Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Cestný pirát

vzorák **Jaro a Martin Baránek**, opravovala **Enka**

Uvažujme auto, ktoré sa pohybuje rovnomerne priamočiaro rýchlosťou v. Začneme tým, že sa zamyslíme, prečo vlastne takéto auto potrebuje nejaké palivo. Veď predsa, ak sa pohybuje rovnomerne, tak podľa zákona zotrvačnosti by malo v tomto pohybe zotrvávať aj bez toho, aby muselo nejaké palivo spaľovať.

Pozrime sa na to, prečo pri pohybe auta dochádza k stratám jeho energie. Jednak musí auto prekonávať vonkajšie odporové sily, ako sú odpor vzduchu či valivé trenie. No a potom sú tu vnútorné straty napríklad v dôsledku trenia medzi jednotlivými komponentami auta. A práve na kompenzáciu týchto strát je potrebné neustále dodávanie energie.

V prvom rade si musíme určiť, ktoré straty sú tie relevantné. Odhadnime si teda najskôr veľkosti jednotlivých síl.

Začnime valivým trením. Tu nebudeme musieť veľa počítať, aby sme ho vedeli kvantifikovať. Pre valivé trenie totiž platí, že sila valivého trenia je daná vzťahom $F_r = \xi \frac{N}{r}$, kde ξ je rameno valivého odporu dané mierou deformácie, N je normálová sila o podložku a r je polomer kolesa. V západných krajinách sa častejšie uvádza tento vzťah v podobe $F_r = C_r N$, kde $C_r = \frac{\xi}{r}$ je súčiniteľ valivého odporu. Pre naše auto platí $F_r = C_r M g$. [1] Súčiniteľ valivého odporu závisí od miery nafúkania kolesa, hrúbky dezénu, tvrdosti pneumatiky, typu povrchu, po ktorom auto jazdí, a mnohých ďalších faktorov. Pre bežnú pneumatiku na asfalte je $C_r \sim 0{,}01$. Hmotnosť auta je $M \sim 1\,\mathrm{t}$. Dostávame teda $F_r \sim 100\,\mathrm{N}$.

Poďme teraz na odpor vzduchu. Ten je daný Newtonovým odporovým vzťahom $F_a = \frac{1}{2} C_a S \rho_a v^2$, kde C_a je koeficient odporu zohľadňujúci tvar auta, ktorý však nie je konštantný, ale závisí od rýchlosti[2], S je čelná plocha a ρ_a je hustota vzduchu. Pre auto $C_a \sim 0{,}4$, $S \sim 2\,\mathrm{m}^2$ a $\rho_a \sim 1{,}3\,\mathrm{kg/m}^3$. To dáva

$$F_a \sim 0{,}4\,\mathrm{kg/m} \cdot v^2 \sim \begin{cases} 77\,\mathrm{N}, & v = 50\,\mathrm{km/h}, \\ 250\,\mathrm{N}, & v = 90\,\mathrm{km/h}, \\ 522\,\mathrm{N}, & v = 130\,\mathrm{km/h}. \end{cases}$$

Vidíme, že príspevky oboch odporových síl sú v danom rozsahu rýchlostí porovnateľné, pričom pri vyšších rýchlostiach dominuje odpor vzduchu, ktorý rastie kvadraticky s rýchlosťou. Preto treba uvažovať oba zdroje strát. Ešte sme neodhadovali vnútorné straty, no tie zahrnieme do účinnosti spaľovacieho motora neskôr.

Poznajúc zdroje strát energie, môžeme teraz odhadnúť spotrebu paliva, aby sme tieto straty kompenzovali. Spotreba auta sa udáva v litroch na 100 kilometrov. To znamená, že všetko, čo potrebujeme spraviť, je vyčísliť prácu odporových síl na tejto vzdialenosti. Tá je rovná $W = Fs$, kde F je celková veľkosť vonkajších odporových síl. Na druhej strane pri spálení benzínu s objemom V sa uvoľní energia $E = H\varrho V$, kde H je výhrevnosť benzínu a ϱ jeho hustota. Auto nedokáže efektívne využiť všetku túto energiu, ale má nejakú účinnosť η. Zrejme platí $W = \eta E$. Po dosadení za prácu a energiu dostávame rovnosť $Fs = \eta H \varrho V$.

