťažisko nedvíha. Uvažujme preto len pohyb po dokonale vodorovnej rovine.

[18]Využili sme približný vzťah $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$ pre malé x, v našom prípade $\cos\frac{\pi}{N}\approx 1-\frac{\pi^2}{2N^2}$. Okrem toho budeme neskôr potrebovať vzťahy $\sin x\approx x$ a $\tan x\approx x$ tiež pre malé x.

[19]Pre tých, čo to zaujíma, uveďme, že moment zotrvačnosti vpísaného hranola je $J=\frac{1}{2}MR^2\left(\cos^2\frac{\pi}{N}+\frac{1}{3}\sin^2\frac{\pi}{N}\right)$ a pre nekonečne malý uhol (nekonečne veľké N) je sínus rovný 0 a kosínus 1, takže naozaj dostávame vzťah pre valec.

[20]$\lfloor x\rfloor$ je dolná celá časť čísla x, teda najväčšie celé číslo menšie, nanajvýš rovné ako x.

[21]Využili sme priblíženia z druhej poznámky k tejto úlohe a to, že pri odstránení dolnej celej časti čísla sme sa dopustili chyby maximálne na úrovni dĺžky hrany hranola, čo je pri veľkom N zanedbateľné vzhľadom na celkovú prejdenú vzdialenosť.

Teraz už len zostáva porovnať tento výsledok s výsledkom pre šmykové trenie. V prípade šmykového trenia je za spomaľovanie zodpovedná konštantná trecia sila veľkosti $F_t = fMg$, teda zrýchlenie má veľkosť $a = fg$. Napíšeme kinematické rovnice pre rovnomerne spomalený pohyb $s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$ a $v = v_0 - at$. Vylúčením času z rovníc dostávame $s = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}$. Zaujíma nás dráha, na ktorej kváder zastane, preto položme $v = 0$ a dostaneme

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2fg}.$$

Porovnajme tento výsledok s výsledkom pre Kajkin model. Dostaneme potom podmienku

$$f \approx \frac{\pi}{6N}$$

ak počítame s momentom zotrvačnosti pre valec,[22]

Uveďme ešte v skratke, čo by sme dostali, keby sme uvažovali aproximáciu hranolom opísaným valcu. Energia potrebná na jedno pretočenie v tomto prípade je $\Delta E = MgR\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{N}} - 1\right)$ a posunutie pri každom prevalení $\Delta s = 2R\tan\frac{\pi}{N}$. V limitnom prechode pre N idúce do nekonečna dostávame energiu potrebnú na jedno otočenie valca $N\Delta E = NMgR\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{N}} - 1\right)\Big|_{N\to\infty} = MgR\lim_{N\to\infty}\frac{N\pi^2}{2N^2-\pi^2} = 0$, čiže opäť dostávame, že ani v tomto prípade Kajkin model nefunguje. V priblížení $J \approx \frac{1}{2}MR^2$ dostávame prejdenú vzdialenosť tak isto $s \approx \frac{3N}{\pi}\frac{v_0^2}{g}$, a teda $f \approx \frac{\pi}{6N}$.[23]

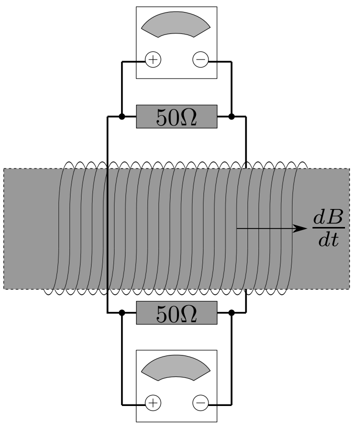
1.6 Večne hravý špekulant

vzorák **Maťo B.**, opravoval **Maťo B.**

Vladko sa na hodine fyziky dozvedel, že ak zoberieme vodič a vytvarujeme ho do uzavretej slučky, tak pokiaľ sa bude meniť tok magnetického poľa prechádzajúci touto slučkou, potom sme schopní odmerať multimetrom indukované elektromotorické napätie na tejto slučke. Vladko je však špekulant a vymyslel nasledujúci pokus.

