Fyzikálny korešpondenčný seminár
XXXIV. ročník, 2018/2019
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 Kapitán na prechádzke

vzorák **Jaro**, opravoval **Krtko**

Začnime s tým, že si zodpovieme na otázku: „prečo pri chôdzi hýbeme rukami?“, a až potom sa budeme venovať tomu, ako to súvisí s množstvom spotrebovanej energie pri jednotlivých módoch pohybu rúk. Odpovedať na túto otázku by sme mohli: „lebo môžeme“ alebo „prečo nie?“, a mali by sme v podstate pravdu. Po fyzikálnej stránke sú totiž ruky fyzikálnym kyvadlom, ktorého názov prezrádza, že jeho prirodzeným pohybom je kývanie. Jednoducho, keď máme ruky voľne spustené, tak sa ruky správajú ako fyzikálne kyvadlo, a tým, že chôdza je nerovnomerná, tak pohybujeme ramenom, čiže závesom kyvadla, hore a dole, čím efektívne budíme kmitavý pohyb a ruky už potom robia to, čo robia kyvadlá najlepšie – kývajú sa.

Teraz môžeme pristúpiť k analýze toho, ako je to s energiou. Už sme uviedli, že keď máme ruky voľne spustené, tak sa prirodzene hýbu. Vtedy nemusíme vynakladať žiadnu energiu[1] na to, aby sme ich udržali v pohybe. Práve naopak, ak chceme udržať ruky pevne pri tele, tak musíme napínať svaly, aby sme zabránili prirodzenému kmitavému pohybu rúk, čím spotrebúvame energiu. Preto pri chôdzi s rukami pri tele spotrebujeme viac energie než pri prirodzenej chôdzi.

Teraz ešte zostáva zodpovedať, v čom spočíva rozdiel medzi tým, keď sa ruky hýbu vo fáze a v protifáze vzhľadom na nohy. Tu je dôležité si uvedomiť, že keď kráčame, tak sa odrážame od zeme mimo osi tela, preto pri každom kroku na nás zem pôsobí nenulovým momentom sily, ktorý sa nás snaží natáčať; fyzikálne povedané mení náš moment hybnosti. To isté však robia aj kývajúce ruky. Tým, že sa ruky kývajú, tak nás ťahajú za rameno, čím sa nás snažia natočiť; fyzikálne povedané, tiež na telo pôsobia nenulovými momentami síl, čím menia jeho moment hybnosti.

Pri chôdzi sa snažíme držať naše telo a smer chôdze priamo. Každé natáčanie tela je nežiaduce. A to je práve tá kľúčová myšlienka. Ak sa ruky a nohy hýbu v protifáze, tak sa ich efekty viac-menej navzájom rušia, preto netreba vynakladať veľa námahy na to, aby sme udržali priamu chôdzu. Naopak, keď sa ruky a nohy hýbu vo fáze, tak sa ich príspevky nasčítajú. Potom musíme svalmi tela korigovať natočenie tela, čo si vyžaduje vynaložiť na to nemalé množstvo energie.[2] Preto je chôdza s módom vo fáze energeticky ďaleko nevýhodnejšia.

3.2 Starý inventár

vzorák **Jaro**, opravoval **Pľyš**

Kľúčom k vyriešeniu tejto úlohy je škálovanie. Zo zadania vieme, že oba dinosaury mali podobnú stavbu tela, preto stehenné kosti oboch jedincov boli zaťažované zhruba rovnako, preto aj ich proporcie by mali byť rovnaké. Z obrázka síce nevieme povedať, ktorá z kostí je väčšia, no vieme určite porovnať pomer dĺžky kosti k jej priemeru $\frac{l}{d}$. Poďme ho teda preskúmať.

Zaveďme charakteristický rozmer dinosaura λ. Potom výška dinosaura H či jeho dĺžka L sú úmerné tomuto charakteristickému rozmeru, čiže $H \propto \lambda$ i $L \propto \lambda$. Pre nás je dôležité, že i dĺžka kostí je úmerná tomuto charakteris-

[1] samozrejme okrem energie spotrebovanej na samotný pohyb nôh pri chôdzi
[2] Keby k tomuto korigovaniu nedochádzalo, tak naša chôdza vyzerá ako chôdza Braňa Mojseja z vínnej pivnice.

tickému rozmeru $l \propto \lambda$. Hmotnosť m je zase úmerná tretej mocnine charakteristického rozmeru $m \propto \lambda^3$. Tým pádom i tiaž dinosaura rastie s treťou mocninou charakteristického rozmeru $F_G \propto \lambda^3$. To znamená, že s treťou mocninou rozmeru rastie normálová sila F_n, ktorou sú v priereze namáhané kosti.

Lenže normálová sila je limitovaná mechanickými vlastnosťami kostí. Pre normálovú silu na základe teórie deformácie pevných látok platí $F_n = \sigma_n S$, kde σ_n je normálové napätie v kosti a S je plocha jej prierezu. Maximálna možná normálová sila je daná prierezom kosti a nejakým medzným napätím[3].

Môžeme predpokladať, že dinosaurus dorastá do takej výšky, do ktorej mu to dovoľuje pevnosť jeho kostí daná ich prierezom. Vieme teda, že pevnosť kostí, a teda aj normálová sila rastie s druhou mocninou priemeru[4] a zároveň s treťou mocninou charakteristického rozmeru, pretože tak rastie tiaž, ktorú musia nohy uniesť. Môžeme teda písať $F_n \propto d^2 \propto \lambda^3$. To ale znamená, že priemer kostí závisí na charakteristickom rozmere ako $d \propto \lambda^{\frac{3}{2}}$, no a potom

$$\frac{l}{d} \propto \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{3}{2}}} = \lambda^{-\frac{1}{2}}.$$

Nech je charakteristický rozmer T-Rexa λ_{TR} k-krát väčší než charakteristický rozmer velociraptora λ_v, čiže $\lambda_{TR} = k\lambda_v$. Vieme, že pomer $\frac{l}{d}$ je úmerný $\lambda^{-\frac{1}{2}}$, preto môžeme písať $\frac{l}{d} = \alpha\lambda^{-\frac{1}{2}}$. Potom zrejme platí

$$\left.\frac{l}{d}\right|_{TR} = \alpha\lambda_{TR}^{-\frac{1}{2}} = \alpha k^{-\frac{1}{2}}\lambda_v^{-\frac{1}{2}} = k^{-\frac{1}{2}} \left.\frac{l}{d}\right|_v .$$

Vidíme, že pomer dĺžky kosti T-Rexa k jej priemeru má byť $\sqrt{k}$-krát menší než u velociraptora.

