



# Fyzikálny korešpondenčný seminár 31. ročník, 2015/2016

FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava  
e-mail: otazky@fks.sk web: <http://fks.sk>

## Vzorové riešenia 3. kola zimnej časti 2015/2016

### 1. Dovoľenka pod tlakom (opravovala Kaja)

Samko a Helboj síce majú rôznorodé cestovateľské chútky, ale obaja sa radi potápajú. Po poslednej návšteve zahraničia sa stretli a vymieňali si svoje zážitky. Samko, ktorý obľubuje hory, sa bol potápať v jazere v Tibete. Helboj má zas rád slnko a teplo, preto si zašiel niekam k moru. Tak sa spolu zamysleli nad tým, či na Samka pôsobil päť metrov pod hladinou jazera v Tibete rovnaký tlak ako na Helboja, ktorý sa len tak vznášal na hladine mora. Je tomu tak alebo nie? Na hladine jazera v Tibete bol tlak 50 kPa, na hladine mora 100 kPa. Okrem toho by ich zaujímalo aj to, prečo potápači vždy prerátavajú hĺbku na násobky atmosférického tlaku na hladine aj napriek tomu, že keby Samko a Helboj chceli zo svojej pozície zísť nižšie pod hladinu, z tlaku by nevedeli zistiť, či sa nachádzajú vo veľkej nadmorskej výške o päť metrov nižšie, alebo pod hladinou mora.

Keď si len tak chodíme po svete, pôsobí na nás tlak zodpovedajúci tiaži vzduchu (atmosféry) nad nami. Pri potápaní sa k nemu navyše pridáva tlak vody. Nenechajte sa však oklamať! Predstava, že každý si nesie svoj vodný či vzdušný stĺpec a drží ho svojou silou, aby nespadol, funguje len na vodorovné plochy. Tlak ale narozdiel od sily nemá smer a pôsobí rovnako na hocijako orientované plochy. Lepšiu predstavu by nám poskytla časticová fyzika alebo fyzika kontinua. Prečo nám ich netreba? Lebo odpoveď bude pre tento jednoduchý prípad rovnaká.

Prejdime k výpočtu. Tlak vody v hĺbke  $h$  je

$$p = p_A + mg/S = p_A + (hS\rho)g/S = p_A + h\rho g,$$

kde  $p_A$  je tlak atmosféry pri hladine. Tento vzorček ste už zrejme stretli. Dosadíme doň situácie našich turistov. Helboj je na hladine, čiže  $h = 0$  a pôsobí naňho len tlak  $p_A$ , v jeho prípade 100 kPa. Samko sa ponoril do hĺbky  $h = 5$  m pri atmosférickom tlaku  $p_A = 50$  kPa, takže výsledný tlak naňho bude  $p = 50\,000$  kPa +  $5\text{ m} \cdot 1000\text{ kg/m}^3 \cdot 9,8\text{ m/s}^2 = 98$  kPa. Tlaky sú teda naozaj zhruba rovnaké.

A čím sú teda zaujímavé tie násobky tlaku atmosféry? Zrejme tým, ako tlak prostredia vplýva na naše telo. V dýchacej sústave a v strednom uchu máme dutiny naplnené vzduchom. Objem plynu v nich je nepriamo úmerný vnútornému tlaku.<sup>1</sup> Pri potápaní bez prístroja sa

<sup>1</sup>Stavová rovnica hovorí, že  $pV = NkT$ , čiže pri konštantnej teplote  $pV = \text{konšt.}$

Generálny partner



Partneri



PosAm



Mediálny partner



GRATEX  
INTERNATIONAL

objem pľúcnych komôrok prispôsobí tak, aby sa vonkajší tlak vyrovnal vnútornému. Keď tlak prostredia stúpne na dvojnásobok, objem vzduchu v pľúcach klesne na polovicu. Samkovi sa to stane pri ponorení do piatich metrov, Helbojovi až v hĺbke 10 metrov. Dýchací prístroj nám vie správny tlak zabezpečiť automaticky.

Dutina stredného ucha nevie prispôobiť svoj objem, a preto si potápači vyrovnávajú tlak v ňom s tlakom v pľúcach otvorením Eustachovej trubice. Je dôležité robiť to dostatočne často, inak dôjde k poškodeniu ušného bubienka. Keďže bubienok je na rozhraní dvoch tlakov, silu naň pôsobiacu určuje ich rozdiel a potápača zrejme zaujíma aj absolútna zmena tlaku s hĺbkou. Tlak v ušiach sa však narozdiel od prispôsobenia pľúc dá kontrolovať empiricky.

## 2. Divný suvení (opravoval Vladko)

V Thajsku si Mišo kúpil zaujímavý predmet. Pozostáva zo štvorcovej dosky, ktorá sa skladá zo 121 menších rovnako veľkých štvorčekov, ktorých strany sú rovnobežné so stranami pôvodného štvorca. Miša by zaujímalo, pod ktorým štvorčekom má podoprieť dosku tak, aby sa neprevrátila. Predavač na trhu mu to však nechcel prezradiť, že vraj na to má prísť sám. Dal mu však hint. Takže jediné, čo Mišo teraz vie, je, že štvorček na pozícii  $[i, j]$  váži  $1 + \cos(i\pi/11) \sin(j\pi/11)^2$  gramov (Štvorčeky sú číslované v riadkoch aj v stĺpcoch od nuly.). Samozrejme, že Mišo má k dispozícii aj počítač ;).

Vieme, že miesto podopretia sa nachádza pod ťažiskom šachovnice. Keďže šachovnica sa skladá, z homogénnych štvorčekov, tak si ju môžeme nahradiť modelom 121 hmotných bodov. Tieto body majú hmotnosť jednotlivých políčok a nachádzajú sa v ich strede. Pre  $x$ -ovú súradnicu ťažiska modelu platí

$$X_T = \frac{\sum_{k=1}^{121} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{121} m_k},$$

kde  $x_k$  je  $x$ -ová súradnica  $k$ -teho políčka a  $m_k$  je jeho hmotnosť. Pre  $y$ -ovú súradnicu platí obdobný vzťah, ktorý už hádam nie je potrebné uvádzať.

Ako v zadaní už bolo naznačené, tak najlepšie sa nám súradnice vypočítajú pomocou počítača. Spôsobov vhodných na použitie je veľmi veľa. My uvedieme dva: numerický pomocou tabuľkového editora *Calc*<sup>3</sup> a programátorský pomocou jazyka *C++* a pomocou jazyka *Python*.

V tabuľkovom editore vieme vypočítať hmotnosť každého políčka. Môžeme si spraviť štvorcovú tabuľku, kde na obvodě budú vyznačené súradnice políčok. Napríklad do buniek A2 až A12 napíšeme čísla od 0 po 10 na označenie riadkov ( $i$  súradnica políčka) a do buniek od B1 po L1 vpíšeme čísla na označenie stĺpcov ( $j$  súradnica políčka), teda napríklad bunke C4 prislúcha pozícia  $[1, 2]$ . Ak chceme na každej bunke mať vypísanú hmotnosť príslušného políčka, tak do bunky B2 napíšeme `=1+COS(C$1*PI()/11)*SIN($A4*PI()/11)`. Znak `$` slúži na fixovanie súradnice bunky, teda teraz už nemusíme vyplňovať vzorcom všetkých zvyšných 120 buniek, ale stačí kliknúť na pravý dolný roh bunky B2 a potiahnutím vzorce prekopírujeme. *Calc* automaticky zmení súradnice buniek používaných vo vzorci, ale napríklad potiahnutím dole sa údaj vo vzorci časť `C$1` nezmení, lebo číslo 1 sme zafixovali.