Zobral cievku s prierezom $20\,\mathrm{cm}^2$, *v ktorej sa zvyšuje magnetické pole rýchlosťou* $2\,\mathrm{mT\,s^{-1}}$. *Následne zobral drôt s celkovým odporom* $100\,\Omega$ *a raz ho obtočil okolo cievky tak, že drôt vytvoril uzavretú slučku. Následne na dve miesta v slučke pripojil dva rovnaké multimetre s obrovským vnútorným odporom podľa obrázka a začal merať indukované napätie na slučke.*

Od vás by chcel vedieť, aké napätia ukážu jednotlivé multimetre. Ako je možné, že multimetre zobrazia takéto hodnoty? Vysvetlite!



Obrázok 12: *Vladkov pokus*

[22] $f \approx \frac{3\pi N}{18N^2 - 4\pi^2}$, ak uvažujeme moment zotrvačnosti pre vpísaný hranol.

[23] Pre fajnšmekrov moment zotrvačnosti opísaného hranola je $J = \frac{1}{2}MR^2\left(1 + \frac{1}{3}\tan^2\frac{\pi}{N}\right)$. V takom prípade $s \approx \left(\frac{3N}{\pi} + \frac{\pi}{3N}\right)\frac{v_0^2}{g}$ a $f \approx \frac{3\pi N}{18N^2 + 2\pi^2}$.

Tento príklad bol ľahší, než na prvý pohľad vyzerá, a preto prvé poučenie je, že sa netreba hneď báť :).

Označme U_1 napätie, ktoré ukáže horný multimeter a U_2 napätie, ktoré ukáže dolný multimeter. Vieme, že keďže sa mení tok magnetického poľa prechádzajúci cez uzavretú slučku obsahujúcu dva odpory, tak sa na tejto slučke bude indukovať elektromotorické napätie vďaka elektromagnetickej indukcii – Faradayovmu zákonu.

Krátky výpočet prezradí, že indukované elektromotorické napätie (až na znamienko!) bude presne

$$U_{\mathrm{induk}} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = S\frac{\partial B}{\partial t} = 4\,\mu\mathrm{V},$$

kde Φ je tok magnetického poľa slučkou.

Slučka, cez ktorú sa mení tok magnetického poľa obsahuje dva odpory s celkovým odporom $R = 100\,\Omega$, a preto hneď vieme, že cez túto slučku bude prechádzať prúd $I = 0{,}04\,\mu\mathrm{A}$. Ak vieme, ktorá ruka je pravá, hravo zistíme, že prúd bude tiecť cez slučku v smere hodinových ručičiek.[24]

Cez slučku obsahujúcu horný multimeter a odpor s veľkosťou $R = 50\,\Omega$ sa nemení tok magnetického poľa a podobne ani cez slučku obsahujúcu iba dolný multimeter a odpor s veľkosťou $R = 50\,\Omega$. Tieto slučky neobsahujú ani žiadny ďalší zdroj elektromotického napätia, ako napríklad batériu, a preto multimetre ukážu presne hodnoty napätia na jednotlivých odporoch. Keďže prúd prechádzajúci cez oba odpory je rovnaký, a rovnaké sú aj odpory, na oboch multimetroch uvidíme hodnotu $IR = 10\,\mu\mathrm{V}$. Ostáva nám už len určiť znamienka.

Keďže prúd ide v slučke s odpormi v smere hodinových ručičiek, tak aj v tomto smere klesá napätie na jednotlivých odporoch. Horný multimeter je teda (+) koncom pripojený na bod s vyšším napätím a (-) koncom s nižším napätím, čiže súhlasne so smerom, ktorým klesá napätie. Preto ukáže hodnotu $U_1 = +2\,\mu\mathrm{V}$. Dolný multimeter je (+) koncom pripojený na bod s nižším napätím a (-) koncom na bod s vyšším napätím (teda presne opačne ako horný multimeter). Teda napätie klesá opačným smerom ako je pripojený multimeter, a preto ukáže hodnotu $U_1 = -2\,\mu\mathrm{V}$.