[1] Na každé koleso pripadá normálová sila $\frac{Mg}{4}$, čo spôsobuje silu valivého odporu veľkosti $\frac{C_r Mg}{4}$ na každé zo štyroch kolies, ktoré sa sčítajú.

[2] presnejšie od Reynoldsovho čísla

Označme si spotrebu auta ako B. Ak ju chceme vyčísliť v litroch na sto kilometrov, musíme ju definovať ako

$$B\left[\frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}\right] = \frac{1000V}{0{,}000\,01s} = 10^8\frac{V}{s}.$$

Z energetickej bilancie máme $\frac{V}{s} = \frac{F}{\eta H \varrho}$, čiže

$$B\left[\frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}\right] = 10^8\frac{F}{\eta H \varrho}.$$

Účinnosť motora je $\eta \sim \frac{1}{3}$, výhrevnosť benzínu $H \sim 40\ \mathrm{MJ/kg}$ a jeho hustota $\varrho \sim 750\ \mathrm{kg/m^3}$. To dáva

$$B \sim 10^{-2}\frac{\frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}}{\mathrm{N}}\cdot F \sim \begin{cases} 1{,}77\frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}, & v = 50\ \mathrm{km/h}, \\ 3{,}5\frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}, & v = 90\ \mathrm{km/h}, \\ 6{,}22\frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}, & v = 130\ \mathrm{km/h}. \end{cases}$$

Na záver sa pozrime, či to, čo sme vypočítali, zodpovedá realite. Po chvíľke googlenia sa dopátrame, že v súčasnosti sa priemerná spotreba nových áut pohybuje na úrovni $8{,}1\frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}$. To je spotreba v bežnej premávke, kde auto nejazdí rovnomerne, ale musí brzdiť, potom zase zrýchľovať, čo stojí energiu. Navyše je to priemer cez všetky autá, takže sú tam zarátané i športové autá, ktoré majú obyčajne vysokú spotrebu, či mohutné terénne autá, ktoré vďaka vyššej hmotnosti a nie práve aerodynamickému tvaru majú tiež vysokú spotrebu.

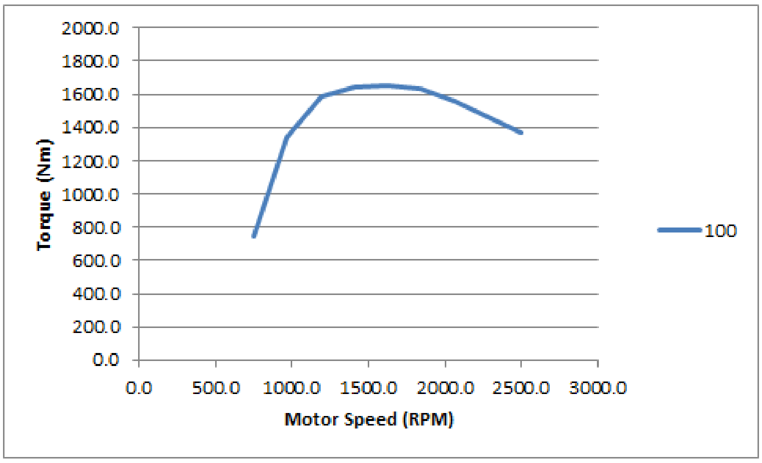
Ešte nám zostáva zodpovedať na poslednú otázku. Rastie spotreba rýchlo pri vysokých rýchlostiach? Vieme, že príspevok odporu vzduchu k stratám rastie kvadraticky s rýchlosťou, takže pri vysokých rýchlostiach naozaj spotreba rastie rýchlo. Lenže čo to znamená vysoká rýchlosť? Pre spotrebu možno písať vzťah $B\left[\frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}\right] \sim 1 + 0{,}004v^2$. Potom vysoká rýchlosť v našom ponímaní spĺňa podmienku $0{,}004v^2 \gtrsim 1$, čo znamená $v \gtrsim 57\ \mathrm{km/h}$.

