Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Nový bufetár

vzorák **Lucka** a **Denda**, opravovala **Lucka**

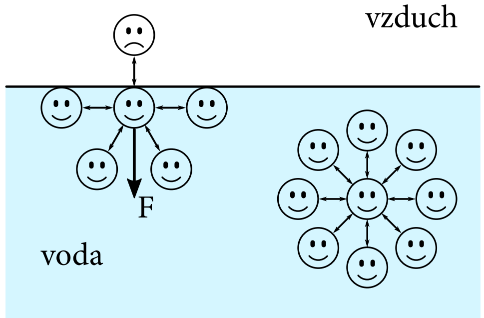
Na začiatok by sme Kuba radi upozornili, že nie je pravda, že by bubliny z vody vôbec neexistovali. Skúste si napríklad napustiť vodou nejakú nádobu. Počas celého tohto procesu je možné takéto bublinky na hladine pozorovať (obr. 1). Problém je však v tom, že zaniknú veľmi rýchlo. Keď zopakujeme tento experiment s mydlovou vodou, bublinky vydržia neporovnateľne dlhšie.

Proti existencii bubliniek z vody by sme ale stále mohli argumentovať tým, že za uspokojujúcu bublinu z vody považujeme len takú vznášajúcu sa vo vzduchu. Takú pravdepodobne nikto z vás nikdy nepozoroval. Ale naozaj také neexistujú? Popravde, astronauti to šťastie pozorovať ich mali – dúfam, že ako dôkaz postačí toto alebo toto video. Poďme sa pozrieť, aká sa za bublinkami skrýva fyzika a následne sa pokúsiť tieto pozorovania vysvetliť.

Obrázok 1: *Bublinky vody pri napúšťajúcom sa umývadle*

Začnime vysvetlením fyzikálneho javu zvaného *povrchové napätie*. Molekuly vody sa navzájom priťahujú medzimolekulovými silami. Výslednica týchto síl na molekulu vo vnútri kvapaliny je nulová, pretože sila od molekúl je zo všetkých smerov rovnaká. Ak sa ale molekula nachádza na povrchu, výslednica všetkých síl už nulová nie je. Molekuly vzduchu sa totiž majú s molekulami vody menej radi než molekuly vody navzájom a preto výslednica medzimolekulových síl pôsobiacich na molekulu na povrchu bude kolmá na povrch kvapaliny, a orientovaná smerom do vnútra (viď obrázok 2).

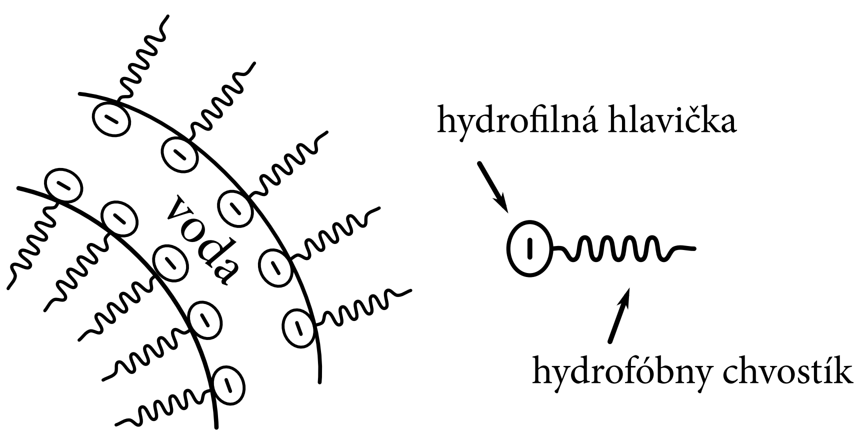
Na premiestnenie molekúl do povrchovej vrstvy je teda potrebné vykonať prácu, a teda molekulám na povrchu prislúcha aj väčšia energia. Celkovo sa ukáže, že prírastok energie za tieto molekuly na povrchu – *povrchová energia* – bude priamo úmerný ploche S: $E = \sigma \cdot S$, kde konštanta úmernosti σ (čo je v tomto prípade aj plošná hustota energie) je charakterizovaná tým, aké látky tento povrch oddeľuje a nazýva sa *povrchové napätie* (napr. pre vodu v styku so vzduchom pri 20 °C je $\sigma_{H_2O} = 0{,}072$ N/m, pre mydlovú vodu v styku so vzduchom to zvykne byť zhruba $\sigma_{H_2O}/3$). Snaha minimalizovať energiu prirodzene spôsobuje, že povrchová vrstva sa správa ako pružná blana snažiaca sa stiahnuť na plochu s najmenším obsahom. Povrchové napätie je teda tiež dobrou mierou kontraktívnej tendencie kvapalín umožňujúcej odporovať deformáciám spôsobeným vplyvom vonkajších síl.



Obrázok 2: *Medzimolekulové sily*

Môže byť ale fakt, že na zemi pozorujeme bublinky z mydlovej vody ale nie z čistej vody, spôsobený čisto tým, že bublinke s rovnakým povrchom z čistej vody prináleží približne trikrát väčšia povrchová energia? Koncept s povrchovou energiou sa v nulovej gravitácii nezmení a vodové bubliny tam pozorovať vieme a vyzerajú aj celkom stabilne. Samozrejme, bublina nie je stavom s najmenšou energiou, ale to nie je ani v prípade mydlovej vody. Vždy sa viac oplatí kvapka. Netvrdíme, že mať menšiu energiu nie je výhodou, ale keďže takéto zdôvodnenie nie je samo o sebe presvedčivé a je ťažké ho dokázať, poďme sa pozrieť, či pes nie je zakopaný aj v niečom inom.