<sup>2</sup>Argumenty sínusu aj kosínusu počítame samozrejme v radiánoch.

<sup>3</sup>*Calc* je obdoba programu *Excel*, vzorce používané v popisovanom návode sú úplne kompatibilné s *Excel*-om, teda tento návod je vhodný aj pre „Excelistov“.

Keď už máme zistenú hmotnosť každého políčka, tak si všetky hmotnosti sčítame, napríklad prvý riadok sčítame príkazom =SUM(B3:L3). Sčítame všetky políčka a získame  $\sum_{k=1}^{121} m_k$ . Ďalej chceme získať  $\sum_{k=1}^{121} x_k m_k$ . Takže každý vzorec vynásobíme jeho  $i$ -ovou súradnicou zväčšenou o 0,5, lebo ťažisko štvorčeka na pozícii  $[i, j]$  sa nachádza na súradniciach  $[i + 0,5, j + 0,5]$ . Takže už jednoduchou sumáciou sčítame takto upravené vzorce. Podiel tejto sumy a predošlej je  $x$ -ová súradnica ťažiska. Podobnou úpravou vzorcov zistíme druhú súradnicu a dostaneme:

$$X_T = \frac{\sum_{k=1}^{121} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{121} m_k} = \frac{535,53}{127,96} = 4,19$$

$$Y_T = \frac{\sum_{k=1}^{121} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{121} m_k} = \frac{707,23}{127,96} = 5,53.$$

Teda štvorček treba podprieť na pozícii  $[4, 5]$ .

Ak ste sa rozhodli riešenie naprogramovať, tak pri rátaní jednotlivých súm použijeme dva vnorené for cykly. Jeden ide cez riadky a druhý cez stĺpce. Na ukážku si ukážeme ako vypočítať sumu, ktorá sa nachádza v čitateli  $X_T$ . V jazyku C++ to vyzerá takto:

```
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

int main() {
    float sumax = 0;
    for ( int i=0 ; i< 11 ; i++) {
        for (int j = 0; j <= 10; j++) {
            sumax += (1 + cos(i*M_PI/11) * sin(j*M_PI/11)) * (i+0.5);
        }
    }
    cout << sumax << endl;
    return 0;
}
```

A takto by vyzeral kód v *Pythone*:

```
from math import cos, sin, pi
```

```
sumax = 0
```

```

for i in range(11):
    for j in range(11):
        sumax += (1 + cos(i*pi/11) * sin(j*pi/11)) * (i+0.5)
print(sumax)

```

Po zbehnutí programu má premenná `sumax` v oboch prípadoch hodnotu 535,53, čo sa zhoduje s výsledkom predošlého spôsobu. Akceptujeme riešenia robené v rôznych tabuľkových editoroch alebo kódené v rôznych jazykoch. Počet získaných bodov závisí od toho, či vami popísaná metóda výpočtu dáva presné a správne výsledky.

### 3. Packy (opravoval Jimi)

Enka sa naposledy zamýšľala nad otázkou, prečo keď sa dotkne prstami skleneného pohára s vodou, tak okrem končekov svojich prstov „nevidí nič“, iba bielu hmlu. Dokázali by ste jej poradiť?



Obr. 1: Čo vidí Enka

Najprv sa zamyslime nad tým, ktorá časť zadania je vlastne dôležitá: Sklenený pohár, alebo voda v ňom? Overiť to nie je ťažké: Napustíme si vodu do pohára, chytíme ho tak, ako Enka a pozrieme sa zhora. Rýchlo zbadáme, o čom hovorí: Rozmazané pozadie, ostré končeky prstov... Ale prsty nikde! Skúsime sa pozrieť na vodu z boku... A už vidíme niečo iné! Tentokrát už vidíme aj svoje prsty! Skúsime ešte chytiť prázdny sklenený pohár... Prsty vidíme. To znamená, že voda vnútri bude veľmi dôležitá! Skúsme to ešte s plastovou fľašou... A aha, stane sa to isté! Sklo teda asi až tak dôležité nebude.

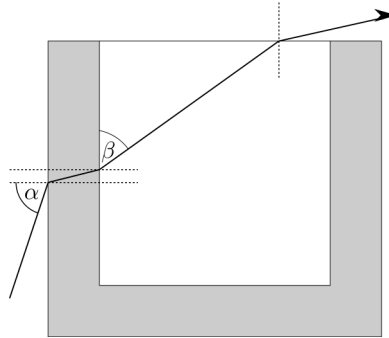
Čo ale spôsobuje tú hmlu? Nie je to len rozostrený obraz, lebo by sme prsty videli, aj keď rozmazané. Skúsime mávať všade okolo pohára... A zistíme, že ak mávame pod ním, hmla, čo vidíme na hladine, sa mení. Skúsime priložiť farebný papier... A aha! Zrazu je farebná. Takže asi tam vidno to, čo je pod pohárom. Nedá nám, a skúsime to isté pre prípad, ak sa pozrieme z boku. Teraz vidíme rozmazané prsty, ale nič z dna! Tak to vyzerá, že svetlo v pohári nám dobre cestuje len medzi protifaľnými stranami! Ako je to možné?

Spomeňme si na lom svetla a Snellov zákon:  $n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta$ . Uhol lomu  $\beta$  závisí od jednotlivých indexov lomu<sup>4</sup>. Pre vzduch je tento index  $n_{\text{vzduch}} = 1$  a pre vodu  $n_{\text{H}_2\text{O}} = 1,33$ . Netreba však zabudnúť, že táto rovnica nemá vždy riešenie. Ak svetlo prechádza z opticky hustejšieho prostredia (voda) do opticky redšieho (vzduch), tak pre veľké uhly  $\alpha$  dostaneme  $\sin \beta > 1$ . Očividne tu je niečo zle. Zamyslíme sa a zistíme, že vtedy sa svetlo neláme, ale rozhranie voda-vzduch funguje ako sklo a svetlo sa odráža.

<sup>4</sup>Index lomu je vlastnosť látky vyjadrujúca ako rýchlo sa v nej šíri svetlo.

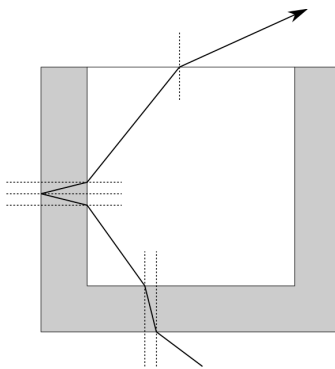
Keď už sme vyzbrojený týmito faktami, problém s pohárom pre nás už nepredstavuje problém :). Najprv sa pozrieme na prípad, že sa pozeráme do pohára z boku. Vidíme pekne všetko, prsty aj ich okolie. To je preto, že lúče od našich očí k prstu prechádzajú pekne. Ak vchádzajú do pohára pod uhlom  $\alpha$ , na rozhraní vzduch-voda sa zlomia sa ku kolmici a keď z nej vychádzajú von tak sa zlomia smerom od kolmice a vo vzduchu opäť putujú pod uhlom  $\alpha^5$ . To znamená, že všetko je tak ako by sme chceli.

Ak sa však pozeráme zvrchu, rozhrania už nemôžeme považovať za paralelné, pretože to, cez ktoré lúče vchádzajú do vody je kolmé na to, cez ktoré vychádzajú. To znamená, že tu už úplný odraz na druhom rozhraní môže nastať.