Dodatok: Motor auta ako cyklista

Keďže mnoho riešiteľov sa začalo zaoberať účinnosťou motora pri daných rýchlostiach, tu je stručné (a možno aj nie) vysvetlenie, ako to s tou účinnosťou naozaj funguje.

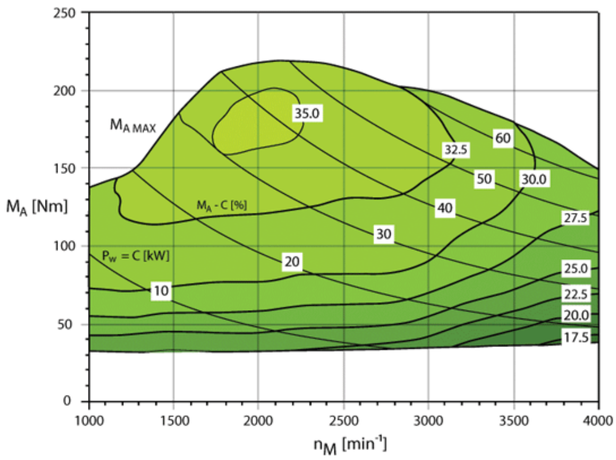
Motor v aute funguje ako cyklista na bicykli. Cyklista má obmedzené množstvo sily, ktorou vie tlačiť do pedálov a taktiež obmedzenú rýchlosť, akou vie krútiť nohami. Motor je na tom podobne. Aby sa auto vedelo rozbehnúť a zároveň, aby sa nezadýchalo pri trochu väčšej rýchlosti, auto má prevodovku, ktorá funguje rovnako ako „prehadzovačka“ na bicykli.

Ako bolo vyššie spomenuté, na auto, ale aj na bicykel pôsobia odporové sily, ktoré pôsobia proti smeru jazdy cyklistu, bez ohľadu na ním zvolený prevod. Ak sa ale cyklista hýbe aj konečnou rýchlosťou, tak máme požiadavku nielen na vynaloženú silu, ale aj na vynaloženú „rýchlosť krútenia“ (ak si niekto z vás spravil rozmerovú analýzu, $Fv = P$, čo je výkon). Takže cyklista má ako vstup výkon, ktorý je od neho vyžadovaný.



Na ilustračnom obrázku máme „silovú charakteristiku" motora. Znova sa na to pozrime z pohľadu cyklistu. Os y uvažujme ako maximálnu silu, ktorú vie cyklista vyvinúť, a os x ako rýchlosť krútenia jeho nôh. Ak sme už niekedy sedeli na bicykli, je nám dobre známe, že ak veľmi rýchlo krútime nohami, nevieme vynaložiť tak veľkú silu, ako keď sa postavíme do pedálov. V samotnom motore totiž nastávajú explózie stlačeného benzínu a vzduchu, ktoré dajú najviac sily na pohon auta práve pri určitej rýchlosti piestov.

Ďalší obrázok (s tými istými osami ako v minulom obrázku) ukazuje graf účinnosti motora:



Účinnosť hovorí o pomere, koľko mechanickej energie na pohyb auta dopredu dostaneme z pôvodnej celkovej tepelnej energie (výhrevnosti) paliva. V modeli s cyklistom sa to dá predstaviť tak, že koľko energie minieme na pohon bicykla, a koľko len na samotný pohyb nôh. Ako si môžme všimnúť, v prvej časti vzoráku sme uvažovali účinnosť motora 30%, čo podľa grafu približne (pre odhad) dáva zmysel. Ak ste sa však rozhodli špekulovať nad otáčkami motora/rýchlosťou krútenia nôh, poďme si rozobrať, čo na obrázku vidíme. Šikmé čiary s označeniami 10 – 60 (kW) ukazujú požadovaný výkon od cyklistu (alebo motora), a vrstevnice a farby odlišujú jednotlivé účinnosti. Prečo sú šikmé čiary šikmé? Pri analógii s bicyklom to dáva zmysel: čím ľahší prevod zvolíme, tým ľahšie sa nám šľape do pedálov, ale tým rýchlejšie musíme krútiť nohami. Nič nie je zadarmo. Prečo je ten graf hore taký vlnitý? Horné ohraničenie je presne ako prvý obrázok.