Uvedomme si, že na jednej fotke je dĺžka i priemer kosti zmenšený rovnako. Tým pádom pomer $\frac{l}{d}$ na fotke je rovnaký ako v skutočnosti. To isté platí aj pre druhú fotku, no toto zmenšenie je vo všeobecnosti iné než na prvej fotke. Vieme však, že na fotkách $l_{TR} = l_v$. Potom teda pre priemery na fotkách platí

$$d_{TR} = \sqrt{k}d_v.$$

Priemer kosti T-Rexa je na fotke $\sqrt{k}$-krát väčší než priemer kosti velociraptora, preto kosť T-Rexa je tá s bielym pozadím.

Na záver sa pozrime, či naša analýza zodpovedá skutočnosti. Na internete si nájdeme, akých rozmerov dorastali uvažované dinosaury. Výška T-Rexa bola $H_{TR} \approx 3{,}7$ m a jeho dĺžka $L_{TR} \approx 12{,}3$ m, výška velociraptora zas $H_v \approx 0{,}5$ m a dĺžka $L_v \approx 2{,}1$ m. Ako sme ukázali rozmerovou analýzou, má platiť

$$k = \frac{\lambda_{TR}}{\lambda_v} \approx \frac{H_{TR}}{H_v} \approx \frac{L_{TR}}{L_v}.$$

Pre uvedené hodnoty je hodnota k niekde okolo 6 až 7.

Môžeme sa ešte pozrieť, či to sedí aj pre hmotnosti. Hmotnosť T-Rexa m_{TR} je medzi 8,4 t a 14 t, hmotnosť velociraptora m_v medzi 15 kg a 19,7 kg. Keďže $m \propto \lambda^3$, tak $k \approx \sqrt[3]{\frac{m_{TR}}{m_v}}$. To dáva odhad k niekde medzi 8 a 9. Je to spôsobené tým, že T-Rex bol predsa len mohutnejší, a preto odhad z hmotností vedie na vyššiu hodnotu k. To je

[3] Nie nutne medzou pevnosti, pri ktorej už dochádza k zlomeniu materiálu.

[4] lebo $S = \frac{\pi d^2}{4}$

dané tým, že velociraptor bol akýmsi medzičlánkom od dinosaurov ku vtákom, preto jeho telo bolo celkovo ľahšie a zrejme aj kosti boli ľahšie a menej pevné.[5]

Na záver sa pozrime, ako by mali kosti na fotkách podľa nášho modelu vyzerať. Keďže kosť T-Rexa má mať na fotke $\sqrt{k}$-krát väčší priemer, tak podľa toho, aké k zoberieme, by mala byť zhruba 2,5- až 3-krát hrubšia než kosť velociraptora. To dokumentuje, že tu náš model zlyháva, aj keď ako rádový odhad je správny. Je to dané hlavne tým, že velociraptor mal ďaleko hrubšie kosti, než by podľa nášho modelu potreboval. Jedným z dôvodov je evolučná stránka – velociraptor je predchodca vtákov, preto jeho telo bolo odľahšené, no kosti zostali hrubé, aj keď nie možno až také pevné. Druhý dôvod je fyzikálny. Také tenké kosti, aké vyšli podľa nášho modelu, by možno dokázali uniesť telo velociraptora, no boli by náchylné na zlomenie ohybom, ktorý sme v našom modeli neuvažovali.

Komentár opravovateľa:

Mnohí ste riešili tento príklad správne, avšak mnohí ste zabudli na matematickú formuláciu vašich záverov. V tomto smere vám Jarov vzorák môže byť výbornou inšpiráciou. Takže do budúcna – nezabúdajte čítať s porozumením :)

3.3 V jednote je... tlak?

vzorák **Terka**, opravovala **Terka**

V prvom rade sa treba zamyslieť, aké informácie nám ponúka zadanie. Vieme, že Francisova fľaša je dokonale tuhá, a teda sa objem jej obsahu nemôže zmeniť. Kvapaliny sú v ideálnom svete fyzikálnych úloh tiež nestlačiteľné, čo znamená že objem sirupu sa tiež nemôže zmeniť. Z toho vyplýva, že ani objem vzduchu sa nemôže zmeniť. Počiatočné dve bublinky majú spolu rovnaký objem ako bublinka, ktorá vznikla ich spojením. V reči rovníc

$$2V_1 = V_2,$$

$$2\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Polomer novej bublinky bude teda $R = \sqrt[3]{2}r$.

Vzduch v bublinkách sa správa ako ideálny plyn a jeho správanie sa dá popísať stavovou rovnicou. Pre jednu malú bublinku platí $p_1V_1 = n_1RT_1$ a pre veľkú bublinku po spojení zas $p_2V_2 = n_2RT_2$. Zo zadania vieme, že počas spojenia dvoch bubliniek sa teplota nemení a teda $T_1 = T_2 = T$. Tiež sme zistili, že $V_2 = 2V_1$. To, že množstvo vzduchu vo veľkej bublinke je dvakrát také ako v malej možno zapísať ako $n_2 = 2n_1$. Naše dve stavové rovnice potom môžeme prepísať:

$$\frac{p_1V_1}{n_1} = \frac{p_2V_2}{n_2} = RT,$$

$$\frac{p_1V_1}{n_1} = \frac{p_2 2V_1}{2n_1} = RT.$$

Z toho vychádza, že $p_1 = p_2$. K tomuto zisteniu sa dalo prísť aj úvahou, že pre vzduch z jednej malej bublinky sa počas spojenia nezmenil ani objem, ani teplota, a teda sa nemohol zmeniť ani tlak. Veľa z vás tvrdilo, že ak tlak v jednej malej bublinke je p tak v dvoch to bude $2p$. Toto je ale nesprávne! Tlak je stavová veličina a to znamená, že ak mám dve rovnaké bublinky so vzduchom v rovnakom stave, tak budú mať rovnaký tlak.

[5] Spomeňme si, že my sme ale predpokladali, že kosti oboch dinosaurov mali rovnaké vlastnosti.

Ako to funguje s tlakom pri bublinkách? Tlak v bublinkách je väčší ako tlak, ktorý na bublinku tlačí zvonka. Je to preto, lebo vrstva kvapaliny drží spolu medzimolekulovými silami a bráni vzduchu vnútri bublinky sa ďalej rozpínať. [6]. Túto schopnosť kvapalín popisuje práve povrchové napätie σ. Rozdiel medzi vnútorným a vonkajším tlakom pri bublinke plynu v kvapaline popisuje rovnica:

$$p_{\mathrm{in}} - p_{\mathrm{out}} = \frac{2\sigma}{r},$$

kde p_{in} je tlak v bublinke a p_{out} je tlak zvonku bublinky, čo je v tomto prípade tlak v sirupe, keďže práve ten bublinku obklopuje. Viacero z vás tam malo miesto dvojky štvorku, čo ale platí pre bublinky, kde sú dve rozhrania, ako napríklad bublifuková bublina[7].