Obr. 2: Prechod lúča prichádzajúceho z boku

Skúsme odhadnúť, kedy sa tak stane. Povedzme, že lúče sa hýbu v jednej rovine a rozhrania sú na seba kolmé. Na rozhraní voda-vzduch nastane úplný odraz v prípade, keď by vychádzajúce lúče mali byť pod uhlom  $\gamma > 90^\circ$ , čiže vchádzať musia pod uhlom  $\beta > \arcsin(n_{\text{vzduch}}/n_{\text{H}_2\text{O}}) \approx 48,75^\circ$ . Teraz jednoducho z Pytagorovej vety zistíme, že na prvom rozhraní sa museli lámať pod uhlom  $< 41,25^\circ$ . To znamená, že ak sa do pohára pozeráme pod uhlom  $\alpha < \arcsin(n_{\text{H}_2\text{O}}/n_{\text{vzduch}} \sin(1 - \beta)) \approx 61,27^\circ$ , čo je skoro vždy.



Obr. 3: Prechod lúča prichádzajúceho zospodu

Hmm a čo teda vidíme? To, čo vidíme dobre, sú naše končeky prstov. Od nich svetlo bez problémov doputovalo priamo k nám práve preto, lebo sú nacapené na skle. Tam nenastáva

<sup>5</sup>Svetlo sa samozrejme láme aj na rozhraniach vzduch-sklo a sklo-voda. Vo výpočtoch a v popise to však pre jednoduchosť nebudeme uvažovať.

žiaden lom svetla. No v medzerách medzi nimi je vzduch a pred chvíľou sme zistili, že ten funguje skoro vždy ako zrkadlo. Takže k nám vlaste neprichádzajú lúče z boku pohára, ale zo spodu, ktoré sa akoby odrazili od zrkadla. (Uvažujme, že nič komplikovanejšie sa tam nedeje. Samozrejme, v skutočnosti by sme mali započítať aj sklo a presný tvar, ale naša aproximácia nám stačí.) Ako vieme, že zospodu? No predsa sme pozorovali, že hmla sa nám mení, ak robíme pod pohárom neplechu.

Zaujímavá teória, že? Ako si ju ešte môžete overiť? Skúste si namočiť prsty a tie pricapiť na sklo. Tam budete vidieť tú takzvanú hmlu očosi inakšie. Úplný odraz tam nenastane. Pokojne si to zrátajte, ale teraz nemôžete započítať aj to sklo ;).

#### 4. Držgrošská (opravoval Plyšák)

Dokážeme na základe zvuku dopadajúcej euromince zistiť, o akú nominálnu hodnotu išlo? Odporúčame zvoliť si nejakú dobre tvrdú podlahu a experiment zopakovať dostatočne veľakrát, aby sme získali dobrú štatistiku (nezabudnite si nahráť aj šum okolia). Následne skúste odpovedať na otázku, či je nejaká korelácia medzi tvarom spektra zvuku a nominálnou hodnotou. Na analýzu zvuku odporúčame použiť program *Audacity*. Nebodovaný bonus nakoniec: Dokázali by ste zistiť pri náraze dvoch mincí naraz ich sumu na základe vašich výsledkov?

Rozhodli sme sa, že v tomto vzoráku presne ukážeme, ako postupovať pri experimente. Najprv sa zamyslíme nad teóriou, potom zrealizujeme experiment a nakoniec zanalyzujeme naše výsledky.

#### Teória

Dopad mince na tvrdý povrch možno v istom zmysle aproximovať buchnutím do bubna. Keďže s bubnom sa každý neraz hral a reakcia bubna na búchanie doň je zjavná, vysvetlíme si teoretický princíp našej úlohy na tomto príklade. Bubon budeme uvažovať v priblížení obruč + blana/membrána. Po tresnutí do membrány bubna sa spomenutá membrána rozkmitá s istou frekvenciou  $f$ , čo uvedie do pohybu aj vzduch v okolí. Takáto vlna vo vzduchu sa šíri priestorom a my ju vnímame ako zvuk. Teraz späť k minciam. Samotná minca sa pri náraze na tvrdý povrch ( $\sim$  buchnutie do bubna) bude tiež správať ako membrána. Nakoľko každý predmet má nejakú svoju **vlastnú** frekvenciu, aj mince ju budú mať, a presne túto frekvenciu zaznamenáme pri našich meraniach. Takže ak majú dva predmety rôzne vlastné frekvencie, mali by sme ich vedieť rozoznať. To však závisí od parametrov študovaných predmetov – hustoty, veľkosti, modulu pružnosti. Pre mincu vieme odvodiť približný vzťah

$$f = \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

kde  $r$  je polomer mince,  $\rho$  jej hustota a  $E$  modul pružnosti materiálu, z ktorého je vyrobená.<sup>6</sup> Avšak teória predpokladá, že to je čistý kus okrúhleho kovu, čo mince rozhodne nie sú, ale takto máme aspoň nejakú základnú predstavu, čo možno očakávať.

<sup>6</sup>Toto sme samozrejme od vás nechceli.

## Postup práce

Použitá aparátúra (viď Obr.4): mikrofón, okenný parapet<sup>12</sup>, mince (1 a 2 eurovka, 50, 10, 5, 2 centovka).



Obr. 4: Použitá aparátúra

Mikrofón sme umiestnili v dostatočnej vzdialenosti od miesta, kde sme očakávali dopad mince, aby nedostal zásah. Zvolili sme si výšku  $h$ , z ktorej sme mince hádzali, spustili sme nahrávanie v programe Audacity a nakoniec pustili aj mincu. Audacity sme zastavili a zobrazili zachytené spektrum.

Zapísali sme si hodnoty píkov a celý postup opakovali pre každú mincu desaťkrát. Nezabudli sme ani na meranie okolitého šumu, respektíve analýzy zvuku, ktorý vytvára samotná parapeta. Nakoniec ešte spravíme jedno meranie: naprázdno do našej podložky tresneme, aby sme získali frekvenciu šumu na pozadí každého merania.

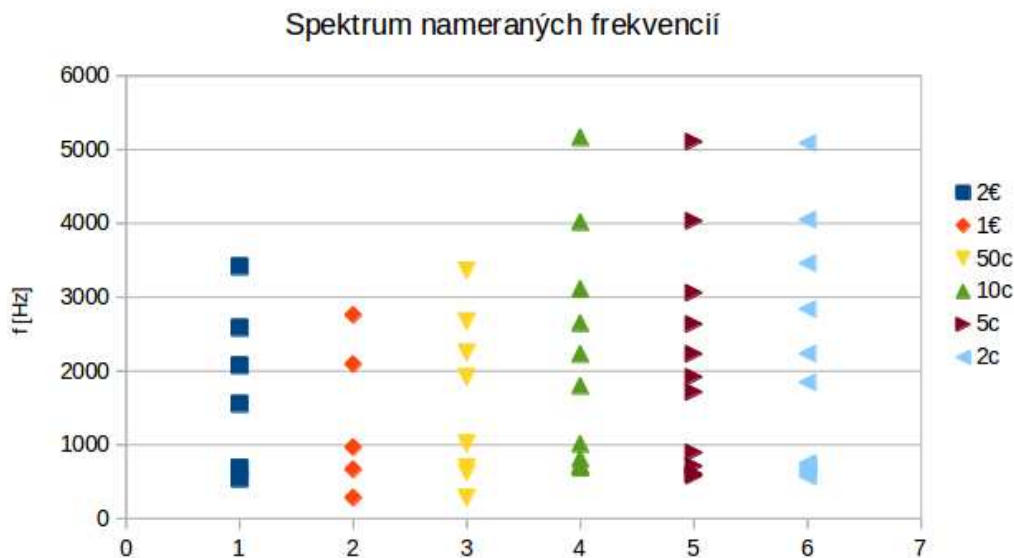
## Experimentálne výsledky

Buchnutie naprázdno do parapetu sme namerali ako šum  $f = 229$  Hz, a pri všetkých meraniach sme túto frekvenciu vylúčili. Takže výsledné frekvencie, ktoré sme namerali vyzerajú nasledovne

---

<sup>1</sup>Najprv sme použili keramický tanier okrúhleho tvaru, čo nám však ako výsledok dávalo píky všetkých spektier na rovnakých frekvenciách. Jediným odlišením jednotlivých mincí bol počet harmonických funkcií (píkov), ktoré ich spektrá obsahovali. Záverom je, že tanier sa tiež správal po náraze ako membrána a „prehlušil“ mince.