Taktiež môžme vidieť, že daný motor by už nebol schopný dodať výkon 70 kW (tj. má „maximálny výkon" okolo 65 kW.) Čo je na tomto grafe najzaujímavejšie je, kde je motor najefektívnejší. Hoci by človek pri aute intuitívne povedal, že s najťažším prevodom a najnižšími otáčkami je spotreba najmenšia, nemusí to byť pravda. Pre veľmi malé výkony 10 kW sa to podľa grafu tak zdá (sme v najžltšej vrstevnici) – zvolíme najťažší prevod, máme najmenšie otáčky, účinnosť je najväčšia.

Avšak ak sa pozrieme na čiary $\frac{30\,\mathrm{kW}}{40\,\mathrm{kW}}$, je zrejmé, že niekedy sa oplatí použiť nižší prevodový stupeň, aby sme dosiahli lepšiu účinnosť. Pri každom automobile ale závisí od jeho sprevodovania, (nakoľko sa zo spojitých čiar pre výkon stanú diskrétne body – pre každý požadovaný výkon si môžeme vybrať z niekoľkých prevodov, kde každý má danú silu, akou treba pôsobiť a otáčky) a od charakteristiky jeho motora, ktoré sa môžu výrazne líšiť. Ak ideme teda riešiť účinnosť, vždy je potrebné vedieť, aký výkon od auta vyžadujeme – ten sa výrazne mení pri rôznych rýchlostiach:

$$P \sim Fv \sim \begin{cases} 1070\ \mathrm{W}, & v = 50\ \mathrm{km/h}, \\ 6250\ \mathrm{W}, & v = 90\ \mathrm{km/h}, \\ 18\,850\ \mathrm{W}, & v = 130\ \mathrm{km/h}. \end{cases}$$

Každopádne, každé priemerné, rozumne sprevodované auto bude pracovať pri všetkých týchto rýchlostiach niekde v rozmedzí 25-40-percentnej účinnosti, čo nemá veľký vplyv na celkový výsledok spotreby v porovnaní s veľkosťou odporových síl.

2.2 Čajík na zahriatie

vzorák **Dušan**, opravoval **Dušan**

Úlohu o čajíku v miestnosti/stane vyriešime bez veľkých výpočtov. Postačia nám na to dve veci.

Ako prvé si musíme uvedomiť, že teplota nám hovorí o vnútornej energie, a samozrejme naopak. Bez toho, že by sme poznali presné vzorce však vieme povedať, že čím vyššia teplota, tým väčšia vnútorná energia študovaného systému.

Druhú vec, ktorú budeme potrebovať je prvá veta termodynamická, čo nie je nič iné ako zákon zachovania energia. Tá hovorí, že teplo Q z vonka dodané do systému sa použije na zmenu vnútornej energie systému $\Delta U = U_{\mathrm{kon}} - U_{\mathrm{zač}}$ a prácu W

$$Q = \Delta U + W.$$

Teraz sa pozrime na naše dva prípady, murovanú izby a stan. V oboch prípadoch má celý systém na začiatku vnútornú energiu

$$U^{\mathrm{izba}_{\mathrm{zač}}} = U^{\mathrm{stan}_{\mathrm{zač}}} = U^{\mathrm{vzduch}} + U^{\mathrm{čaj}}.$$

Steny izby aj plachta stanu sú dokonalé tepelné izolanty a nevpúšťajú dnu žiadne teplo ani častice, takže $Q = 0$ taktiež v oboch prípadoch. Čo bude teda rozdiel? No predsa práca. V murovanej izbe budú síce zohriate molekuly vzduchu narážať do stien, no nepohnú nimi, ale pružne sa od nich odrazia, takže nevykonajú žiadnu prácu. Inak povedané $W^{\mathrm{izba}=0}$. Pri stane je situácia samozrejme iná. Molekuly vzduchu nárazmi do plachty stan „nafúknu“ a teda vykonajú prácu $W^{\mathrm{stan}} > 0$.