Napíšme si túto rovnicu pre situáciu pred a po spojení. Zistili sme, že $p_1 = p_2 = p_{in}$ a že $R = \sqrt[3]{2}r$. Situácia pred spojením je teda

$$p_{\mathrm{in}} - p_{\mathrm{out1}} = \frac{2\sigma}{r}$$

a po spojení

$$p_{\mathrm{in}} - p_{\mathrm{out2}} = \frac{2\sigma}{\sqrt[3]{2}r}.$$

Nás zaujíma ako sa zmenil tlak v sirupe po spojení bubliniek a teda nový tlak mínus starý tlak $\Delta p = p_{out2} - p_{out1}$. Tieto tlaky možno vyjadriť z predchádzajúcich rovníc a odčítať

$$\Delta p = p_{\mathrm{out2}} - p_{\mathrm{out1}} = p_{\mathrm{in}} - \frac{2\sigma}{\sqrt[3]{2}r} - \left(p_{\mathrm{in}} - \frac{2\sigma}{r}\right)$$

Po krátkych úpravách prídeme k výsledku a tešíme sa :)

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} - \frac{2\sigma}{\sqrt[3]{2}r} = \frac{2\sigma}{r}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \approx 0{,}413\frac{\sigma}{r}$$

Tlak v sirupe sa teda zvýšil o túto hodnotu.

3.4 O plochozemca menej

opravoval **Krtko**

3.5 Recept na buchty

vzorák **Kvík**, opravoval **Maťo B.**

Túto úlohu môžeme riešiť dvomi diametrálne odlišnými spôsobmi. Buď to skúsime analyticky spočítať, aj keď budeme musieť kvôli jednoduchosti spraviť zopár zanedbaní, inak to bude príliš náročné… alebo si pomôžeme dvomi ľahko dostupnými programami. Využijeme tak to, že najťažšie časti už niekto naprogramoval za nás a my sa môžeme sústrediť iba na podstatu úlohy.

Algoritmus by bol ale v oboch prípadoch rovnaký:

- najprv budeme potrebovať určiť správnu polohu Slnka v sústave spojenej s otáčajúcou sa Zemou, aby popísaná situácia mohla nastať;

[6] Ako keď fúkate balónik
[7] rozhrania vzduch–bublifuk a bublifuk–vzduch

- potom zistíme, kedy (a či vôbec) sa Slnko na takýchto súradniciach môže vyskytovať;
- a ak áno, nakoniec spočítame dĺžku tieňov.

Súradnicové systémy

Najprv si povieme niečo o súradniciach na oblohe. Ak si myslíte, že sa v tom orientujete, môžete túto časť preskočiť.

Keďže obloha je (pol)sféra, na určovanie polôh sa používajú sférické súradnice. Rovnako ako pri kartézskych súradniciach aj tu potrebujeme na určenie polohy ľubovoľného bodu poznať počiatok súradnicovej sústavy a trojicu súradníc.

- Prvou súradnicou je *vzdialenosť*. Tá sa však obvykle nedá na oblohe priamo merať a navyše nás v tejto úlohe ani nemá prečo zaujímať, pretože na výsledku nič nemení. Navyše vieme, že musí byť približne rovná jednej astronomickej jednotke. Necháme ju teda tak.
- Druhou súradnicou je *šírka*, ktorá udáva uhol medzi priamkou spájajúcou objekt s počiatkom sústavy a nejakou zvolenou rovinou, ku ktorej budeme všetky šírky vzťahovať. Budeme ju nazývať *referenčná rovina*.
- Treťou súradnicou je *dĺžka*, čo je pre zmenu uhol medzi priamkou spájajúcou priemet objektu do referenčnej roviny a nejakého zvoleného *referenčného smeru* v tejto rovine.

Možností, ako zvoliť referenčnú rovinu, je mnoho. Pri pozorovaní zo Zeme sa najprirodzenejší zdá *topocentrický horizontálny systém*, teda taký, kde počiatkom sústavy je naše oko, referenčnou rovinou je horizont a referenčným smerom sever. Šírku potom nazývame *výška nad obzorom* a dĺžku *azimut*.

Katalógy hviezd sa v tejto súradicovej sústave zostavujú veľmi zle, keďže sa otáča spolu so Zemou a navyše závisí od polohy pozorovateľa. Preto máme aj iné systémy, napríklad *geocentrický ekvatoriálny*. Jeho počiatok sa nachádza v strede Zeme a referenčnou rovinou je rovina rovníka. Ako počiatočný smer je tu určený tzv. *jarný bod*, teda miesto na hviezdnej oblohe, kde sa Slnko nachádza v okamihu jarnej rovnodennosti.

V tomto systéme sa hviezdy prakticky nehýbu[8], a planéty a Slnko iba pomaličky. Slnko v tejto sústave vykoná práve jeden obeh za rok – pri pohľade zo Zeme, ktorá okolo neho obieha, sa premieta vždy na inú časť oblohy. Súradnice sa tu nazývajú *deklinácia* a *rektascenzia* a značia sa δ a α.

Pre naše účely má tento systém veľkú výhodu: objekt s deklináciou δ bude vždy presne nad miestom, ktorého zemepisná šírka je tiež δ. V úlohe nás teda bude zaujímať deklinácia Slnka. Rektascenzia Slnka zase bude závisieť iba od dátumu a času.

Určenie polohy Slnka

Chceme zistiť, kde musí byť na oblohe Slnko, aby táto situácia mohla nastať. Polohu Slnka vzhľadom na Zem môžeme popísať pomocou zemepisných súradníc *subsolárneho bodu*, teda miesta, ktoré sa pri pohľade zo Slnka nachádza presne v strede zemského disku. Samozrejme, na tomto mieste sa bude Slnko nachádzať v zenite. Ak všetci traja vrhajú rovnako dlhé tiene, musia vidieť Slnko na oblohe v rovnakej výške.

Potrebujeme teda nájsť bod na Zemi, ktorý je od všetkých troch miest rovnako ďaleko, alebo inak povedané, stred opísaného trojuholníka. Našťastie je táto úloha na guli riešiteľná prakticky rovnako, ako na rovine. Ak je hľadaný

[8] Samozrejme, nie je to úplne pravda. Kvôli precesii zemskej osi sa celý súradnicový systém otáča s periódou asi 26000 rokov, a ani hviezdy v skutočnosti nie sú nehybné. Pre naše účely ho ale môžeme považovať za stacionárny.

bod rovnako ďaleko od všetkých troch, je rovnako ďaleko od každej dvojice. Nakreslíme si teda osi ľubovoľných dvoch strán a nájdeme ich priesečník.