<sup>2</sup>Skúsili sme aj meranie na kachličke, čo však opäť nevedlo k uspokojivým výsledkom.



Obr. 5: Charakteristické frekvencie pre jednotlivé mince

Je zrejmé, že pre všetky mince sú význačnými frekvenciami  $\approx 2600$  Hz,  $2000$  Hz,  $680$  Hz. Čiže nás budú zaujímať tie zvyšné. Vidíme, že by sme mohli byť schopní rozlíšiť, či sa jedná o dvoj-, päť- alebo desaťcentovky, ktoré majú síce až štyri ďalšie spoločné spektrálne čiary  $5100$  Hz,  $4000$  Hz,  $800$  Hz,  $720$  Hz, No v tých zvyšných sa odlišujú. Spektrá dvoj- a jednoeurovky a päťdesiatcentovky zrejme nebude možné odlíšiť, keďže ich spektrá vykazujú vysokú podobnosť, až na zopár frekvencií, pričom päťdesiatku by sme mohli približne určiť na základe chýbajúcej  $f = 2200$  Hz v spektrách eurových mincí.

## Záver

Pri väčšom množstve meraní a zozbieraní veľkého počtu dát by sme azda boli schopní určovať s dostatočnou presnosťou nominálne hodnoty euromincí podľa ich zvuku pri dopade na vhodný povrch. S našimi dátami sme zatiaľ boli schopní odlíšiť len malé centové mince od tých väčších eurových, ktoré sa výrazne odlišujú veľkosťou, hmotnosťou a materiálom, z ktorého sú vyrobené.

## Dodatok

Meranie sme kvôli overeniu uskutočnili aj tak, že sme do mince zavesenej na šnúrke cinkali klincom priamo pred mikrofónom. Dosiahnuté výsledky sa zhodovali s našimi predchádzajúcimi, a teda zvolený postup možno pokladať za správny. Avšak pri takomto prístupe by sme potrebovali omnoho citlivejší mikrofón, pretože vibrácie mincí, čiastočne rušené priamym stykom so šnúrkou, boli veľmi slabé. Pri centových minciach sme už bojovali s problémom, či vôbec bude zvuk nárazu zachytený. Aj v tomto prípade sme nezabudli odmerať frekvenciu klinca buchnutého o nejaký neutrálny povrch, a jeho frekvencie sme zo spektier vylúčili.

## 5. Ideálne plyny? (opravoval MaťoB)

*Tento príklad je interaktívny a jeho zadanie je len v elektronickej podobe, ktorú nájdete na našej internetovej stránke <http://fks.sk>.*



Táto úloha nebola vôbec taká ťažká. Vyžadovala si len kúsok trpezlivosti. Stačilo zo simulácie všetko starostlivo odmerať a potom už len použiť kúsok zdravého rozumu na interpretáciu výsledkov.

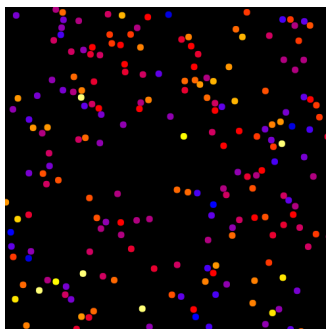
### Prvá podúloha

Ako zistíme v akej fáze sa nachádza náš systém? Spomenieme si, čo sme sa učili v škole.

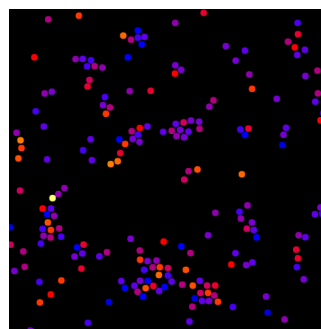
V prípade plynu prevažuje kinetická energia častíc nad potenciálnou a molekuly vyplňajú skoro celý priestor krabice. Celková energia takého systému je kladná a môže byť celkom veľká. Ak teplotu plynu postupne znižujeme, tak pri našich parametroch (počet častíc 200 a objem krabice 2500) začne plyn v okolí teploty 0,5 postupne kondenzovať. Začnú sa vytvárať malé zhluky - kvapky, ktoré však ešte stále obsahujú pomerne veľa energie a okolitý priestor zatiaľ zostáva vyplnený plynom. Kinetická energia začína byť porovnateľná s potenciálnou a celková energia systému sa začína pohybovať v okolí nuly. Ak teplotu znížime ešte viac, tak sa dostaneme do kvapalnej fázy, kde skoro všetok plyn skondenzoval až na zopár veľmi rýchlych molekúl. V kvapalnej fáze má, teraz už pomerne veľká, kvapka stále celkom veľa kinetickej energie, čo sa prejavuje tým, že nemá stály tvar a atómy sa neustále preskupujú. Ak teplotu ešte viac znížime, dostaneme sa do tuhej fázy, kedy potenciálna energia výrazne prevyšuje nad kinetickou a celková energia systému je záporná. V tejto atómy inertného plynu skondenzovali do šesťuholníkovej kryštalickej mriežky<sup>7</sup>.

Stačilo teda meniť postupne teplotu systému, dať si pozor na správne odmeranie veličín (vždy stlačiť „Vynulovať“, pred tým ako ideme merať) a nechať systém chvíľku ustáliť sa na danej teplote.

Na nasledujúcich obrázkoch môžete vidieť ukážkové fázy inertného plynu v krabici pri rôznych parametroch. Vo všetkých prípadoch je počet častíc 200 a objem krabice 2500.

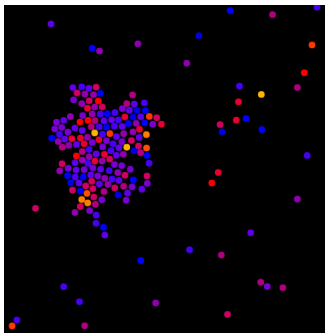


Obr. 6: Celková energia je 163 a teplota 1.05

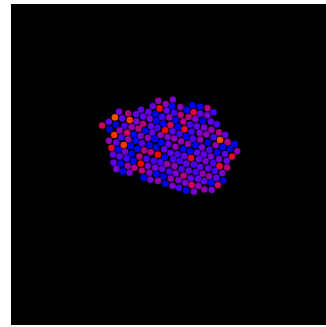


Obr. 7: Celková energia je -27 a teplota 0.47

<sup>7</sup>Správanie atómov inertných plynov sa dá „simulovať“ aj s bublinkami na povrchu kvapaliny. Koho to zaujalo, nech si otvorí Feynmana alebo si vyhľadá termín „bubble rafts“.