Poďme to teda zúčtovať. V prípade murovanej izby z prvej vety termodynamickej triviálne určíme, že

$$\Delta U^{\mathrm{izba}} = 0 \rightarrow U^{\mathrm{izba}_{\mathrm{kon}}} = U^{\mathrm{izba}_{\mathrm{zač}}}$$

a čaj si s okolitým vzduchom iba vyrovná teplotu, pričom sa vnútorná energia systému nezmení. V prípade stanu sa časť vnútornej energie minie na prácu napínania plachiet

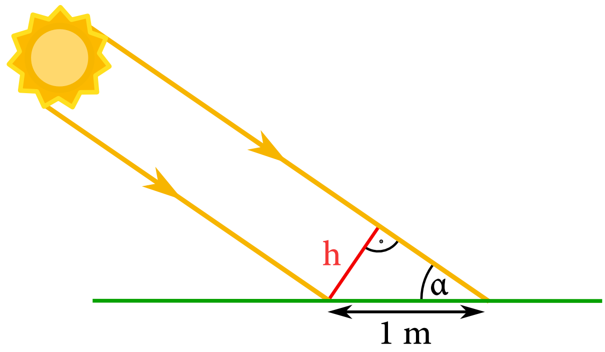
$$\Delta U = -W < 0 \rightarrow U^{\mathrm{stan}_{\mathrm{kon}}} < U^{\mathrm{stan}_{\mathrm{zač}}}.$$

To však znamená, že na konci, po ustálení teplôt, bude mať vzduch v stane nižšiu vnútornú energiu ako vzduch v izbe. A teraz je už jasné, že v stane sa aj menej zahreje.

2.3 Zelená energia

vzorák **Katka D.**, opravovala **Mary**

Solárna konštanta nám vyjadruje tok slnečnej energie prechádzajúcej cez 1 m^2 za 1 s v strednej vzdialenosti Zeme od Slnka. Avšak keď predpokladáme, že Zem je guľatá, vo vyšších zemepisných šírkach nastane situácia, že 1 m^2 plochy na povrchu Zeme nebude reprezentovať tok slnečnej energie cez 1 m^2. Potrebujeme teda vypočítať zdanlivú plochu solárneho panelu z pohľadu slniečka.



Ako vidíme, zdanlivá výška panelu je $h = \sin\alpha$. Uhol slnečných lúčov sa počas roka mení a rovnako počet hodín, kedy je slnko na oblohe, preto sa nám hodí spraviť si prieskum, ako tieto hodnoty vyzerajú. Po mesiacoch (za rok 2018) to je:

mesiac	počet sln. hodín	priemerný uhol sln. lúčov	vykonaná práca [MJ]
január	62	21,75	112,48
február	93	29,4	223,52
marec	157	40,25	496,65
apríl	214	51,6	821,11
máj	271	60,4	1153,65
jún	286	64,5	1263,85
júl	307	62,5	1333,24
august	284	55,1	1140,39
september	226	44,5	775,55
október	147	33,1	393,03
november	71	23,8	140,27
december	50	19,4	81,31

Práca článku za mesiac i je rovná

$$W_i = k \cdot h_i \cdot T_i \cdot 3600 = k \cdot \sin\alpha_i \cdot T_i \cdot 3600,$$

kde k je slnečná konštanta a T_i počet slnečných hodín v danom mesiaci.

Nech W je súčet prác v jednotlivých mesiacoch. Potom priemerný ročný výkon solárneho panelu bude

$$P = \frac{W}{3600 \cdot 24 \cdot 365} \doteq 251{,}62\ \mathrm{W}.$$

Samozrejme, mohla vám vyjsť aj trochu iná hodnota, závisí od zdroja dát, s ktorými ste pracovali.

2.4 Biela technika

vzorák **Jonáško**, opravovala **Mary**

Vedúci FKS majú veľa práce (výhovorka lenivcov) a preto sa rozhodli, že ako vzorák použijú riešenie Jonáša Dujavu. Týmto mu chcú aj poďakovať za povolenie zverejniť jeho riešenie.

Pomôcky

Teplomer, rýchlovarná kanvica, chladnička, 2 l hrniec, odmerný valec, voda, stopky, prístroj na meranie elektrického výkonu.