Ako? Veľmi jednoducho. Google Earth Pro má funkciu kreslenia kružnice s určeným stredom a polomerom. Najprv nájdeme os úsečky spájajúcej jednu dvojicu miest, napríklad Londýn a Moskvu. Nakreslíme kružnicu so stredom v jednom z miest a polomerom rovným ich vzdialenosti – na presnej hodnote nezáleží, ale toto je najjednoduchšie. Rovnakú kružnicu nakreslíme aj so stredom v druhom meste. Kružnice sa pretnú neďaleko Špicbergov a pri Kréte. Oba priesečníky spojíme rovnou čiarou a zapamätáme si jej azimut, čo je približne 155,9°. Potom čiaru predĺžime tak, aby siahala až do Antarktídy, pričom sledujeme, aby sme azimut zachovali. Výsledok si môžete pozrieť aj v tomto súbore[9].

To isté zopakujeme s inou dvojicou, napríklad Londýn a Rio de Janeiro. Dostaneme priesečníky pri Kalifornskom polostrove a druhý na Madagaskare (v súbore modrou). Pre priesečník takto získaných dvoch osí platí, že sa nachádza v rovnakej vzdialenosti od všetkých troch miest. To môžeme overiť tak, že z tohoto bodu nakreslíme novú kružnicu (zelená), ktorá by mala prechádzať všetkými tromi mestami. Ak bude Zem natočená práve tak, že v tomto bode má pozorovateľ Slnko nad hlavou, v Riu, Moskve a Londýne bude rovnako vysoko nad obzorom. Jeho súradnice sú približne 12,35° južnej zemepisnej šírky a 28,60° východnej zemepisnej dĺžky a nachádza sa vo výbežku Konga v Afrike. Označme tento bod C.

Určenie času

Ako prvé by nám malo napadnúť, či je vôbec možné, aby sa Slnko mohlo na týchto súradniciach nachádzať v zenite. Odpoveďou je, že áno: sklon zemskej osi je 23,5°. Počas slnovratov dosiahne deklinácia Slnka túto zemepisnú šírku, v decembri južnú a v júni severnú. Keďže Slnko sa po oblohe pohybuje spojito, niekedy musí dosiahnuť aj hodnotu −12,35°. Pravda, môže sa tak stať na inom poludníku. Pomer dĺžky dňa a roka je však na Zemi veľmi malý a výška Slnka na poludnie sa deň po dni mení iba veľmi pomaly, takže subsolárny bod určite prejde veľmi blízko.

Hľadáme teda časový okamih, kedy je deklinácia slnka rovná zemepisnej šírke bodu C ($\delta_\odot = \theta_C$), a navyše v tomto mieste musí byť pravé poludnie. Ešte by sme si mali uvedomiť, že počas roka budú také dni určite dva: jeden niekedy medzi septembrovou rovnodennosťou a decembrovým slnovratom, a druhý medzi decembrovým slnovratom a marcovou rovnodennosťou.

Z rovníc pohybu Slnka by to šlo vypočítať, dokonca by to ani nebolo príliš zložité. Radšej si ale zapneme nejaký chytrý program, napríklad Stellarium, a nastavíme svoju polohu na súradnice bodu C. Teraz nám ostáva vyhľadať, kedy bude Slnko presne v zenite. Výhodou tejto metódy je aj to, že program za nás započíta všetky ďalšie efekty, ktoré by sme analyticky rátali len ťažko.[10]

Po chvíľke hrania by sme mali zistiť, že v tomto roku želaná konštelácia prvýkrát nastala 16. februára o 10:20 UTC a druhýkrát nastane 26. októbra o 09:46 UTC.[11] V Moskve je vtedy tesne po poludní, je však skorá jar (alebo

[9]Treba použiť program, ktorý používa guľatú Zem. Na plochej mape to projekcia pokazí, pretože úsečky sú definované iba koncovými bodmi.

[10]Jedným takým efektom je *analema*. Predstavte si, že by ste každý deň o rovnakom čase odfotili oblohu a fotografie z celého roka naskladali za seba. Videli by ste, že Slnko po oblohe opisuje krivku v tvare čísla 8. Je to tým, že rotačná rýchlosť Zeme je takmer dokonale rovnomerná, ale obežná rýchlosť Zeme sa počas roka mení, keďže okolo Slnka neobiehame po kružnici, ale po elipse. Výsledný efekt je taký, že poludnie nenastáva vždy v rovnaký čas, ale sa trošku posúva. Pre viac informácií pozrite napríklad `https://en.wikipedia.org/wiki/Analemma`, alebo v Stellariu podržte '=' a pozerajte na polohu Slnka.

[11]Vidíte, že tie časy nie sú rovnaké – práve kvôli spomínanej analeme.

neskorá jeseň) a sme ďaleko na severe, takže bude nízko nad obzorom. Londýn je trochu južnejšie, takže Slnko je vyššie, ale zato je ešte iba skoré dopoludnie. V Riu de Janeiro je naopak skorá jeseň (alebo neskorá jar), je však iba skoro ráno a Slnko ešte nestihlo vyjsť veľmi vysoko.

Dĺžka tieňa

Keď poznáme polohu Slnka, určiť dĺžku tieňa je už jednoduché: stačí nám zistiť vzdialenosť Slnka od zenitu v mieste, kde stojí ľubovoľný z chlapcov. Označme ju γ. Z jednoduchej geometrickej predstavy vieme, že dĺžka tieňa potom musí byť $T = h \cot \gamma$. Tento uhol sa síce meria dosť zle, vieme si však opäť pomôcť s Google Earth: keďže Zem je približne guľatá, pre vzdialenosť mesta od subsolárneho bodu L musí platiť

$$L = \gamma R_\oplus,$$

takže

$$\gamma = \frac{R_\oplus}{L}.$$

Ľahko odmeriame, že $L = 7600$ km a dosadením získame hodnotu $\gamma \doteq 21{,}7°$. Takže všetci traja donjuani vidia Slnko v rovnakej výške zhruba 22° a dĺžka ich tieňov bude $T = \cot 21{,}7° \cdot 180\ \mathrm{cm} \doteq 452\ \mathrm{cm}$.

3.6 Ja s tebou zatočím!

vzorák **Jaro**, opravoval **Maťo B.**

Začnime tým, že si odhadneme, koľko otočiek by palička urobila, ak by sa nerozpadala. Keďže palička padá voľným pádom, pád z výšky H by jej trval $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Označme periódu otáčania paličky τ. Potom by palička vykonala $N_0 = \left\lfloor \frac{t}{\tau} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{2H}{g}} \right\rfloor$ otočiek pred dopadom. Pre numerické hodnoty zo zadania $N_0 = 22$. Toto číslo je užitočným odhadom. Vieme totiž, že na paličku nepôsobia žiadne vonkajšie sily, preto ťažisko paličky musí poklesnúť o rovnakú výšku za daný čas bez ohľadu na to, či sa palička rozpadá alebo nie. Ak viem rozpadaním docieliť, že niektorý kúsok paličky dopadne skôr ako ťažisko, tak toto číslo slúži ako horný odhad. Ak by všetky kúsky dopadli naraz, tak je toto číslo riešením.