Obr. 8: Celková energia je -312 a teplota 0.40

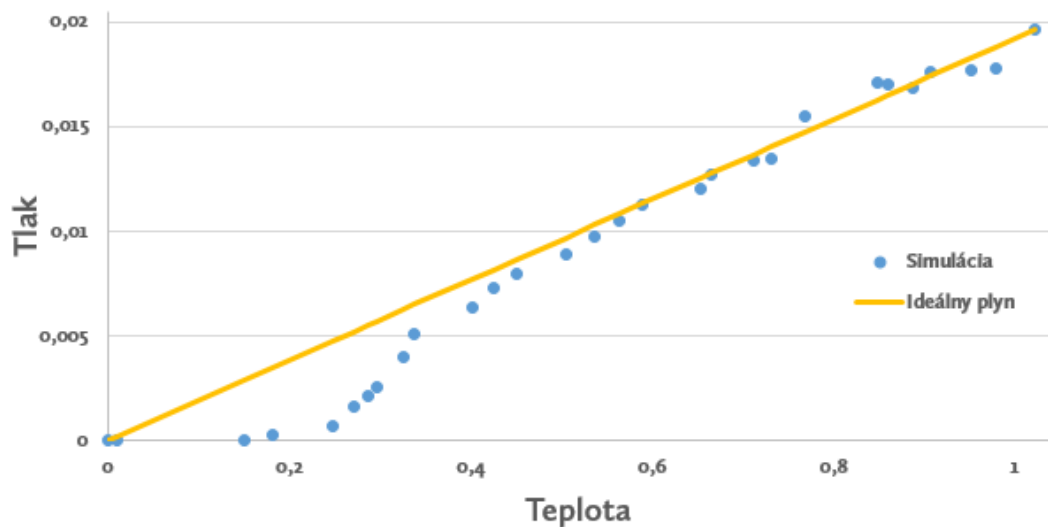


Obr. 9: Celková energia je -500 a teplota 0.02

Ešte jedno malé poučenie do života. To, že celková energia systému je záporná, znamená, že sa systém nachádza vo viazanom stave<sup>8</sup>. Inak, teda veľmi populárne, povedané, molekuly sa nemôžu pohybovať ľubovoľne, keďže nemajú dostatok energie na prekonanie príťažlivých medzimolekulárnych síl.

## Druhá podúloha

Opäť stačilo nastaviť parametre ako v zadaní a postupne citlivo meniť teplotu. Ak ste boli dostatočne trpezliví, dostali ste graf podobajúci sa na tento:



Obr. 10: Znázornenie závislosti tlaku od teploty pre plyn v simulácii a pre ideálny plyn

Pre teploty blízke jednej majú silové interakcie ešte malý vplyv, čo znamená, že sa systém správa ako ideálny plyn. Pri teplote 0,5 však atómy začínajú postupne kondenzovať, a preto začína klesať tlak (molekuly nevytvárajú ani v kvapalnom ani pevnom skupenstve tlak na steny

<sup>8</sup>Skúste si rozmyslieť a prepočítať, kedy sa napríklad planéta nachádza vo viazanom stave voči hviezde, okolo ktorej obieha a čo sa s ňou stane, ak by mala celkovú energiu kladnú.

nádoby). Pri teplote okolo 0,2 skondenzujú už skoro všetky atómy, vďaka čomu tlak plynu úplne vymizne, aj keď atómy majú nenulovú teplotu. Tento výsledok sa dal intuitívne očakávať, keďže molekuly nemajú dostatok energie na to, aby opustili príťažlivý potenciál krátko dosahových síl a ideálny plyn sa nevolá ideálny len tak pre nič za nič, ale preto, lebo sa predpokladá, že molekuly sa medzi sebou navzájom necítia. Je teda prirodzené očakávať rozdielne správanie pre systém, ktorý už silovú interakciu zahŕňa.

Všimnite si, že výsledky simulácie jemne fluktuujú okolo priamky na  $pT$  diagrame. To je spôsobené diskretnou povahou našej simulácie a z toho vyplývajúcich nepresností pri výpočte tlaku a teploty (priemernej energie).

### Tretia podúloha

V tejto časti sme na vás nachystali malý chyták.

Ak ste sa hrali so simuláciou, tak ste prišli na to, že teplota mierne poklesla, ale tlak sa skoro vôbec nezmenil. Predstavte si, že mám nádobu a urobíme do nej dierku. Intuitívne by sme očakávali, že s vychádzajúcimi molekulami bude tlak plynu v nádobe klesať. V skutočnosti by to tak naozaj bolo, no v našej simulácii je to inak! Prečo? Jednoducho preto, že pri simulácii sa počíta tlak na všetky steny nádoby, nie len na steny tej časti, kde sa molekuly nachádzali pôvodne. Ak teda rýchlejšie molekuly odídu z prvej časti nádoby, tak môžu narážať do stien v druhej časti nádoby. Navyše nemôžeme tvrdiť, že by druhá časť bola nejaké vákuum, keďže je to porovnateľne veľká časť ako časť vpravo. To znamená, že rýchlejšie molekuly sa môžu z pravej časti vracieť späť a odovzdávať tak hybnosť a energiu aj z druhej časti nádoby do prvej.

Keďže medzimolekulárna vzdialenosť sa zväčšila, teplota výraznejšie poklesla, potenciálna energia medzi molekulami o kúsok narástla a molekuly stratili časť kinetickej energie. Keďže sme nehýbali stenami nádoby, atómy nemohli stratiť kinetickú energiu prvým spôsobom. Pozor, tu znova počítame kinetickú energiu, a teda aj teplotu, všetkých častíc! Aj tých, ktoré opustili ľavú časť nádoby. Ak by sme však zobrali ideálny plyn a naozaj ho nechali unikať do vákuua, tak by teplota klesala tiež, no z iného dôvodu – nádobu budú v priemere opúšťať rýchlejšie častice viac ako tie pomalšie, a tak aj odoberať energiu. Na to, aby sme zistili koľko presne, však už potrebujeme presný výpočet.

V tejto podúlohe bolo teda dôležité uvedomiť si rozdiely medzi skutočnou expanziou do vákuua a tým, čo vlastne simulujeme.

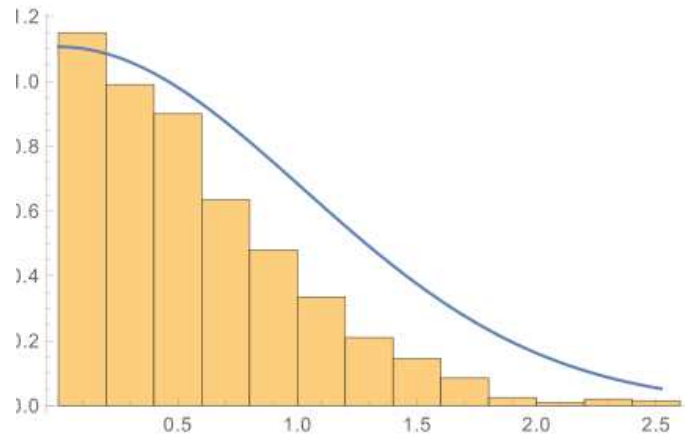
### Štvrtá podúloha

Znovu nejde o nič ťažké. Chce to len nezabudnúť na všetky veci zo zadania a správne interpretovať výsledky. Poďme teda rovno na vec!

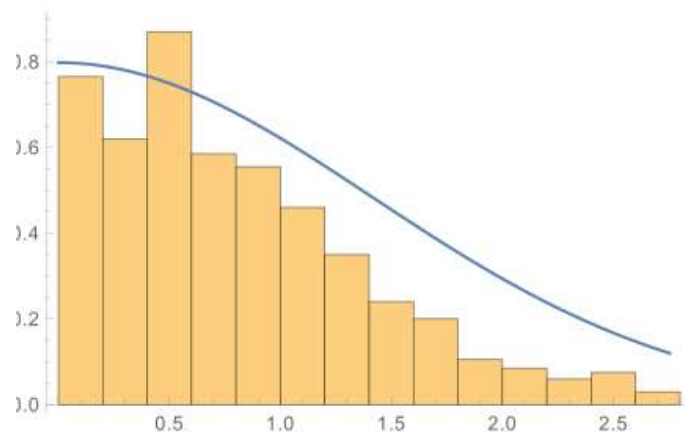
Potrebné je iba odmerať všetky rýchlosti atómov pomocou prostredia v simulácii, urobiť veľkosť jednej zložky rýchlosti a porovnať s Maxwellovým rozdelením rýchlosti molekúl.