Áno, presne na tých znamienkach záleží! Každý správny fyzik by si mal teraz položiť otázku, prečo nám vyšli dve rôzne hodnoty napätia. Však sme sa predsa v škole učili, že napätie medzi dvoma bodmi je (v ustálenej situácii) jednoznačné![25] Zjavne je niekde problém …

Vtip je však v tom, že sme sa to v škole učili pri obvodoch, v ktorých nebolo nič také ako indukované elektromotorické napätie. Znamená to, že indukované elektromotorické napätie NIE JE vo svojej povahe to isté napätie ako v tých jednosmerných obvodoch. Doplácame tu na našu slovenčinu, ktorá používa termín napätie v dvoch rôznych kontextoch. V angličtine je tento problém vyriešený už v názve elektromotorické napätie (*electromotive force*) a napätie (*voltage*).

Ak teraz naštvaní čítate tieto riadky, mysliac si „ako som mal na toto prísť?“, skúste si aspoň odniesť morálne poučenie, že pri obvodoch, v ktorých sa mení tok magnetického poľa, nemá zmysel hovoriť len o napätí ako rozdieli potenciálov, ale treba špecifikovať aj *cestu*, „pozdĺž ktorej“ toto napätie meriame.

Niektorí z Vás si nevšimli, že polarita napätí môže byť rôzna, to bolo v tomto príklade to netriviálne, a preto išiel za to bod dole. Takisto podaktorí miesto správnej aplikácie Kirchhoffových zákonov, rovno odbili všetko s tým, že keďže slučka je spojená, tak voltmetre ukážu nulu, lebo „nie je rozpojená a tečie cez slučku prúd.“ Táto úvaha, je však nekonzistentná, pretože ak je vo vnútri vodiča rozdiel elektrických potenciálov, tak sa voľné nosiče náboja, typicky elektróny, budú snažiť tento rozdiel vyrovnať, čiže vodičom bude tiecť elektrický prúd. Toto nám, de facto, hovorí Ohmov zákon.

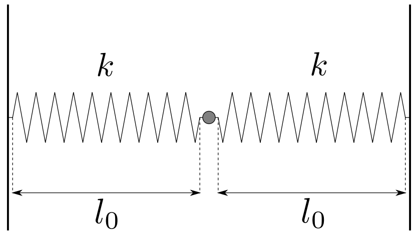
[24] Indukované elektromotorické napätie totiž bráni zmene magnetického toku. Preto aj prúd a aj magnetické pole, ktoré vytvára tento prúd bude mať taký smer, v ktorom sa bude snažiť zmenšiť efekt zväčšovania magnetického toku.

[25] Keďže vertikálne drôtiky strednej slučky neobsahujú žiadny odpor, mohli by sme spojiť príslušné uzly na odporoch, a potom by sme už naozaj merali napätie medzi dvoma bodmi.

1.7 Ako sa pružinky s Enkou zabávali

vzorák **Dušan**, opravoval **Dušan**

Enka umiestnila malé závažie medzi dve nenatiahnuté pružiny s počiatočnou dĺžkou l_0, ktoré boli na opačných koncoch pevne prichytené tak, že sústava v pokoji vytvárala priamku. Následne vychýlila závažie v kolmom smere o 1 cm a odmerala periódu pohybu 2 s. Potom vychýlila závažie dvojnásobne v kolmom smere o 2 cm. Aká bola perióda pohybu v tomto prípade? Počiatočná dĺžka pružín je rádovo väčšia ako centimetre a tiažovú silu uvažovať nemusíte.



Obrázok 13: *Enkina aparatúra*

Človek by si povedal, že keď uvidí fyzikálny príklad s malými kmitmi, tak ho výsledok nemôže prekvapiť. Veď predsa zadanie hovorí, že počiatočná dĺžka pružín je rádovo väčšia ako výchylka. Teda musí ísť o malé kmity a pri nich predsa perióda nezávisí od amplitúdy výchylky. Úloha vyriešená a bodka.