Poďme sa teraz pozrieť, čo sa deje pri rozpadaní paličky. Uvažujme paličku hmotnosti m a dĺžky l, ktorej ťažisko sa pohybuje rýchlosťou u_0 nadol a ktorá rotuje okolo svojho ťažiska uhlovou rýchlosťou ω_0 vo vertikálnej rovine. V istom momente, keď je palička práve vo vodorovnej polohe, sa táto palička rozpadne presne v strede. Nájdime, aké budú rýchlosti a uhlové rýchlosti jednotlivých polovíc paličky.

Na paličku nepôsobia žiadne vonkajšie sily ani momenty síl. Tým pádom sa zachováva hybnosť i moment hybnosti. Okrem toho pri rozpadaní palička nekoná prácu, preto platí aj zákon zachovania energie. Jednou z možností je teda napísať si ZZH, ZZMH a ZZE, čo predstavuje sústavu siedmich rovníc, a z nich vybúchať hľadané rýchlosti a uhlové rýchlosti. Alebo druhou možnosťou je zapojiť hlavu a uľačiť si život. Napríklad si môžeme uvedomiť, že translačný pohyb musí prebiehať len vo zvislom smere a rotačný pohyb len v jednej zvislej rovine danej počiatočnou rotáciou paličky. Tým sa problém zredukuje na 1D a stačí nám písať skalárne verzie ZZH a ZZMH, čím sa počet rovníc, ktoré treba riešiť, zredukuje na tri. Riešeniu danej sústavy sa však dá aj úplne vyhnúť. Teda presnejšie povedané, riešenie sa dá uhádnuť, a potom si ho vieme overiť dosadením do danej sústavy.

Začnime tým, že si napíšeme výrazy pre hybnosť, moment hybnosti a energiu pred rozpadom a po rozpade. Hybnosť (vertikálna) pred rozpadom je jednoducho

$$p_0 = mu_0.$$

Moment hybnosti budeme písať vzhľadom na ťažisko paličky. Tým pádom príspevok translačného pohybu k momentu hybnosti je nulový, lebo rameno hybnosti je nulové, a zostáva tak len príspevok za rotáciu

$$L_0 = J\omega_0 = \frac{1}{12}ml^2\omega_0.$$

Energia pred rozpadom pozostáva z translačnej kinetickej energie a rotačnej kinetickej energie

$$E_0 = \frac{1}{2}mu_0^2 + \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}mu_0^2 + \frac{1}{24}ml^2\omega_0^2.$$

Označme rýchlosti polovičiek paličky po rozpade u_1^+ a u_1^- a uhlové rýchlosti ω_1^+ a ω_1^-, pričom horný index $^+$ značí polovicu, ktorá odletí po rozpade nadol, a index $^-$ tú, ktorá odletí nahor. Pripomeňme, že nové hmotnosti a dĺžky sú polovičné. Hybnosť po rozpade je potom

$$p_1 = \frac{m}{2}u_1^+ + \frac{m}{2}u_1^- = \frac{m}{2}\left(u_1^+ + u_1^-\right).$$

Moment hybnosti píšeme opäť vzhľadom na ťažisko pôvodnej paličky. Tentoraz aj translačné zložky pohybu prispievajú k celkovému momentu hybnosti, pretože ich rameno je nenulové. Moment hybnosti po rozpade je

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{m}{2}u_1^+\frac{l}{4} - \frac{m}{2}u_1^-\frac{l}{4} + \frac{1}{12}\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\omega_1^+ + \frac{1}{12}\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\omega_1^- = \\ &= \frac{1}{8}ml\left(u_1^+ - u_1^-\right) + \frac{1}{96}ml^2\left(\omega_1^+ + \omega_1^-\right). \end{aligned}$$

Energia po rozpade je súčtom translačnej a rotačnej kinetickej energie

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}\frac{m}{2}\left(u_1^+\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}\left(u_1^-\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\left(\omega_1^+\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\left(\omega_1^-\right)^2 = \\ &= \frac{1}{4}m\left[\left(u_1^+\right)^2 + \left(u_1^-\right)^2\right] + \frac{1}{192}ml^2\left[\left(\omega_1^+\right)^2 + \left(\omega_1^-\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Teraz už len stačí dať nájdené výrazy do rovnosti, čím dostaneme tri spomínané zákony zachovania, a potom už len tieto rovnice vyriešiť. My si ale počítanie uľahčíme tým, že riešenie uhádneme.

Predstavme si paličku ako objekt pozostávajúci z malých kúskov, ktoré sa pevne držia za ruky tak, že sa palička ako celok javí byť tuhá. Rozpadnutie paličky potom zodpovedá tomu, že sa dva dieliky uprostred pustia. Je jasné, že tým nevykonajú žiadnu prácu a nijako tým neovplyvnia ostatných susedov – teda nie aspoň v prvom momente po pustení. To znamená, že každý dielik si zachová svoju okamžitú rýchlosť.

Ponechajme označenie ako doteraz a zaveďme označenie pre okamžitú rýchlosť dielika vo vzdialenosti r od stredu paličky

$$v_0^{+,-}(r) = u_0 \pm \omega_0 r.$$

Po rozpadnutí paličky sa ťažiskom polovičky stáva dielik, ktorý bol vo vzdialenosti $r = \frac{l}{4}$, preto

$$u_1^{+,-} \equiv v_0^{+,-}\left(\frac{l}{4}\right) = u_0 \pm \omega_0 \frac{l}{4}.$$

Okamžitá rýchlosť dielika, ktorý je teraz vo vzdialenosti r od stredu polovičky paličky, ktorá smerovala pri rozpade nadol, sa dá vyjadriť ako

$$v_1^{+,-}(r) = u_1^+ \pm \omega_1 r = u_0 + \omega_0 \frac{l}{4} + \omega_1 r.$$

Povedali sme ale, že pri rozpade sa nemení okamžitá rýchlosť jednotlivých dielikov, preto musí platiť napríklad pre koniec paličky

$$\begin{aligned} v_0^+\left(\frac{l}{2}\right) &= v_1^+\left(\frac{l}{4}\right), \\ u_0 + \omega_0 \frac{l}{2} &= u_0 + \omega_0 \frac{l}{4} + \omega_1 \frac{l}{4}, \\ \omega_0 &= \omega_1. \end{aligned}$$

Dopracovali sme sa k záveru, že pri rozpade sa uhlová rýchlosť paličky zachováva, teda možno značiť $\omega_0 = \omega_1 \equiv \omega$, a že translačné rýchlosti ťažísk polovičiek paličky sú $u_1^{+,-} = u_0 \pm \frac{1}{4}\omega l$. Dosadením tohto riešenia do zákonov zachovania sa ľahko môžeme presvedčiť o tom, že naše úvahy boli správne.