Na nasledujúcich obrázkoch sme zobrali absolútnu veľkosť rýchlosti molekúl v  $x$ -vom smere v krabici objemu 2500 pri 1000 molekulách. Pri porovnávaní sme vynásobili Maxwellovo rozdelenie dvojkou, keďže Maxwellovo rozdelenie hovorí o rozdelení zložky rýchlosti a nie absolútnej veľkosti zložky rýchlosti. Pri vytváraní histogramu sme si dali pozor na to, aby pravdepodobnosť bola úmerná ploche obdĺžničku – preto, aby sme to mohli porovnať s Maxwellovým rozdelením.

Na vertikálnej osi je hustota pravdepodobnosti nájdenia atómu pohybujúceho sa danou rýchlosťou (horizontálna os). Tohoto pojmu sa netreba len báť, hovorí o tom, že hustota pravdepodobnosti pre násobená šírkou obdĺžnička je pravdepodobnosť nájdenia molekuly s rýchlosťou ležiacou v danom obdĺžničku. (Hustotu pravdepodobnosti používame preto, aby pravdepodobnosť bola úmerná ploche obdĺžnika a nie jej výške :).).

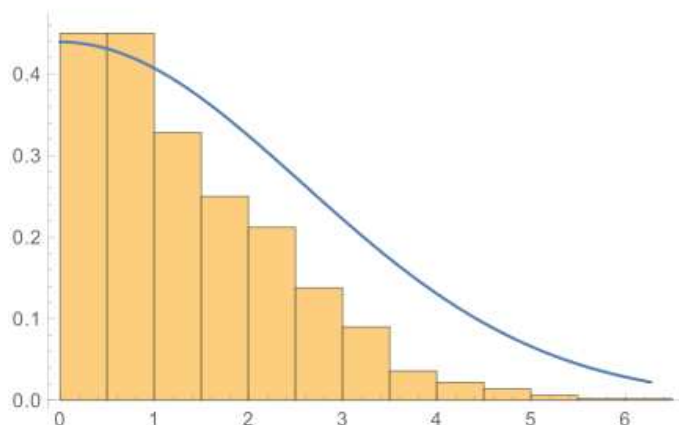


Obr. 11: Hustota pravdepodobnosti zo simulácie (teplota 0.5) porovnaná s Maxwellovým rozdelením pri teplote 0.5



Obr. 12: Hustota pravdepodobnosti zo simulácie (teplota 1) porovnaná s Maxwellovým rozdelením pri teplote 1

Ako ste si všimli, rozdelenie získané zo simulácie nemá až tak úplne blízko k tomu Maxwellovskému. Skúsme teda ešte zväčšiť krabicu na maximum – obmedziť čo najviac zrážky a dať väčší priestor molekulám.



Obr. 13: Hustota pravdepodobnosti zo simulácie (teplota 3.3) porovnaná s Maxwellovým rozdelením pri teplote 1

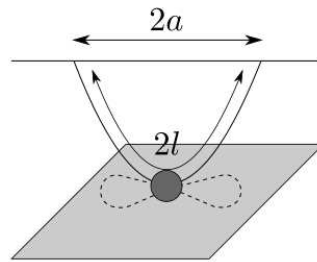
Ako ste si mohli všimnúť, aj v tomto prípade, keď počítač dostáva už naozaj zabráť, sa aj po veľmi dlhom čase (1000 časových jednotiek v simulácii) naše rozdelenie odchyľuje od toho Maxwellovského. Dôvodov môže byť niekoľko. To, ako sa správa tisíc molekúl rozhodne nie je porovnateľné s  $10^{23}$  molekúl, čo sú typické počty na našich škálach. Takisto skutočný plyn je v skutočnosti pomerne prázdny priestor (v realite pripadá na jednu molekulu omnoho väčší priestor ako v našej simulácii). Vidíme teda, že aj podobné simulácie narážajú na svoje limity.

Správny riešiteľ si v tomto momente kladie otázku: na čo bol tento vzorák vlastne dobrý, keď všade tvrdíme, že je to ľahké, len netreba zabudnúť na nič zo zadania? Cieľom tejto úlohy však nebolo testovať vás, ako dobre viete zvládnuť urobiť dané kroky, no nechať vás hrať sa so simuláciou a ukázať vám, že nie je až také ťažké vytvoriť model, ktorý dokáže opísať aj veci ako fázové premeny a priblížiť sa tak ku skutočným plynom.

Ak sa vám táto úloha páčila, môžete sa tešiť, s touto simuláciou sa určite ešte niekedy v budúcnosti stretne.

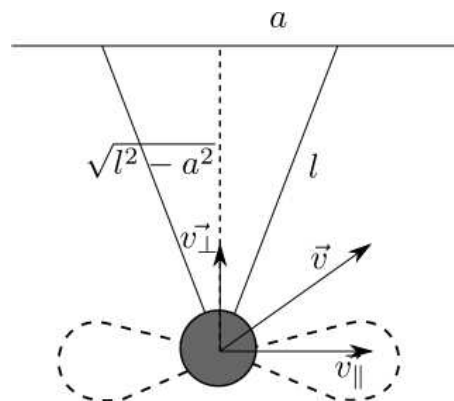
## 6. Kaťa skúša hypnózu (opravoval Jaro)

Kaťa si do stredy izby na intráku zavesila nehmotné a dokonale ohybné lanko z obchodu s fyzikálnymi pomôckami dĺžky  $2l$ . Uchytala ho do dvoch úchytoch na strope vzdialených od seba  $2a$ . Potom si naň zavesila malú guľôčku, ktorá sa dokáže šmýkať na lanku bez trenia. Kaťu by teraz zaujímalo, aká musí byť dĺžka lanka, aby guľôčka vedela kmitať v tvare osmičky. Skúste sa zamyslieť nad tým, aká musí byť perióda malých kmitov v rôznych smeroch.



Obr. 14: Kmitajúca guľôčka

Už na prvý pohľad je jasné, že tento relatívne jednoduchý pohyb sa bude popisovať dosť ťažko. Budeme sa preto držať rady zo zadania a pohyb budeme skúmať v jednotlivých smeroch samostatne. Je evidentné, že to budú rovina závesu a rovina kolmá na rovinu závesu. Zadanie nám radí, aby sme preskúmali periódy pohybu v jednotlivých smeroch, tak sa pustíme do toho.