Čím iným je mydlo ešte špeciálne? Svojou štruktúrou. Molekuly mydla, ako to už u tenzidov (angl. surfactant) býva, sa skladajú z 2 častí – hydrofilnej hlavičky, ktorá má rada vodu, a hydrofóbneho chvostíka, ktorý chce byť od vody čo najďalej. Je teda prirodzené, že týmto molekulám sa po pridaní do vody bude na povrchu páčiť (chvostíky sa tam vyhnú kontaktu s vodou). Efektívne sa teda v prípade bubliny vytvorí vrstvenie mydlo-voda-mydlo (viď obr. 3), ktoré jednak chráni bublinu pred rýchlym vyparovaním a stenčovaním vonkajšej vrstvy a dvak zníži povrchové napätie a tým aj energiu, vďaka tomu, že molekuly mydla prebýjajúce sa na povrch odseparujú molekuly vody navzájom a vzdialenejšie molekuly vody sa priťahujú slabšími silami.[1]



Obrázok 3: *Štruktúra mydlovej bubliny a hydrofilná a hydrofóbna časť mydlovej molekuly*

[1] Priznávame, že toto vysvetlenie je silne odmávané rukami. Je veľmi ťažké prediskutovať, aké presne rozloženie mydlových molekúl a molekúl vody pri povrchu bude a aké sily medzi nimi navzájom pôsobia. Molekuly mydla sa budú pravdepodobne navzájom trochu odpudzovať, keďže ich hlavičky majú vo vode negatívny náboj, ale vďaka nemu sa pravdepodobne zvládnu viazať vodíkovými mostíkmi na molekuly vody. V každom prípade, ako experimentálne pozorujeme, celková sila ťahajúca molekulu na povrchu do vnútra sa zníži zhruba na tretinu.

Veľmi dôležitý vplyv má aj Marangoniho efekt. Marangoniho efekt nastáva, keď sa na hladine kvapaliny vyskytnú dve oblasti s rozdielnym povrchovým napätím (napríklad keď sa na dve miestach bude líšiť koncentrácia (percentuálne množstvo) mydlových molekúl). Keďže v oblasti s vyšším povrchovým napätím pôsobia vyššie kontraktívne sily, molekuly na rozhraní týchto oblastí budú silnejšie ťahané do časti s vyšším povrchovým napätím.

Ak teda napríklad do pohára s vodou kvapneme kvapku mydla, mydlo lokálne zníži povrchové napätie a preto sa vytvorí prúd molekúl, ktorý smeruje smerom od časti kvapaliny s nižšou hodnotou povrchového napätia (miesto s mydlom) do časti s vyššou hodnotou povrchového napätia. Takýto proces sa deje, kým sa povrchové napätie na kvapaline nevyrovná, a teda kým molekuly mydla nie sú rozmiestnené rovnomerne po celej hladine.

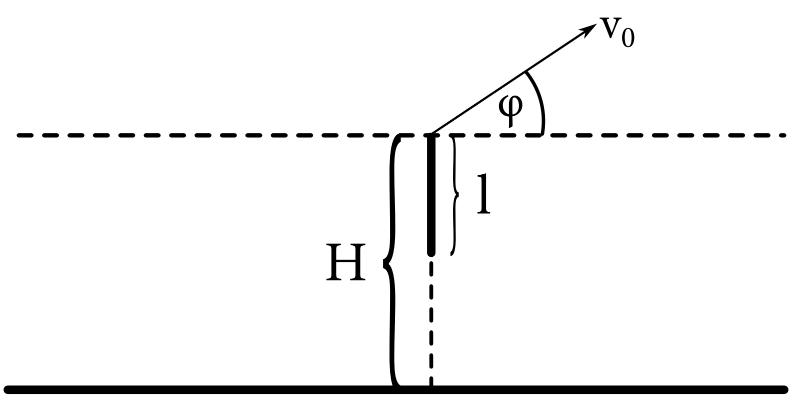
Názornú ukážku, ako sa spolu s molekulami vody v smere tohto nárastu pohybujú častice čierneho korenia si môžete pozrieť napríklad tu. Aká je užitočnosť tohto javu pre mydlovú bublinu? Keď sa povrchová vrstva natiahne, povrchová koncetrácia mydlových molekúl poklesne, čím narastie povrchové napätie. Mydlo teda selektívne posilňuje najslabšie časti bubliny a bráni ich výraznejšiemu naťahovaniu.

V čom sú teda mydlové bubliny špeciálne? Stoja nás menej energie, pomalšie sa odparujú a vďaka Marangoniho efektu posilňujú svoje najslabšie časti. A ako môžete pozorovať napríklad tu, mydlové bubliny sú vo výsledku aj celkom odolné.

1.2 Horiace UFO-mikiny?

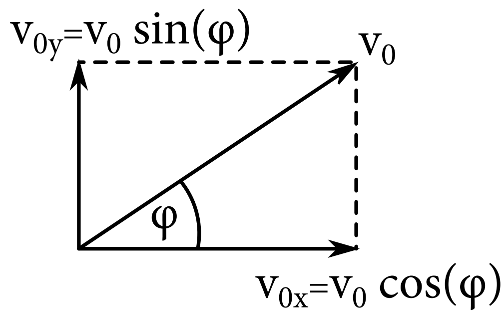
vzorák **Hovorca**, opravoval **Hovorca**

Z rotačnej symetrie úlohy je jasné, že sa nám stačí pozerať na prskavku iba v jednej z rovín obsahujúcich jej os. Vo zvyšku priestoru to bude vyzerať rovnako. Poďme sa pozrieť, ako vyzerá trajektória letu iskry, ktorá vyletí v prvom momente zapálenia prskavky ($t_0 = 0$ s), v závislosti od uhla φ, pod akým vyletí z prskavky. Definujme uhol φ tak, že $\varphi = 0$, ak iskra vyletí kolmo na prskavku, teda v smere osi x a teda sa budeme pozerať na uhol φ z intervalu $(0; 2\pi)$. Zároveň zaveďme súradnicovú sústavu s počiatkom na zemi presne pod prskavkou. Vrchol prskavky v nej má teda súradnice $[0; H]$.