Obrázok 1: *Prístroj na meranie elektrického výkonu*

Postup

Na odmeranie účinnosti zariadení sme využili známu mernú tepelnú kapacitu vody a našu schopnosť merania teploty vody pred a po použití zariadenia, pričom sme odmerali/odhadli príkon zariadenia a z toho dodanú energiu zariadeniu počas experimentu.

Pri kanvici sme postupovali nasledovne: odmerali sme teplotu a objem vody pred zapnutím kanvice, následne sme spustili kanvicu, pričom spotrebovanú energiu počas experimentu sme odhadli odmeraním času, počas ktorého bola kanvica zapnutá, a príkonom uvedeným výrobcom. Počkáme, kým voda zovrie, čo nastane pri 100 °C, z čoho sme následne vypočítali, koľko energie prijala voda, takže vieme vypočítať aj účinnosť.

Pri chladničke sme museli náš postup pripraviť detailnejšie. Chladnička udržiava vnútornú teplotu medzi určitými medzami, takže prvý krok bolo nechať chladničku ohriať sa na hornú medzu, po čom sa 'zapol' cyklus chladenia, v ktorom chladnička čerpá energiu na schladenie na spodnú tepelnú hranicu, na ktorej cyklus vypne. Po vypnutí sme vložili vodu, ktorá postupne odovzdávala svoje teplo okoliu, až chladnička znova zapla cyklus a ochladila sa na spodnú hranicu. Počas tohto cyklu sme merali jej výkon, takže následne vieme vypočítať spotrebovanú energiu. Po ukončení cyklu sme vodu vytiahli a odmerali, o koľko sa ochladila, z čoho sme vypočítali odobratú energiu a následne účinnosť.

Teória

Energia/teplo potrebné na zmenu teploty vody o ΔT je dané vzťahom

$$Q = mc\Delta T,$$

kde m je hmotnosť vody, $c = 4180\ \mathrm{J/(kgK)}$ je merná tepelná kapacita vody.

Ak v určitom časovom úseku t má dané zariadenie príkon P, využije energiu

$$E = Pt,$$

pričom účinnosť vypočítame ako podiel prijatej energie a vykonanej práce, takže

$$\eta = \frac{Q}{E},$$

kde Q berieme ako dodané/odobrané teplo z objektu (záleží, aký je účel prístroja).

Meranie	1	2	3	Priemer
T_1[°C]	17	17	17	17
t[s]	52,4	54,2	55,9	54,17

Namerané hodnoty pri rýchlovarnej kanvici

Časť cyklu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P[VA]	80	76	75	74	73	72	71	70	69	68	67	66
t[min]	1	2	4	3	3	5	7	4	9	11	17	4

Namerané hodnoty príkonu chladničky a časy, ktoré daný príkon prijímala Účinnosť kanvice:

$$\eta_k = \frac{Q}{E} = \frac{mc\Delta T}{P_k t} \approx 0{,}58,$$

kde $m = 0{,}2$ kg je hmotnosť vody, $\Delta T = 83$ °C je zmena teploty vody, $P_k = 2200$ W je príkon kanvice a $t = 54{,}17$ s je priemerný čas ohrevu vody.

Chladnička za jeden cyklus spotrebovala energiu

$$E_{ch} = \sum_i P_i t_i \approx 292 \text{ kJ},$$

kde P_i je výkon a t_i je čas, ktorý trvala i-ta časť cyklu.

Účinnosť chladničky:

$$\eta_{ch} = \frac{mc\Delta T}{E_{ch}} \approx 0{,}46,$$

kde $m = 2$ kg je hmotnosť vody, $\Delta T = 16$ °C je zmena teploty vody.

Chyby merania

- Zanedbanie odparovania vody (minimalizovali sme použitím pokrývky)
- Zanedbanie tepelnej kapacity hrnca
- Presnosť odmerania času — ±1 s pri kanvici, ±1min pri chladničke
- Presnosť teplomeru — ±1 °C

2.5 Na tvrdo, či na mäkko?

vzorák **Adam**, opravoval **Pľyš**

Táto veta slúži ako úvod do vzoráku, presnejšie ako pretlaková komora medzi nečítaním a čítaním obsažného textu.