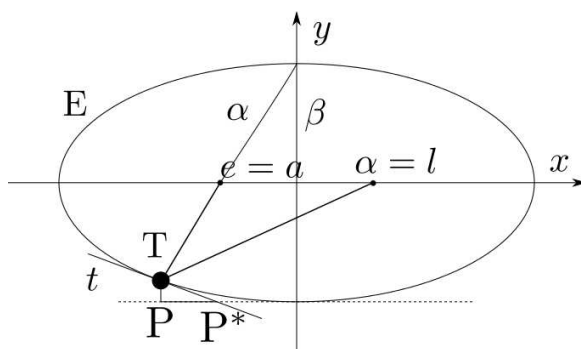
Obr. 15: Náčrt skúmaného systému a označenie veličín

Začneme tým jednoduchším, a tým je pohyb v kolmej rovine. V tomto prípade totiž guľôčka kmitá po časti kružnice s polomerom  $r = \sqrt{l^2 - a^2}$ . Zabezpečuje to *nehmotné* lanko, takže môžeme hovoriť o matematickom kyvadle s dĺžkou závesu  $l^* = r = \sqrt{l^2 - a^2}$ . No ale vzťah pre periódu matematického kyvadla predsa poznáme

$$T_{\perp} = 2\pi\sqrt{\frac{l^*}{g}} = 2\pi\frac{\sqrt[4]{l^2 - a^2}}{\sqrt{g}}.$$

Pripomeňme ešte, že tento vzťah platí len pre malé výchylky, čo nám ale vôbec neprekáža, lebo zadanie nám káže preskúmať len malé kmity.

Prejdime teraz na ten zložitejší prípad. Guľôčka sa môže bez trenia pohybovať po lanku dĺžky  $2l$ , ktorého konce sú upevnené v dvoch pevných bodoch vzdialených  $2a$ . To znamená, že keby sme zmerali vzdialenosť guľôčky od jednotlivých bodov upevnenia v ľubovoľnom momente, a potom tieto vzdialenosti sčítali, dostali by sme  $2l$ . Lanko nás jednoducho ďalej nepustí. Ale to je predsa jedna z definícií elipsy!



Obr. 16: Pohyb guľôčky v rovine určenej bodmi závesu

Keď už vieme, že guľôčka sa pohybuje po časti elipsy, pokúsme sa nájsť jej analytické vyjadrenie. Body upevnenia lanka sú očividne jej ohniskami a ich vzájomná vzdialenosť je rovná dvojnásobku excentricity elipsy, teda excentricita  $e = a$ . Ďalej, keď guľôčku vychýlime do krajnej polohy, tak ľahko nahliadneme, že keby sme lanko natiahli, tak by siahalo od jedného konca elipsy k druhému, preto dĺžka hlavnej poloosi je  $\alpha = l$ .<sup>9</sup> Z Pytagorovej vety potom dĺžka vedľajšej poloosi bude  $\beta = \sqrt{\alpha^2 - e^2} = \sqrt{l^2 - a^2}$ . Zavedme kartézsku súradnicovú sústavu tak, že jej stred leží v strede medzi bodmi závesu a os  $x$  bude prechádzať týmito bodmi. Teraz už vieme napísať rovnicu elipsy, po ktorej guľôčka kmitá

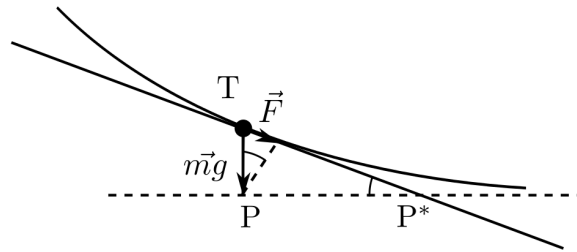
$$E: \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{l^2 - a^2} = 1.$$

Obmedzme sa opäť len na malé kmity. Vychýlime guľôčku o  $x$  z rovnovážnej polohy. Potom z rovnice elipsy dostávame  $y$ -ovú súradnicu polohy guľôčky  $y = -\sqrt{(l^2 - a^2)(1 - (x^2/l^2))}$ . Pre  $z \ll 1$  platí približný vzťah  $\sqrt{1 - z^2} \approx 1 - (z^2/2)$ . Aplikujme tento vzťah na náš výraz. Predpokladali sme totiž malé kmity, teda  $x^2/l^2 \ll 1$ , takže  $y = -\sqrt{l^2 - a^2}(1 - (x^2/2l^2))$ . Súradnice guľôčky sú potom

$$T = \left[ x; \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{2l^2} x^2 - \sqrt{l^2 - a^2} \right].$$

Vratnou silou je gravitácia, presnejšie povedané tangenciálna zložka tiažovej sily (označme ju  $\vec{F}(x)$ ). Aby sme ju mohli vyjadriť, potrebujeme poznať dotyčnicu k elipse v danom bode. Z analytickej geometrie vieme, že rovnicu dotyčnice v bode dotyku  $[x; y]$  hľadáme v tvare  $x \cdot x^*/\alpha^2 + y \cdot y^*/\beta^2 = 1$ , kde  $[x^*; y^*]$  je ľubovoľný bod ležiaci na dotyčnici. Zaujímajme sa o  $x$ -ovú súradnicu bodu dotyčnice  $P^*$ , ktorého  $y$ -ová súradnica je  $y^* = -\sqrt{l^2 - a^2}$ . Keď do rovnice dotyčnice dosadíme príslušné dĺžky poloosí, tak z nej dostaneme  $x$ -ovú súradnicu tohto bodu  $x^* = x/2$ .

<sup>9</sup>Veľkosti poloosí budeme netradične označovať gréckymi písmenami  $\alpha, \beta$  namiesto klasického značenia  $a, b$ , aby sa nám dĺžka hlavnej poloosi nepletla s polovičnou vzdialenosťou bodov závesu.



Obr. 17: Tangenciálna zložka tiažovej sily  $\vec{F}$  pôsobí v smere dotyčnice elipsy

Zrejme body T, P\* a P =  $[x; -\sqrt{l^2 - a^2}]$  tvoria pravouhlý trojuholník, ktorý je podobný s trojuholníkom určeným vektormi síl  $m\vec{g}$  a  $\vec{F}(x)$ . Z tejto podobnosti dostávame

$$\frac{F(x)}{mg} = \frac{|PT|}{|P^*T|} = \frac{(\sqrt{l^2 - a^2}/2l^2)x^2}{\sqrt{x^2/4 + x^4(l^2 - a^2)/4l^4}} = x \cdot \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{l^4 + (l^2 - a^2)x^2}}.$$

Pozrime sa na tento výraz detailnejšie. Dĺžky  $l$  a  $a$  sú porovnateľné.<sup>10</sup> Pre malé výchylky je však  $x$  rádovo menšie od  $a$  a  $l$ , takže člen  $(l^2 - a^2)x^2 \ll l^4$ , čiže ho možno voči nemu zanedbať. Potom dostávame  $F(x)/mg \approx x\sqrt{(l^2 - a^2)/l^4} = \sqrt{1 - (a^2/l^2)} \cdot (x/l)$ , odkiaľ

$$F(x) = -\underbrace{\frac{mg}{l} \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}}}_k x = -kx,$$

v čom spoznáваме rovnicu pre harmonické kmity<sup>11</sup>, ktorých periódu poznáme

$$T_{\parallel} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi l}{\sqrt{g} \sqrt{l^2 - a^2}}.$$

Zamyslime sa nad tým, v akom vzťahu musia byť periódy  $T_{\perp}$  a  $T_{\parallel}$ , aby sa guľôčka mohla pohybovať po „osmičke“. Ľahko nahliadneme, že kým guľôčka raz prekmitne v rovnobežnom smere, tak v kolmom prekmitne dvakrát, teda  $T_{\perp}/T_{\parallel} = 1/2$ . Odtiaľ dostaneme, že

$$l = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Netreba nikoho presviedčať o tom, že tento výsledok je len približný. Počas výpočtu sme použili hneď niekoľko priblížení. Navyše chyby sme sa dopustili, aj keď sme riešili pohyb samostatne pre jednotlivé smery. Nie je totiž úplne pravda, že by sa tieto dva pohyby nijako neovplyvňovali. Predstavme si, že je guľôčka práve najviac vychýlená v kolmom smere. Vratnú silu sme pre rovnobežný smer počítali zo sklonu dotyčnice. Lenže v tomto prípade má dotyčnica