Obrázok 4: *Náčrt*

V dôsledku nenulovej počiatočnej rýchlosti v_0 iskry a pôsobenia gravitačnej sily koná iskra pohyb, ktorý nazývame šikmý vrh. Tento pohyb sa vlastne skladá z dvoch pohybov – rovnomerného priamočiareho v smere osi x s počiatočnou rýchlosťou v_{0x} a vrhu nahor s počiatočnou rýchlosťou v_{0y}, pričom v_{0x} a v_{0y} sú zložky vektora rýchlosti v smeroch osí x a y. Zjavne platí $\overrightarrow{v_{0x}} + \overrightarrow{v_{0y}} = \overrightarrow{v_0}$. Potom ale podľa obrázka $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\varphi$ a $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\varphi$.



Obrázok 5: *Rozkladanie vektora rýchlosti na zložky v smere osí*

Pozrime sa teraz na jednotlivé pohyby. V smere osi x sa iskra hýbe rovnomerne priamočiaro, x-ovú súradnicu iskry v čase t teda zistíme pomocou vzťahu: $x(t) = x_0 + v_{0x}t$. Keďže začiatok súradnicovej sústavy sme si postavili pod prskavku, $x_0 = 0$ a teda $x(t) = v_0 t \cos\varphi$.

V smere osi y ide o vrh nahor, čo je vlastne rovnomerne premenný priamočiary pohyb (iskru spomaľuje alebo zrýchľuje gravitačné zrýchlenie podľa toho, či práve stúpa alebo klesá). Môžeme ho teda popísať známym vzťahom pre y-ovú súradnicu iskry v čase t:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Dôležité je uvedomiť si, že gravitačné zrýchlenie má smer nadol, čiže proti rastu y-ovej súradnice – preto pred posledný člen v rovnici musíme písať mínus. Vieme, že počiatočná výška, z ktorej iskra vyletí, je $y_0 = H$, a teda platí

$$y(t) = H + v_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2.$$

Máme teda dve rovnice pre súradnice iskry v čase t, takže už vieme, kde sa takáto iskra nachádza v každom čase. Ak však z prvej rovnice vyjadríme čas t a dosadíme do druhej, dostaneme po úpravách vzťah

$$y = H + x\tan\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\varphi}.$$

Dodajme ešte, že keďže $\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \tan^2\varphi$,[2] rovnica sa dá napísať aj v tvare

$$y = H + x\cdot\tan\varphi - gx^2\frac{1+\tan^2\varphi}{2v_0^2}. \tag{1.2.1}$$

Teda už vieme nakresliť trajektóriu iskry v závislosti od uhla φ, pod ktorým vyletela z prskavky – bude to parabola. Zaujíma nás, ako vyzerá oblasť, do ktorej sú iskry vrhané. Hľadáme teda takú nejakú krivku (volajme ju hraničná krivka), pod ktorou (alebo na ktorej) ležia všetky body všetkých nami popísaných parabôl pre každý uhol φ. Všetky nami popísané paraboly sú konkávne (majú pred kvadratickým členom znamienko mínus). Ak by hraničná krivka bola sečnicou ľubovoľnej paraboly, existoval by úsek tejto paraboly, ktorý by hraničná krivka už neohraničovala – teda by to nebola dobrá hraničná krivka. Hraničná krivka musí byť teda dotyčnicou ku každej z parabol – patrí jej vždy iba jeden bod každej paraboly.

[2] dôkaz tejto rovnosti prenecháme čitateľovi

Pozrime sa ešte raz na rovnicu 1.2.1. Mohli by sme sa na ňu pozerať aj ako na kvadratickú funkciu s premennou $\tan\varphi$. Každý bod hraničnej krivky musí byť zasiahnutý práve jednou iskrou, ktorej prislúcha práve jeden uhol φ. Hľadáme teda body, pre ktoré má táto rovnica ako závislosť na uhle φ (a teda aj na $\tan\varphi$) práve jedno riešenie. A keďže je to rovnica kvadratická, jedno riešenie má vtedy, keď jej diskriminant je rovný nule. Týmto uvedomením po úprave dostávame rovnicu

$$y = H + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \tag{1.2.2}$$

Uvedomme si pritom, že pre každý uhol φ skutočne existuje taký bod, ktorý sa dotýka hraničnej krivky (niekedy leží na tej časti paraboly, po ktorej samotná iskra nepoletí). Preto sme museli riešiť rovnicu závislosti od uhla φ (respektíve jeho tangensu), aby sme našli *všetky* takéto body.

Takto vyzerá rovnica hraničnej krivky v prípade, že sa pozeráme len na iskry, ktoré sú vrhané z úplného vrchu prskavky. Ak sa posunieme po prskavke nadol o dĺžku k, rovnakými úvahami dostaneme hraničnú krivku

$$y = (H-k) + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Graf tejto krivky sa voči pôvodnej hraničnej krivke už len posunie smerom nadol o k a teda leží v oblasti pod pôvodnou hraničnou krivkou. Preto skutočne vyššie opísaná rovnica 1.2.2 ohraničuje oblasť, do ktorej sú iskry vrhané. V rovine má oblasť tvar plochy pod parabolou, v priestore teda pôjde o teleso zvané rotačný paraboloid.