Čo sa deje so vsypanou soľou? Rozpúšťa sa.

Čo je to rozpustenie? Rozpad kryštálu NaCl na katióny Na^+ a anióny Cl^-.

Prečo si to tá soľ robí? To je náročná otázka. Rozpustenie soli vo vode je totiž endotermická reakcia[3], a teda na zmenu soli a čistej vody na slanú vodu je potrebné spotrebovať energiu, konkrétne vnútornú energiu vody a čiastočne aj okolia, ktorej zodpovedá pokles teploty. Neobstojí teda lacný argument s minimalizáciou energie, deje sa predsa presný opak.

Prečo si to tá soľ teda robí? Pravda je taká, že na makroskopickej úrovni sa neminimalizuje energia, ale čosi zvané voľnou energiou. Máme ale šťastie, zadanie sa totiž zaujíma o čosi úplne iné. Zatiaľ sme dospeli k tomu, že za cenu vnútornej energie vody sa v nej rozpustí soľ, a teda sa zvýši hustota roztoku v nádobe. Ten následne (pomocou známeho hydromechanického procesu) zdvihne vajce z dna, pričom samozrejme koná prácu, za ktorú platí stratou potenciálnej energie (slaná voda klesne tam, kde bolo vajce). Zadanie sa pýta, odkiaľ pochádza energia použitá na zdvihnutie vajca.

Naše úvahy odhalili dvoch[4] strácačov (a teda potenciálnych dodávačov) energie: voda (utlmenie tepelného pohybu po rozpustení soli) a voda (pokles potenciálnej energie následkom poklesu).

Obaja hrajú svoju rolu. Energiu na zdvihnutie vajca dodá slaná voda, ktorá klesne a svoju potenciálnu energiu využíva na dvíhanie vajca. Kinetická vnútorná energia vody je využitá na vytvorenie podmienok, pri ktorých je zdvih vajca prirodzeným vyústením fyzikálnych zákonov. Pripodobniť to voľno možno k héliovému balónu v krabici. Síce k stropu vystúpi následkom našej námahy pri otváraní krabice (analógia vnútornej energie vody vynaloženej na rozpustenie soli), ale nemôžeme tvrdiť, že týmto činom sme ho k tomu stropu zdvihli my, tento čin je nutné pripísať práci vzduchu v miestnosti (slaná voda dvíhajúca vajce). Odpoveď je teda nevzrušujúca. Na zdvihnutie vajca sa použila potenciálna energia slanej vody.

Na záver si ešte ujasnime, prečo k vyplávaniu vajce nedôjde aj v sladkej vode. Keby sme vyzdvihli vajce v sladkej vode, tak potenciálna energia vody klesne o menej než porastie potenciálna energia vajca, takže takýto proces by znamenal nárast energie, preto k nemu nedochádza prirodzene, zatiaľ čo vyplávanie vajca v slanej vode sa asociuje s väčším poklesom potenciálnej energie vody než je nárast potenciálnej energie vajca, preto k tomuto javu dochádza spontánne.

Kde sa teda vzala tá dodatočná potenciálna energia? Na túto otázku sme už čiastočne odpovedali. Voda je tvorená polárnymi molekulami H_2O. Tie na úkor svojho tepelného pohybu rozbíjajú väzby Na^+Cl^- za cenu nárastu elektrostatickej potenciálnej energie. Ióny Na^+ a Cl^- sa následne rozptýlia po celom objeme vody, pričom s polárnymi molekulami vody vytvárajú energeticky výhodnú konfiguráciu, čím elektrostatická potenciálna energia energia klesne. Tento pokles kompenzuje nárast gravitačnej potenciálnej energie rozptýlených iónov vo vode oproti stavu, keby len tak ležali na dne,[5] a teda tento pokles elektrostatickej potenciálnej energie stojí za nárastom hustoty slanej vody, a teda nárastom jej gravitačnej potenciálnej energie, vďaka ktorej môže vajce vyplávať. Nezabúdajme však, že v prapočiatku za tým všetkým bol pokles vnútornej energie vody.