Žiaľ, sklameme vás, také jednoduché to nie je. To, čo tu zohrá podstatnú úlohu, je fakt, že výsledná sila nepôsobí v smere predĺženia pružiny, ale pôsobí takmer kolmo naň. Ako presne? Zrátajme si to. Vieme, že pre vratnú silu pružiny platí $F = -ky$, kde y je predĺženie pružiny. V našom prípade máme pružiny dve a vychyľujeme pružiny so závažím v kolmom smere o x, presne ako hovorí zadanie. Zložky v smere spojnice stien sa vyrušia a v kolmom smere bude výsledná sila

$$F_v = -2ky\sin\alpha = -2k(\sqrt{x^2+l_0^2}-l_0)\frac{x}{\sqrt{x^2+l_0^2}} = -2k\left(x - \frac{xl_0}{\sqrt{x^2+l_0^2}}\right).$$

Super, máme výslednú silu, ale múdrejší rozhodne nie sme. Jediné, čo si môžeme všimnúť, je to, že to nezávisí od prvej mocniny x, ako sme na začiatku mohli predpokladať. Nič viac. Celé zle. Vyzerá to tak, že by sme mali hodiť uterák do ringu, lebo nám o chvíľu tento príklad uštedrí K.O. Ešteže máme tromf v rukáve. V hľadisku sedí ujo nášho brata koňa psa, ujo Taylor. Ten ochotne pribehne, podá nám pomocnú ruku (teda polynóm, respektíve spraví rozvoj). Čo to vlastne je? Taylorov polynóm je polynomiálna funkcia, ktorá veľmi dobre aproximuje našu skúmanú funckciu v okolí niektorého bodu, ktorý nás najviac zaujíma. Ako taký polynóm vypočítať a prečo to vlastne funguje? Je to na dlhšie, preto odporúčame prečítať si tento článok na wikipédii: https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

Nás zaujíma práve okolie nuly(lebo okolo toho x_0 práve kmitáme) a zistíme, ktorá mocnina x dominuje vo výraze pre výslednú silu. Samozrejme, zaujíma nás iba najnižšia mocnina Taylorovho polynómu[26] Ujo Taylor po dôkladnom vyšetrení chrupu usúdi, že

$$F_v \approx -k\frac{x^3}{l_0^2} = -Cx^3.$$

Aaaaaha, teraz už sme múdrejší, ale stále sme zdolali len polovicu úlohy. Ako závisí perióda od počiatočnej výchylky? Nepotrebujeme presný výraz, stačí nám iba závislosť od x. A keďže vieme, že celý pohyb nám

[26] Ide o malé kmity, teda aj výchylky. No a z toho vyplýva, že čím vyššia mocnina x, bude v polynóme, tak tým menší bude mať príspevok k výsledku

popisuje silová pohybová rovnica, tak perióda musí závisieť iba od hmotnosti závažia m, počiatočnej výchylky x, „tuhosti“ C, a dákych bezrozmerných konštánt. To, k čomu smerujeme, sa nazýva škálovanie. Zistíme, ako vieme hľadanú veličinu vyskladať zo vstupných parametrov tak, aby nám sedeli jednotky a potom sa už iba pozrieme, čo sa stane s výsledkom, ak hodnotu jedného parametra niekoľkokrát zväčšíme. Ľahko si spočítame, že rozmer $[C] = \mathrm{kg\,m^{-2}s^{-2}}$. „Tuhosť“ je zjavne jediná vstupná veličina, ktorá v sebe obsahuje sekundu, takže nebude treba veľmi dlho špekulovať a dospejeme k tomu, že pre periódu kmitania platí

$$T \propto C^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} x^{-1}.$$

Dôležité je práve to x^{-1}. Teraz už ľahko vidíme, že ak zdvojnásobime amplitúdu, perióda bude polovičná.[27]

[27] Ak by bola výsledná sila tvaru $-kx$, týmto postupom dospejeme k známemu výsledku nemennej periódy. Predsa $[k] = \mathrm{kg\,s^{-2}}$, a teda perióda nebude závisieť od amplitúdy.