Zostáva už len ukázať, že iskry sa dostanú do ľubovoľného bodu pod krivkou. Povedali sme, že iskry sa dostanú do všetkých bodov popísaných rovnicou 1.2.1. A keďže funkcia tangens je spojitá na intervale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ aj na intervale $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, čo zodpovedá všetkým našim uhlom φ okrem $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, tieto krivky určite prejdú všetkými bodmi pod krivkou okrem tých, ktoré ležia priamo pod prskavkou (čo dáva zmysel). Body ležiace priamo pod prskavkou pokryje iskra, ktorá vyletí kolmo nahor a vráti sa tam, odkiaľ vyletela.

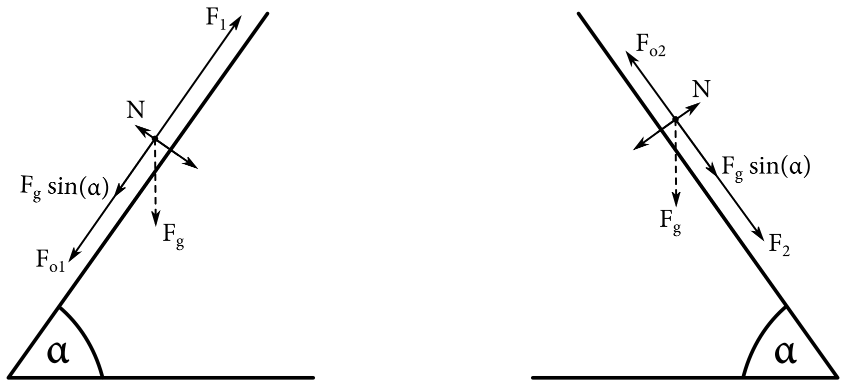
Ak by ste mali záujem o simuláciu toho, ako situácia vyzerá, neváhajte si otvoriť túto a trochu sa v nej pohrať.

1.3 Tour de Vígľaš

vzorák **Katka**

Predpokladajme, že sa Jaro na kopec teperí konštantnou rýchlosťou (a rovnako z kopca letí dole konštantne rýchlo). Jeho výkon ostáva po celý čas taktiež konštantný, teda platí $P = F_1v_1 = F_2v_2$. Poznáme čas výstupu t_1, čas zostupu t_2 a celkovú prejdenú dráhu, ktorej polovice potom budú trasy prejdené po kopci nahor a nadol. Označme si ich s.

Pri jeho jazde na Jara pôsobia 3 sily: tiažová sila F_g, sila, ktorú vykonáva samotný Jaro F a odporová sila vzduchu F_o. Odporová sila vzduchu je $F_o = \frac{1}{2}CS\rho v^2 = kv^2$, kde k je nejaká konštanta, ktorou sa budeme zaoberať neskôr.



Obrázok 6: *Obe strany Jarovho kopca*

Začnime s výstupom nahor. Výslednica síl bude $F_1 - F_g \sin(\alpha) - F_{o1} = ma_1$. Keďže ale Jaro udržiava konštantnú rýchlosť, jeho celkové zrýchlenie bude nulové, a teda

$$F_1 = F_{o1} + F_g \sin\alpha = kv_1^2 + mg\sin\alpha.$$

Silu F_1 si vieme vyjadriť cez výkon, ako $F_1 = \frac{P}{v_1}$ a keďže ide o pohyb rovnomerný, rýchlosť v_1 si vyjadríme ako $v_1 = \frac{s}{t_1}$. Zostup nadol bude podobný. Výslednica síl bude $F_2 + F_g \sin\alpha - F_{o2} = ma_1 = 0$, takže

$$F_2 = F_{o2} + F_g \sin\alpha = kv_2^2 - mg\sin\alpha,$$

pričom $F_2 = \frac{P}{v_2}$ a $v_2 = \frac{s}{t_2}$. Po dosadení budeme riešiť sústavu dvoch rovníc

$$\frac{P}{\frac{s}{t_1}} = k\left(\frac{s}{t_1}\right)^2 + mg\sin\alpha,$$

$$\frac{P}{\frac{s}{t_2}} = k\left(\frac{s}{t_2}\right)^2 - mg\sin\alpha.$$

a zistíme, že sklon kopca bude

$$\alpha = \arcsin\frac{k\left(v_2^3 - v_1^3\right)}{2mg}.$$

Nastal čas povenovať sa konštante $k = \frac{1}{2}CS\rho$. C je koeficient aerodynamického odporu. Keď si Jara na bicykli aproximujeme na kváder s rozmermi 0,6 m × 1,6 m × 0,4 m, tak $C \approx 2{,}1$. S je čelný prierez telesa, v našom prípade to bude $S = 0{,}24\ \mathrm{m}^2$. ρ je hustota prostredia, pre vzduch izbovej teploty $\rho \approx 1{,}2\ \mathrm{kg/m}^3$. Nech má Jaro 80 kg.

Po dosadení číselných hodnôt do vzorca dostávame $\alpha \approx 6{,}7°$.

1.4 Nie až tak jednoduché stroje

vzorák **Marcel**, opravoval **Marcel**

Skôr, než začneme merať, si skúsme povedať, prečo by tam vôbec nejaká sila brzdiaca lano mala byť. Sila, ktorá brzdí lano, je trecou silou, a keďže nás zaujíma trenie pri pohybe lana, zaujíma nás šmykové trenie.