Keď už teraz vieme, ako sa správa palička pri delení, môžeme pristúpiť k analýze pádu paličky. Ako v_i budeme značiť rýchlosť ťažiska polovice kúsku paličky počas i-teho delenia a s_i bude dráha, ktorú polovička kúska paličky smerujúca nadol urazí po i-tom delení za jednu periódu $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$.

Začnime tým, že sa pozrieme na to, ako sa vyvíja rýchlosť v_i. Pri prvom delení má ťažisko polovičky smerujúcej nadol rýchlosť

$$v_1 = \frac{1}{4}\omega l.$$

Následne táto polovička zrýchľuje so zrýchlením g po dobu τ, kedy dôjde k ďalšiemu deleniu. V momente delenia má tentu kúsok paličky rýchlosť $v_1 + g\tau$ a polovička tohto kúska smerujúca nadol bude mať po delení rýchlosť

$$v_2 = v_1 + g\tau + \frac{1}{8}\omega l.$$

Toto sa opakuje znovu a po ďalšom delení bude mať polovička smerujúca nadol rýchlosť

$$v_3 = v_2 + g\tau + \frac{1}{16}\omega l.$$

Ľahko vieme odpozorovať rekurentný vzťah

$$v_i = v_{i-1} + g\tau + \frac{1}{2^i}\frac{1}{2}\omega l.$$

Opakovaným vnáraným dosádzaním tohto vzťahu vieme nájsť vzťah pre rýchlosť po n-tom delení

$$v_n = (n-1)\,g\tau + \frac{1}{2}\omega l \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = (n-1)\,g\tau + \frac{1}{2}\omega l\,(1-2^{-n})\,.$$

Pozrime sa teraz na dráhy s_i, ktoré urazí kúsok paličky medzi jednotlivými deleniami. Ide zrejme o zvislý vrh nadol, preto

$$s_i = v_i\tau + \frac{1}{2}g\tau^2.$$

Využijúc nájdený vzťah pre rýchlosť paličky po n-tom delení, vieme ľahko vyjadriť dráhu, ktorú prejde kúsok paličky po tomto delení do ďalšieho v poradí

$$s_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) g\tau^2 + \frac{1}{2}\omega l\,(1-2^{-n})\,\tau.$$

Teraz už môžeme dopočítať, akú celkovú dráhu prejde najrýchlejší dielik paličky po N deleniach do $(N+1)$-ho delenia

$$\begin{aligned}
s &= \sum_{n=1}^{N} s_n = \sum_{n=1}^{N} \left[\left(n-\frac{1}{2}\right) g\tau^2 + \frac{1}{2}\omega l\,(1-2^{-n})\,\tau\right] = \\
&= g\tau^2 \sum_{n=1}^{N} n + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\tau\,(\omega l - g\tau) - \frac{1}{2}\omega l\tau \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} = \\
&= \frac{1}{2}N\,(N+1)\,g\tau^2 + \frac{1}{2}N\omega l\tau - \frac{1}{2}Ng\tau^2 - \frac{1}{2}\omega l\tau\left(1-2^{-N}\right) = \\
&= \frac{1}{2}g\tau^2N^2 + \frac{1}{2}\omega l\tau N - \frac{1}{2}\omega l\tau\left(1-2^{-N}\right).
\end{aligned}$$

Využijúc $\omega\tau = 2\pi$ možno tento výraz ešte zjednodušiť na tvar

$$s = \frac{1}{2}g\tau^2N^2 + \pi lN - \pi l\left(1-2^{-N}\right).$$

My potrebujeme zistiť, ku koľkým rozpadnutiam dôjde, než prvý dielik dopadne na zem. Matematicky vyjadrené, potrebujeme nájsť najväčšie celočíselné riešenie nerovnice

$$s\,(N) = \frac{1}{2}g\tau^2N^2 + \pi lN - \pi l\left(1-2^{-N}\right) \leq H.$$

Táto nerovnica nemá analytické riešenie kvôli prítomnosti člena 2^{-N}. Tento člen je však zanedbateľne malý voči 1 v prípade, že $N \gg 1$. Vtedy môžeme uvažovať približnú nerovnicu

$$\frac{1}{2}g\tau^2N^2 + \pi lN - \pi l \lesssim H.$$

V hraničnom prípade platí približná rovnosť

$$N^2 + \frac{2\pi l}{g\tau^2}N - \frac{2\left(\pi l + H\right)}{g\tau^2} \approx 0.$$

Jej kladným riešením je

$$N \approx -\frac{\pi l}{g\tau^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi l}{g\tau^2}\right)^2 + \frac{2\left(\pi l + H\right)}{g\tau^2}}.$$

Do momentu, kým dopadne na zem prvý dielik paličky, teda dôjde k

$$N = \left\lfloor -\frac{\pi l}{g\tau^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi l}{g\tau^2}\right)^2 + \frac{2\left(\pi l + H\right)}{g\tau^2}} \right\rfloor$$

rozpadnutiam. Pre číselné hodnoty zo zadania to dáva $N = 16$. Vidíme teda, že sme naozaj mohli zanedbať člen 2^{-N} voči 1.

Ak by nás zaujímal naozaj celkový počet rozpadnutí, a nie len momentov rozpadnutí, tak si stačí uvedomiť, že pri prvom delení dôjde k jednému rozpadu, pri druhom k dvom, pri treťom k štyrom, atď. To znamená, že celkový počet rozpadnutí vieme nájsť ako

$$M = \sum_{i=1}^{N} 2^{i-1} = 2^N - 1$$

a pre $N = 16$ dostávame $M = 65535$.

Na záver nám zostáva už iba zodpovedať bonusovú úlohu. Predpokladajme, že Adam dokáže paličku rozkrútiť ľubovoľne rýchlo a zamyslime sa nad krajnými prípadmi. Ak by ju rozkrútil príliš pomaly, tak by počet otočení paličky narastal len veľmi pomaly, a teda by aj k deleniu dochádzalo len zriedkavo. Na druhej strane ale aj nárast rýchlosti by bol pomalší, nakoľko príspevok k rýchlosti od rotácie by bol minimálny. No palička zrýchľuje aj vďaka gravitácii, takže ak by perióda otáčania prekročila dobu trvania voľného pádu paličky, k deleniam by už nedochádzalo.