<sup>10</sup>  $a \leq l$ , inak by sme lanko nedokázali zavesiť v oboch bodoch, no zároveň nemôže platiť  $a \ll l$ , pretože by záves prakticky splynul do jedného lanka a guľôčka by sa pohybovala takmer po kružnici, čiže aj v tomto smere by sme dostali matematické kyvadlo s rovnakou periódou ako v kolmom smere

<sup>11</sup> „-“ sme tam doplnili len preto, aby sme vyjadrili, že vratná sila má opačný smer než výchylka

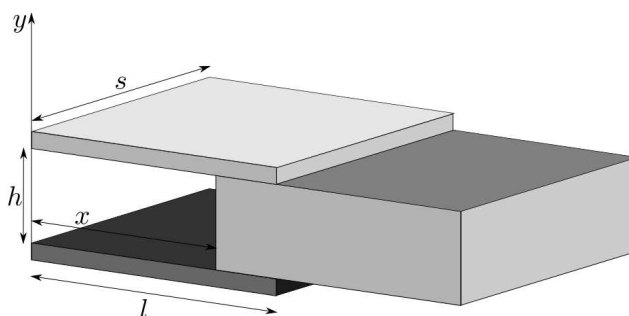


menší sklon, ako keby bola guľôčka v kolmom smere nevychýlená.<sup>12</sup> Analogicky aj vychýlenie v rovnobežnom smere spôsobuje skracovanie závesu matematického kyvadla v kolmom smere, a teda mení periódu. Našťastie pre malé kmity sú tieto rozdiely v periódach zanedbateľne malé.

## 7. Elektrosendvič (opravoval MaťoB, vzorák Marco)

Maťo sa minule hral s plošným kondenzátorom s dĺžkou  $l$  a šírkou  $s$ , ktorého dosky boli od seba vzdialené o  $h$ . Medzi doskami kondenzátora bol pôvodne vzduch. Maťo kondenzátor najskôr nabil, takže medzi doskami kondenzátora bolo napätie  $U$  a potom kondenzátor odpojil od zdroja. Maťo sa následne pokúšal do kondenzátora vložiť dielektrickú platničku s relatívnou permitivitou  $\epsilon_r$  a hrúbkou  $h$ .

Prečo a akú veľkú na to musel vynaložiť silu? Ako by sa zmenil výsledok, ak by doštička bola vo vnútri kondenzátora a Maťo by sa ju pokúšal vybrať? Zmenil by sa výsledok, ak by bol kondenzátor stále pripojený na zdroj s konštantným napätím  $U$ ?



Obr. 18: Platnička vsúvaná medzi dosky kondenzátora

Princíp, ktorý použijeme pri riešení tohto príkladu sa nazýva „Princíp virtuálnej práce“. Myšlienka tohto princípu je nasledovná. Niekde v našom systéme je uložená energia. Energia sa, ako vieme, zachováva. Teda ak je náš systém izolovaný, množstvo uchovanej energie je nemenné pokiaľ na náš systém nezačne pôsobiť externý agent. Ak sa energia systému zmenila, znamená to, že externý agent buď túto energiu prijal alebo odovzdal. Čo sa týka fyzikálneho princípu sme hotoví.

Teraz sa pozrime na tento konkrétny príklad. Naším systémom je elektrosendvič a externým agentom nie je nik iný ako Maťo. Maťo energiu systému odovzdáva/odoberá konaním práce (pozitívnej/negatívnej).

Energia v elektrosendviči je uložená v elektrickom poli.<sup>13</sup> Energiju kondenzátora poznáme zo známeho vzťahu

$$W_k = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}, \quad (1)$$

kde sme použili definíciu kapacity  $Q = CU$ , v ktorej  $Q$  je náboj na platni kondenzátora.

Kapacita nášho elektrosendviča je tiež známa

$$C = \frac{sl}{h}\epsilon_0\epsilon_r, \quad (2)$$

<sup>12</sup>Ak to nevidíte, stačí si predstaviť prípad, keď je guľôčka v kolmom smere vychýlená o  $\pi/2$ . V tom prípade je sklon dotyčnice elipsy nulový, lebo elipsa leží vo vodorovnej rovine.

<sup>13</sup>Nakoľko je medzi platňami kondenzátora napätie, je tam aj elektrické pole.

kde  $\epsilon_r = 1$  pre vzduch (teda v mieste, kde sa nenachádza dielektrická platnička).

Keď do kondenzátora vkladáme/vyberáme dielektrickú platničku, tak práve kapacita je veličina, ktorú meníme. Vzťah pre kapacitu v závislosti od hĺbky vloženia dielektrickej platničky je suma kapacít jednotlivých častí kondenzátora (princíp superpozície)<sup>14</sup>

$$C = \frac{\epsilon_0 s}{h} \epsilon_r (l - x) + \frac{\epsilon_0 s}{h} x \quad (3)$$

$$= \frac{-\epsilon_0 s}{h} (\epsilon_r - 1)x + \frac{\epsilon_0 s}{h} \epsilon_r l. \quad (4)$$

Nazvime energiu v kondenzátore  $W_k$  a pozrime sa, ako sa mení v závislosti od hĺbky zasunutia dielektrickej platničky. Ako sme už spomenuli, Maťo koná prácu, ktorá mení energiu kondenzátora. Keď Maťo pôsobí silou po infinitezimálnej dráhe  $dx$ , práca, ktorú vykoná, je

$$dW_k = F_M dx \quad (5)$$

$$F_M = \frac{dW_k}{dx}. \quad (6)$$

Ak je batéria odpojená, na platniach zostáva konštantný elektrický náboj  $Q$ . Zo vzťahu pre energiu teda dostávame

$$\frac{dW_k}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx}, \quad (7)$$

kde  $U$  je napätie v momente, keď Maťo začína hýbať s platničkou (keďže napätie nie je konštantné, ani sila nie je počas pohybu konštantná).

Zo vzťahu (4) vieme, že

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) s}{2h}. \quad (8)$$

A teda sila, ktorú Maťo vynaloží je

$$F_M = +\frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) s}{2h} U^2. \quad (9)$$

Keďže  $\epsilon_r \geq 1$ , sila, ktorou Maťo musí pôsobiť je v smere zväčšenia  $x$ . Teda dielektrická platnička je vždy vťahovaná do kondenzátora. Toto je nezávislé od toho, či platničku vkladáme alebo vyberáme. Z energetického hľadiska je to ľahké vidieť - keď je platnička vo vnútri, energia kondenzátora je menšia  $\epsilon_r$ -krát.

Ak by bol kondenzátor pripojený na zdroj s konštantným napätím  $U$ , napätie na kondenzátore ostáva konštantné a mení sa náboj na kondenzátore. Podstatné je si uvedomiť, že v takomto prípade zdroj tiež koná prácu (keďže musí posúvať elektrický náboj). Celková práca teda je

$$dW_k = F_M dx + U dQ \quad (10)$$

$$F_M = \frac{dW}{dx} - U \frac{dQ}{dx} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx} - U^2 \frac{dC}{dx} \quad (12)$$

$$= -\frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx}. \quad (13)$$

<sup>14</sup>Kto neverí, nech si to poráta poriadne.

A toto je rovnaký výsledok ako predtým (sila závisí od rozmiestnenia náboja). Pre zaujímavosť, sila, ktorá pôsobí na dielektrickú platničku, je spôsobená zakriveným elektrickým poľom na konci platní kondenzátora. Toto elektrické pole je veľmi ťažké spočítať, avšak ako to už často býva aj tentokrát pomohol rozumný trik.