Ako by sme chceli trenie zmerať? Potrebujeme, aby sa závažie a aj celé lano hýbalo takým spôsobom, aby sme vedeli zistiť silu, ktorá by mala na závažie pôsobiť. Napríklad to vieme urobiť tak, že sa závažie bude hýbať rovnomerným priamočiarym pohybom, pričom by sme mali za lano ťahať silou F_g. Kvôli trecej sile budeme ale za lano ťahať menšou silou ako F_g, a tento rozdiel je rovný trecej sile. Keďže ale „ťahať za lano tak, aby sa závažie hýbalo rovnomerný priamočiarym pohybom“ nie je jednoduché urobiť presne, musíme si nájsť nejaký iný pohyb, pri ktorom vieme veľkosť trecej sila vypočítať.

Pohyb, ktorý hľadáme, je pád. Vieme jednoducho vypočítať, alebo aj odmerať, ako dlho by malo závažie padať na zem, ak by padalo voľným pádom. V prípade, ak si odmeriame ako dlho bude závažie padať s tým, že sa bude lano dotýkať valca, vieme vypočítať, aká veľká je sila, ktorou valec lano brzdí. Ako to vypočítať? Poznáme časy, za ktorý dopadne teleso na zem, s tým, že na neho pôsobí len tiažová sila, a s tým, že na neho pôsobí aj tiažová, aj trecia sila.

Úlohu sme chceli merať tak, že sme zistili ako dlho padá brzdené závažie, a chceli sme z tohoto údaju na základe toho, ako by podľa výpočtov malo padať závažie vypočítať, ak by padalo voľným pádom vypočítať, akou silou bolo brzdené. Bohužiaľ, po prvých výpočtoch z nameraných údajov bolo jasné, že to takto nepôjde, z dôvodu, že ak by nebolo ničím brzdené, tak by nepadalo voľným pádom, ale bolo by brzdené dlhým lanom, na ktorom bolo zavesené.

Keďže pre výšku pádu h, zrýchlenie pádu a, závažie hmotnosti m, a čas pádu t platí

$$F = ma \qquad \text{a zároveň} \qquad h = \frac{1}{2}at^2,$$

musí platiť

$$F = \frac{2mh}{t^2}.$$

Silu v prípade, keď lano nič nebrzdí, si označme F_g. Potom

$$F_g = \frac{2mh_{\text{nebrzdené}}}{t^2_{\text{nebrzdené}}}.$$

V prípade, že je lano brzdené trecou silou (označenou F_t), dostávame

$$F_{\text{brzdená}} = F_g - F_t = \frac{2mh_{\text{brzdené}}}{t^2_{\text{brzdené}}},$$

z čoho už jednoducho dostaneme

$$\begin{aligned} F_t &= \frac{2mh_{\text{nebrzdené}}}{t^2_{\text{nebrzdené}}} - \frac{2mh_{\text{brzdené}}}{t^2_{\text{brzdené}}} \\ &= 2m\left(\frac{h_{\text{nebrzdené}}}{t^2_{\text{nebrzdené}}} - \frac{h_{\text{brzdené}}}{t^2_{\text{brzdené}}}\right). \end{aligned}$$

K samotnému meraniu: Najskôr sme zistili ako dlho padá závažie, ak sa lano ničoho nedotýka, a potom sme postupne merali ako dlho to trvá, kým dopadne závažie pri rôznych dĺžkach úseku, na ktorom sa lano a valec dotýkajú. Ako závažie boli použité dve fľaše s objemom 3 dl, a váhou 0,641 kg. Aby sme zväčšili trenie, a tým minimalizovali chyby merania, na oceľovú rúrku sme namotali brúsny papier zrnitosti 180. Výsledný priemer rúrky aj s brúsnym papierom bol potom 62,43 mm.

Merania pre rôzne dĺžky úseku, kde sa lano dotýka valca

Tabuľka 1: *Bez dotyku s valcom (kvôli meraniu F_g)*

Č.	výška	čas	F_g
1.	0,62 m	0,39 s	5,24 N
2.	0,63 m	0,37 s	5,93 N
3.	0,58 m	0,31 s	7,82 N
4.	0,60 m	0,34 s	6,68 N
Priemer			**6,42 N**

Z toho priemerného F_g sme na základe nameraných síl, ktoré pôsobia na závažie, vypočítali silu, ktorou sú závažia brzdené.

Tabuľka 2: *Štvrť obvodu (d = 49,03 mm)*

Č.	výška	čas	$F_g - F_t$	F_t
1.	0,57 m	0,38 s	5,06 N	1,36 N
2.	0,61 m	0,38 s	5,45 N	0,97 N
3.	0,71 m	0,43 s	4,92 N	1,49 N
4.	0,61 m	0,37 s	5,71 N	0,70 N
5.	0,72 m	0,40 s	5,82 N	0,59 N
Priemer				**0,93 N**

Tabuľka 3: *Polovica obvodu (d = 98,06 mm)*

Č.	výška	čas	$F_g - F_t$	F_t
1.	0,7 m	0,45 s	4,46 N	1,95 N
2.	0,71 m	0,43 s	4,98 N	1,43 N
3.	0,70 m	0,44 s	4,66 N	1,76 N
4.	0,71 m	0,48 s	3,99 N	2,42 N
5.	0,7 m	0,45 s	4,47 N	1,94 N
6.	0,7 m	0,46 s	4,24 N	2,18 N
7.	0,71 m	0,45 s	4,49 N	1,93 N
Priemer				**1,94 N**