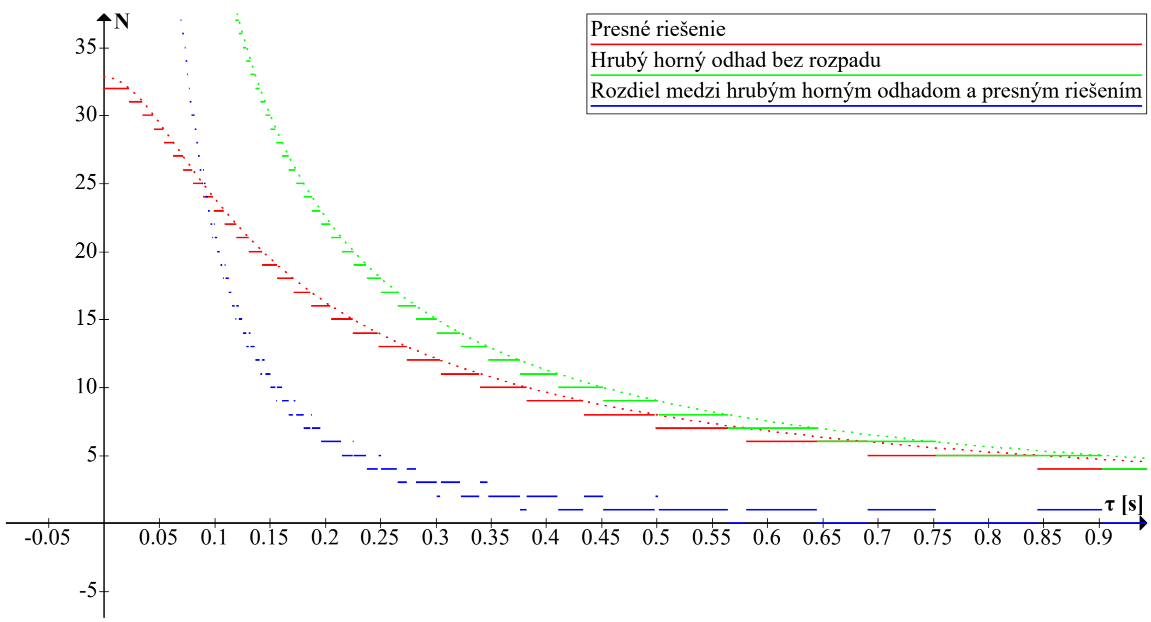
Na druhej strane, ak by Adam roztočil paličku šialene rýchlo, tak by k rozpadom paličky dochádzalo často, čím by aj rýchlosť dielikov rýchlo rástla, takže by pád trval krátko, na napriek tomu by k nejakým otáčkam došlo, pretože tie sú veľmi rýchle. V hraničnom prípade, keby Adam roztočil paličku nekonečne rýchlo, tak by bola polovička paličky hneď vymrštená nekonečnou rýchlosťou, no zároveň by jedna otočka trvala nekonečne krátko. Otázka teda znie, ku koľkým rozpadnutiam dôjde, ak je perióda rotácie šialene malá. Aby sme ju rozlúskli, poďme pracovať s naším výsledkom. Vieme ho upraviť na tvar

$$N = \left\lfloor \frac{\pi l}{g\tau^2}\left[\sqrt{1 + \frac{2g\tau^2\left(\pi l + H\right)}{\pi^2 l^2}} - 1\right]\right\rfloor.$$

Vo výsledku sa nám vyskytuje výraz typu $\sqrt{1+x}$, ktorý možno pre $x \ll 1$ aproximovať ako $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$. Pre dostatočne krátke periódy teda platí

$$N = \left\lfloor \frac{\pi l}{g\tau^2}\left(1 + \frac{g\tau^2\left(\pi l + H\right)}{\pi^2 l^2} - 1\right)\right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{H}{\pi l}\right\rfloor = 32.$$

To, ako závisí počet rozpadnutí na perióde otáčania, najlepšie uvidíme na grafe. Červenou je zaznačené naše presné riešenie, zelenou náš prvotný hrubý odhad, no a žltou ich rozdiel. Vidíme, že hrubý odhad diverguje pre krátke periódy, pretože vo vysokofrekvenčnom prípade je práve príspevok k rýchlosti od rotácie dominantným faktorom, no a ten v hrubom odhade nebol započítaný.



Obrázok 1: *Závislosť počtu rozpadnutí na perióde a porovnanie s prvotným hrubým odhadom*

3.7 Ríša nezapadajúceho slnka

vzorák **Kvík**, opravoval **Kvík**

Rovno sa priznám, že táto úloha bola riadny chyták. Dala sa totiž rýchlo a nesprávne vyriešiť iba s použitím zákona zachovania energie. Teda spočítať, koľko energie dopadá na zrkadlo zo Slnka, preškálovať na veľkosť mesta a potom už len dorátať, aké zakrivenie treba na to, aby sa lúče koncentrovali práve na zemskom povrchu.

Takto jednoducho to ale vôbec nefunguje: svetlo sa zrkadlami a šošovkami nedá koncentrovať ľubovoľne. Dalo by sa to spraviť iba v prípade, ak by Slnko bolo bodovým zdrojom svetla. V tejto úlohe však takúto aproximáciu nemôžeme použiť. Lúče zo Slnka nie sú dokonale rovnobežné a teda nie je možné ich parabolickým zrkadlom sústrediť do ľubovoľne malého bodu.[12]

Prečo? Musíme si uvedomiť, čo vlastne také zrkadlo robí. Napriek rozšírenému presvedčeniu ani parabolické zrkadlo nedokáže lúče zosilniť. V ponímaní klasickej fyziky je dráha každého lúča priamka, zrkadlo ju akurát

[12] Odborne sa tomu hovorí *zákon zachovania etendue* alebo *zákon zachovania súčinu* $A\Omega$, kde A je plocha žiariča a Ω priestorový uhol, do ktorého žiari.

môže zalomiť podľa zákona odrazu, ale nič viac – intenzita[13] sa musí zachovávať. Jediné, čo sa môže zmeniť, je smer.

Parabolické zrkadlo akurát dokáže zariadiť, aby v ohnisku bolo viac **smerov**, z ktorých prichádza svetlo; konvexné zrkadlo naopak obraz Slnka zmenší a smerov je menej. Ak by sme urobili fotku digitálnym fotoaparátom, každý osvetlený pixel bude presne rovnako jasný, ako keby sme odfotili priamo Slnko. Vo vesmíre, kde je iba Slnko a nejaké zrkadlá, v každom bode oblohy vidíme buď tmu (nulová intenzita žiarenia) alebo Slnko (nejaká konštantná intenzita, označme ju $I_\odot$). Pre optimálne zrkadlo je zrejmé, že v každom jeho bode vidíme Slnko – teda lúč vychádzajúci z nášho oka po odraze od zrkadla pretne povrch Slnka.

No a to je vlastne všetko. Ostáva nám určiť, koľko svetla potrebujeme, aby nás zrkadlo osvetlilo rovnako, ako Mesiac v splne. To sa dá spočítať, môžeme si ale pomôcť nejakými zdrojmi, hoci Wikipediou. V astronómii sa na meranie zdanlivých jasností objektov používa *magnitúdová škála*. Tá nie je lineárna, ale logaritmická, podobne ako napríklad decibely, ktoré poznáme z akustiky.