Tabuľka 4: *Tri štvrtiny obvodu (d = 147,10 mm)*

Č.	výška	čas	$F_g - F_t$	F_t
1.	0,59 m	0,50 s	3,02 N	3,39 N
2.	0,69 m	0,48 s	3,85 N	2,56 N
3.	0,65 m	0,46 s	3,93 N	2,48 N
4.	0,67 m	0,46 s	4,05 N	2,36 N
5.	0,75 m	0,49 s	4,01 N	2,40 N
Priemer				**2,64 N**

Tabuľka 5: *Celý obvod (d = 196,13 mm)*

Č.	výška	čas	$F_g - F_t$	F_t
1.	0,65 m	0,80 s	1,31 N	5,10 N
2.	0,54 m	0,48 s	3 N	3,41 N
3.	0,72 m	0,60 s	2,58 N	3,83 N
4.	0,75 m	0,84 s	1,36 N	5,05 N
5.	0,74 m	0,50 s	3,81 N	2,60 N
6.	0,67 m	0,51 s	3,32 N	3,09 N
7.	0,73 m	0,54 s	3,23 N	3,18 N
Priemer				**3,75 N**

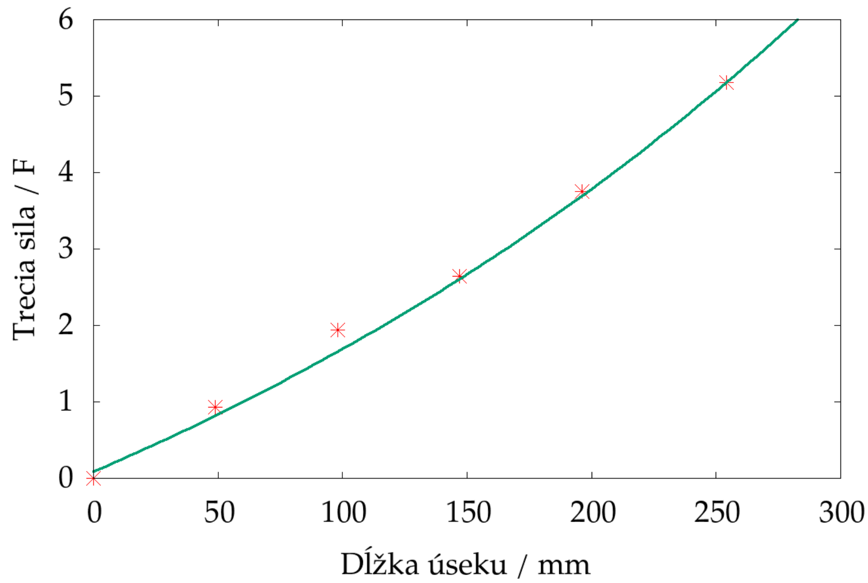
Tabuľka 6: *Jeden a štvrť obvodu (d = 254,16 mm)*

Č,	výška	čas	$F_g - F_t$	F_t
1.	0,77 m	0,95 s	1,09 N	5,32 N
2.	0,76 m	0,80 s	1,53 N	4,88 N
3.	0,65 m	0,75 s	1,49 N	4,92 N
4.	0,74 m	1,07 s	0,83 N	5,58 N
Priemer				**5,18 N**

Tabuľka 7: *Výsledná tabuľka priemerných nameraných hodnôt*

Dĺžka dotýkajúceho sa úseku	Sila, ktorou je brzdené lano
0 mm	0 N
49,03 mm	0,93 N
98,06 mm	1,94 N
147,10 mm	2,64 N
196,13 mm	3,75 N
254,16 mm	5,18 N

Z týchto meraní sme následne urobili graf:



Obrázok 7: *Graf nameraných hodnôt závislosti sily od dĺžky úseku a exponenciálny fit*

Podľa grafu to vyzerá, že trecia sila je približne exponenciálne závislá na dĺžke úseku, kde sa lano dotýka valca.

Ku koncu riešenia experimentálky sa zvyknú uvádzať chyby merania. Inak tomu nebude ani teraz. Váhu závažia sme odmerali s presnosťou na ±1 g. Priemer trubky sme merali mikrometrom s presnosťou na ±0,01 mm. Čas dopadu sme zisťovali z videa pomocou programu *Tracker*, ktoré pochádzalo z kamery so snímkovacou frekvenciou 100 fps. Výšku, z ktorej závažie padalo sme zisťovali tiež z videa, rovnako pomocou *Trackeru*, interpoláciou na základe zmeranej výšky hornej hrany rúrky.

Najvýraznejšia chyba merania je podľa nás to, že sa lano popri tom, ako závažie padalo rôzne vlnilo, a keďže sme sa ho snažili pridržiavať, aby sa dotýkalo stále na rovnako veľkom úseku, mohli sme ho niekedy spomaľovať. Toto spomalenie bolo ale približne pri všetkých meraniach rovnaké, takže výslednú závislosť neovplyvní.

Ako druhú najväčšiu chybu merania by sme ale okrem toho, že že so snímkovacou frekvenciou 100 fps vedela naša kamera nahrávať len v rozlíšení 960p (ktoré je síce dostatočné, ale mohlo by byť lepšie), považoval to, že nie vždy sa nám podarilo pustiť lano naraz, ale to púšťanie niekedy mohlo byť postupné. Táto chyba síce nie je veľká, ale pri takto presne nameraných ostatných údajoch je výrazná.

Ďalšia vec, ktorá výrazným spôsobom ovplyvňovala presnosť merania bola, že ako sa lano trelo o brúsny papier, trhali sa jednotlivé vlákna lana, ktoré sa zachytávali do brúsneho papiera, a ovplyvňovali merania náhodným spôsobom podľa toho, koľko vlákien sa do brúsneho papiera zachytilo.

1.5 Presun eráru

vzorák **Kubo**, opravoval **Kubo**

Tuhosť pružiny je naozaj veľmi jednoduchý koncept. Už jej jednotka N/m nám napovedá, že pôjde o silu, ktorou by sme mali ťahať, aby sme pružinu predĺžili o 1 m. Poďme sa pozrieť, ako sa budú pružinky správať pri ich sériovom a paralelnom zapojení!

Vieme, že tuhosť k vyjadríme ako $\frac{F}{x}$, kde F je sila a x predĺženie.

Ak *zapojíme za seba, teda sériovo* n pružiniek s tuhosťou $k_1, k_2, \ldots, k_n$ za seba, novú tuhosť nazvúc k_s, vieme, že pri rovnakej sile (na všetky skutočne pôsobím rovnakou silou) sa nám i-ta z nich predĺži o $\frac{F}{k_i}$, teda spolu sa predĺžia o $F \cdot \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n}\right)$. Môžeme teda vyjadriť, že $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n} = \frac{x}{F}$, čo je ale prevrátenou hodnotou tuhosti, teda $\frac{1}{k_s}$. Potom však vieme, že $k_2 s = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n}}$.

Pri *paralelnom zapojení, teda za sebou* môžeme k vyjadreniu novej tuhosti k_p vzniknuvšieho súpružinia využiť elementárne pozorovanie, že pri predĺžení o x pôsobí i-ta pružinka silou $k_i x$. Teda v súčte vieme povedať, že $F = k_1 x + k_2 x + \ldots + k_n x = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)x$. Opäť vieme úpravou dostať tvar vyjadrujúci $\frac{F}{x}$, teda celkovú tuhosť paralelného súpružinia: $\frac{F}{x} = k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k_p$

Naša sústava sú teda sériovo zapojené tri celky - dva razy jedna pružina a medzi tým jedno paralelné súpružinie a všetky pružinky majú tuhosť k. Poďme si to teda rozpísať! $k_c = \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{k+k+k} + \frac{1}{k}} = \frac{1}{\frac{3+1+3}{3k}} = \frac{3}{7}k$

Tuhosť sústavy je teda

$$k\,\mathrm{N}\frac{7}{3}\,\mathrm{m} = \frac{3}{7}k\,\mathrm{N/m}.$$

1.6 Viac ako hádka

vzorák **Adam**, opravoval **Adam**

Aj keď výpočet, na ktorý sa tento príklad zvrhne, je jednoduchý, myšlienky, ktoré k nemu vedú, sú nie vždy ľahko uchopiteľné alebo sformulovateľné. Ukazuje sa, že jazyk popisujúci náš problém je výrazne jednoduchší, ak si zvolíme vhodnú vzťažnú sústavu, a to takú, v ktorej cievka stále stojí.

Tu už to vyzerá jednoducho. Oproti prípadu neroztáčanej cievky pribúdajú fiktívne sily. Menovite Eulerova, a po dosiahnutí nenulovej uhlovej rýchlosti našej vzťažnej sústavy vzhľadom na laboratórnu aj Huygensova (odstredivá) a Coriolisova. Dá sa ľahko vidieť, že odstredivá (ako napovedá jej meno) bude elektróny urýchľovať von z cievky, čo už ale statočne vykompenzujú atomárne sily.

Nápodobne Coriolisova sila si pre cievku z tenkého drôtu nezahrá veľkú rolu, keďže pôsobí kolmo na rýchlosť elektrónov, a tá musí byť v ustálenom móde vždy v smere drôtu, a teda sila bude vykompenzovaná rovnakým princípom ako odstredivá. Ostáva prvá uvedená z fiktívnych síl. Jej veľkosť pre elektrón je:

$$F = m_e r \varepsilon,$$

kde r je vdialenosť elektrónu od osi otáčania (~ polomer cievky) a ε je uhlové zrýchlenie vzťažnej sústavy. Smer tejto sily je kolmo na spojnicu elektrónu s osou a zároveň v rovine kolmej na os otáčania. To je v priblížení husto vinutej cievky smer približne rovnobežný s vinutím cievky na danom mieste.

V tomto momente sme už veľmi blízko k prúdu v cievke. Keďže na elektrón v cievke pôsobí konštantná sila v smere drôtu, a to všade v cievke, vieme, že ak by ňou prešiel celou, musela by na ňom byť vykonaná práca:

$$W = Fl = m_e r \varepsilon l,$$

kde l je dĺžka drôtu z ktorého je cievka. Takže možno zaviesť napätie:

$$U = \frac{W}{q_e} = \frac{m_e}{q_e} r l \varepsilon,$$

a teda cievkou bude tiecť prúd

$$I = \frac{U}{R} = \frac{m_e}{q_e}\frac{r\varepsilon}{\lambda}.$$

Zadanie sa ale pýta na potrebné uhlové zrýchlenie, ktoré stačí vyjadriť ako

$$\varepsilon = \frac{q_e}{m_e}\frac{\lambda I}{r}.$$

Podotkýname, že na nami zavedené napätie sa dá pozerať ako na čisto len zneužitie jazyka zo sveta elektromagnetizmu na popis čisto mechanickej záležitosti. Prečo sme to celé robili? Pretože v jazyku napätia je formulovaný nami použitý Ohmov zákon, ktorý popisuje presne to čo nám bolo treba na vyriešenie úlohy, a to interakciu pohybujúcich sa (pod vplyvom sily) elektrónov vo vodiči.