Rozsah jasností nebeských objektov je totiž obrovský: Slnko je asi 10^{13}-krát jasnejšie, než najslabšia hviezda, ktorú vidíme voľným okom, alebo 10^{26}-krát jasnejšie než najslabšia hviezda, ktorú zachytí Hubblov ďalekohľad. Na rozdiel od decibelu má ale táto škála z historických dôvodov nešťastne zvolený základ: rozdiel piatich magnitúd zodpovedá stonásobnému rozdielu v jasnosti. Rozdiel jednej magnitúdy teda zodpovedá rozdielu jasností $100^{1/5} = 10^{0,4} \doteq 2{,}512$, a navyše je škála obrátená, teda menšia magnitúda zodpovedá jasnejšiemu objektu.

Keď si nájdeme údaje pre Mesiac a Slnko, zistíme, že $m_\odot = -26{,}7$ a $m_☽ = -12{,}7$. Rozdielu štrnástich magnitúd zodpovedá pomer jasností $100^{14/5} \approx 400000$. Slnko je teda približne štyristotisíckrát jasnejšie, ako Mesiac v splne. Keďže intenzita sa zachováva, potrebujeme, aby sme zrkadlo videli 400000-krát menšie, než je uhlový rozmer Slnka. Mohli by sme to spočítať ako plošný uhol v steradiánoch; môžeme ho však preškálovať jednoduchou priamou úmerou a dostaneme, že pre okrúhle zrkadlo

$$\frac{S}{(35\,786\ \mathrm{km})^2} = \frac{\frac{\pi R_\odot^2}{(1\ \mathrm{AU})^2}}{400000} \qquad \Rightarrow \qquad S \doteq 218\,000\ \mathrm{m}^2,$$

kde 35 786 km je výška geostacionárnej orbity nad povrchom. Dobre teda poslúži akékoľvek zrkadlo s prierezom v smere kolmice aspoň 218 000 m^2 a takým polomerom krivosti, aby sme pri pohľade z mesta v každom jeho bode videli časť slnečného disku. Najmenšiu možnú plochu určite bude mať ploché zrkadlo, musíme však overiť, či v plochom zrkadle s takýmto uhlovým rozmerom môžeme vidieť celé Slnko. Nemusíme však vôbec nič počítať: pre ploché zrkadlo platí, že ak je jeho uhlový rozmer menší, ako rozmer pozorovaného objektu, objekt v ňom môžeme vidieť celý.[14]

Z praktických dôvodov bude najlepším tvarom kruh, pričom správnej ploche zodpovedá polomer 263 m.

Veľkosť mesta

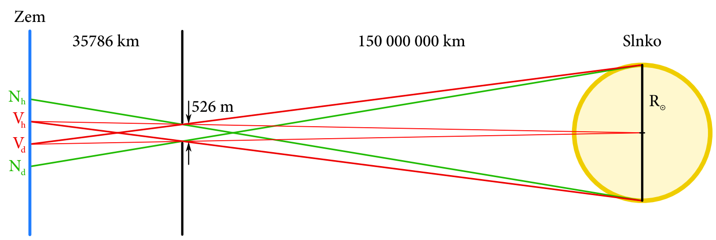
Iste ste si všimli, že v riešení veľkosť mesta nikde nevystupuje a teda na nej nezáleží. Nie je to úplne pravda, pretože mesto nemôže byť *ľubovoľne* veľké. Existuje však horné ohraničenie, čiže najväčšia veľkosť plochy na

[13] Slovenská terminológia je tu dosť nešťastná. Pod intenzitou myslíme anglické *radiance*, teda množstvo svetla prechádzajúceho cez bod v jednom smere za čas.

[14] Tu samozrejme zanedbávame rozdielne vzdialenosti k Slnku od zrkadla a od pozorovateľa, ale to si môžeme dovoliť.

povrchu Zeme, na ktorej bude každý bod osvetlený celým zrkadlom – čiže veľkosť „prasiatka". Okolo neho bude ešte prstenec ožiarený iba časťou zrkadla, a nakoniec tma.

Koľko to bude? Miesto zrkadla na opačnej strane oblohy, ako je Slnko, si predstavme štrbinu s rovnakými rozmermi a v rovnakej vzdialenosti, ale medzi nami a Slnkom. Nakreslime si to.



Obrázok 2: *Alternatívna geometria úlohy a výsledné prasiatko na zemskom povrchu. Body medzi V_h a V_d sú plne osvetlené, body medzi N_h a N_d sú osvetlené aspoň časťou Slnka, ostatné body sú tmavé.*

Toto už je jednoduchá geometria s priamkami. V kartézskej sústave dokážeme určiť ich sklon a vyjde nám, že so Zemou sa pretínajú 167 km od osi, takže priemer prasiatka musí byť 334 km a mesto musí byť menšie. S tým snáď zatiaľ nemajú problém ani v Číne.

Ďalšie dôvody, prečo malé parabolické zrkadlo nestačí

Na záver skúsme analyzovať zjavné, ale nesprávne riešenie, teda pozorovateľa v ohnisku malého parabolického zrkadla. Intuitívne by sa nám toto mohlo javiť ako najlepšie.

V skutočnosti toto riešenie nie je úplne zlé, nesmieme ale zabudnúť na podmienku rovnobežnosti lúčov. Predstavme si všetky lúče odrazené od zrkadla, ktoré dopadajú do jeho oka. Tvoria kužeľ s vrcholom v oku. Keďže zrkadlo je parabolické, pred odrazom od jeho povrchu museli byť tieto lúče rovnobežné. Pozorovateľ teda v zrkadle nevidí celé Slnko, ale iba malú časť jeho povrchu – rovnako veľkú, ako je samotné zrkadlo. A aj z tejto plochy do jeho oka smeruje iba maličká časť lúčov, úmerná uhlovému rozmeru zrkadla pri pohľade zo Slnka. Lúče, ktoré nie sú rovnobežné s osou zrkadla, po odraze skončia inde, než v pozorovateľovom oku. Po poctivom spočítaní nám vyjde opäť rovnaká plocha prierezu, ako pri plochom zrkadle.

Naopak vo vypuklom zrkadle so správnym polomerom krivosti by sme dokázali vidieť akurát celú plochu Slnka, po odraze by sa však lúče rozptýlili do väčšieho plošného uhla. Zdanlivá jasnosť by potom bola opäť rovnaká.

Iným dobrým argumentom je prvý termodynamický zákon. Ak by sa svetlo dalo zrkadlom koncentrovať do ľubovoľne malej plôšky, celkový svetelný tok by mohol byť väčší, ako na povrchu Slnka. Zo Stefan–Boltzmannovho zákona potom ale plynie, že rovnovážna teplota v tomto bode by bola vyššia, ako teplota Slnka. Potom by sme mohli zostrojiť hypotetický tepelný stroj, ktorý by túto plôšku používal ako zdroj tepla a Slnko ako chladič. Tým by sa Slnko ďalej zohrievalo, a teda by sme mali perpetuum mobile, čo však určite nejde.