Komentár

Treba uznať, že zadanie nie úplne zvládlo posunúť informáciu, aká presne je úloha. Formulácia bola nepresná a silno sugestívna nevhodným smerom, takže sa objavilo viacero riešení, ktoré riešili čosi výrazne iné. Hodnotenie bolo v tomto smere jemné, ale aj tak boli plným počtom bodov ohodnotené len správne riešenia zamýšľaného zadania, keďže pre iné vyloženie zadania sa podľa názoru opravovateľa dalo rýchlo dospieť k názoru, že je nezmyselné.

1.7 Model slnečnej sústavy

vzorák **Terka**, opravovala **Terka**

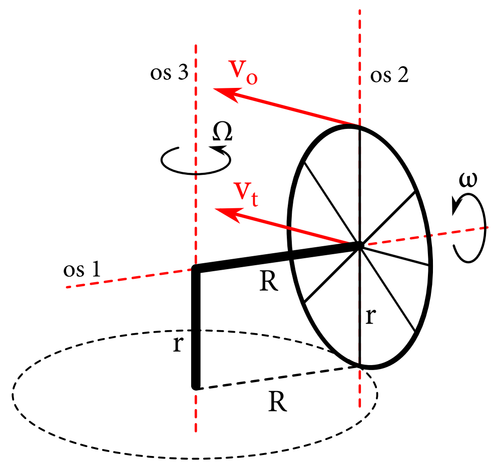
Táto úloha na prvý pohľad nevyzerala veľmi vábne, no v skutočnosti to vôbec nebolo také bolestivé. Ako prvé si uvedomíme, že forma kinetickej energie bude v tomto prípade rotačná, ktorú vypočítame ako $\frac{1}{2}I\omega^2$, kde I je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na nejakú os a ω je uhlová rýchlosť okolo tejto osi. Máme tu dva rotačné pohyby: jeden očividný, a to otáčanie kolesa okolo vlastnej osi uhlovou rýchlosťou ω a druhý pozostáva z otáčania tyče dĺžky R spolu s kolesom okolo tyče dĺžky r. Zo zadania vieme, že počas druhého pohybu sa koleso otáča po zemi bez prešmykovania, a teda jeho translačná rýchlosť v_t je rovnaká ako obvodová v_o:

$$v_o = \omega r = v_t.$$

Ďalej si musíme uvedomiť, že translačná rýchlosť kolesa je vlastne obvodová rýchlosť točiacej sa tyče dĺžky R. Z toho vyplýva, že jej uhlová rýchlosť, nazvime ju Ω, bude

$$\Omega = \frac{v_t}{R} = \frac{\omega r}{R}.$$

Keď už sme si vyjasnili rýchlosti, poďme sa pozrieť na to druhé – moment zotrvačnosti. Zaznačme si do obrázka tri osi, na ktoré sa budeme odkazovať.



Obrázok 8: *Tri dôležité osi otáčania*

Prvá prechádza stredom kolesa, druhá je kolmá na tyč dĺžky R a prechádza rovinou kolesa a tretia je predĺžením tyče dĺžky r. Vybavme najskôr prvý otáčavý pohyb, teda točenie kolesa okolo osi 1. Keďže naše koleso má hmotnosť m so zanedbateľnými priečkami, každý element jeho hmotnosti je rovnako vzdialený od osi 1 a to presne polomer r. Jeho moment zotrvačnosti bude jednoducho $I_1 = mr^2$. Keď to skombinujeme s tým, že okolo osi 1 sa koleso točí uhlovou rýchlosťou ω, získame prvú časť výsledku, a teda že rotačná energia tohto pohybu je

$$E_{r1} = \frac{1}{2}I_1\omega^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2.$$

Ako sme vraveli, druhá časť rotačnej energie bude pochádzať z pohybu okolo osi 3, kde rýchlosť točenia je Ω. Aký je však moment zotrvačnosti kolesa vzhľadom na túto os? Na to použijeme Steinerovu vetu, ktorá vraví, že ak poznáme moment zotrvačnosti telesa I_0 vzhľadom na os prechádzajúcu jeho ťažiskom a chcem vypočítať moment zotrvačnosti I okolo rovnobežnej osi neprechádzajúcej ťažiskom vzdialenú d od prvej osi, platí $I = I_0 + md^2$.

To znamená, že by bolo pre nás výhodné, keby sme poznali moment zotrvačnosti kolesa vzhľadom na os 2, lebo potom by sme si ten okolo osi 3 mohli jednoducho dopočítať. To nie je žiadny problém, lebo moment zotrvačnosti kolesa vzhľadom na os 2 v rovine kolesa prechádzajúcu jeho ťažiskom je ľahko nájditeľný na internete (pre integrovania nechtivých), a je $I_2 = \frac{1}{2}mr^2$. Moment zotrvačnosti kolesa vzhľadom na os 3 bude podľa Steinerovej vety

$$I_3 = I_2 + mR^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mR^2 = m\left(\frac{r^2}{2} + R^2\right).$$

Toto bol posledný kúsok skladačky. Vieme, že okolo osi 3 obieha koleso uhlovou rýchlosťou Ω, a že tyč dĺžky R je nehmotná, a teda môžeme vypočítať druhú časť rotačnej energie

$$E_{r2} = \frac{1}{2}I_3\Omega^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{r^2}{2} + R^2\right)\Omega^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{r^2}{2} + R^2\right)\left(\frac{\omega r}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\omega r^4}{2R} + \omega^2 r^2\right).$$

Ostáva nám už len spokojne tieto energie sčítať a radovať sa

$$E = E_{r1} + E_{r2} = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{\omega r^4}{2R} + \omega^2 r^2\right) = \frac{1}{2}mr^2\omega^2\left(\frac{r^2}{2R} + 2\right).$$