[3] Tu sa dopúšťame mierneho znásilnenia terminológie, rozpustenie soli vo vode totiž nie je chemickou reakciou, t. j. nedochádza k rozpadu a vytváraniu chemických väzieb.

[4] Ukáže sa, že toto číslo je len rádovým odhadom.

[5] Toto vysvetľuje, prečo vo vode nevieme rozpustiť ľubovoľne veľa soli, ale existuje nejaký horný limit. Od istého momentu by totiž bolo vo vode toľko iónov, že prítomnosť ďalších by už neviedla na dostatočne veľké zníženie elektrostatickej potenciálnej energie na to, aby vykompenzovalo nárast gravitačnej potenciálnej energie týchto ďalších iónov.

Komentár opravovateľa

Väčšina z vás mala riešenie dobre. Čo však pôsobí istý problém, je nasledovné: 1. pozor na zamieňanie pojmov sila a energia, 2. pozor na skloňovanie slova „vajce", prípadne na jeho zámenu na slovo „vajco" :)

2.6 Biliardové triky

vzorák **Helboj**, opravoval **Maťo B.**

Zadanie tohoto príkladu mohlo byť pomerne ťažké interpretovať. Tento vzorák predpokladá nasledujúce:

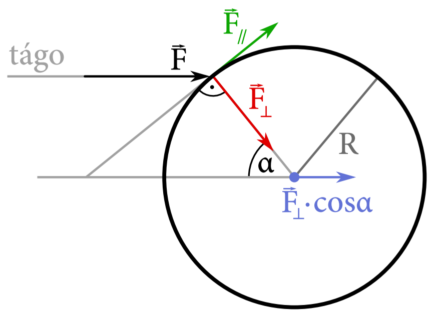
- medzi guľou a stolom je nulové trenie,
- medzi guľou a tágom zas dostatočne veľké na to, aby sa tágo po guli nemohlo kĺzať
- a tágom do gule udierame v smere rovnobežnom so stolom.

Čo sa teda stane, keď tágom šťuchneme do gule? Impulz, ktorý guľa dostala rozložme na zložku rovnobežnú s povrchom a kolmú na povrch. Sily, pôsobiace v mieste šťuchnutia budú

$$F_\perp = F\cos\alpha \qquad \text{a} \qquad F_\| = F\sin\alpha.$$

a spôsobia zmenu hybnosti v bode dotyku

$$p_\perp = p\cos\alpha \qquad \text{a} \qquad p_\| = p\sin\alpha.$$



Obrázok 2: *Rozklad síl pôsobiacich na guľu*

Aby guľa neprešmykovala, musí po šťuchnutí nastať stav, kedy lineárna rýchlosť v bude ekvivalentná uhlovej rýchlosti ω, teda

$$v = \omega R. \tag{1.6.1}$$

Lineárnu rýchlosť v si vieme jednoducho vyjadriť z hybnosti odovzdanej impulzom. K posunu budú prispievať zložky impulzu sily v smere pohybu

$$v = \frac{p_\perp}{m}\cos\alpha + \frac{p_\|}{m}\sin\alpha = \frac{p}{m}\cos^2\alpha + \frac{p}{m}\sin^2\alpha = \frac{p}{m}. \tag{1.6.2}$$

K rovnakému výsledku dospejeme jednoducho aj zo zákonu zachovania hybnosti.

Uhlovú rýchlosť získame z momentu hybnosti L. Z definície platí

$$L = R \times p_\|$$

a pre veľkosť momentu hybnosti

$$|L| = I\omega.$$

Využijeme, že moment zotrvačnosti gule I je rovný $\frac{2}{5}MR^2$ a uhlovú rýchlosť ω vyjadríme ako

$$\omega = \frac{5p_{\parallel}}{2mR} = \frac{5p\sin\alpha}{2mR} \tag{1.6.3}$$

Teraz dosadíme rovnice 1.6.2 a 1.6.3 do rovnice 1.6.1 a vyjadríme α

$$\frac{p}{mR} = \frac{5p\sin\alpha}{2mR} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\alpha = \frac{2}{5}.$$

Teda výška nad stredom gule, do ktorej musíme tágom udrieť, bude rovná

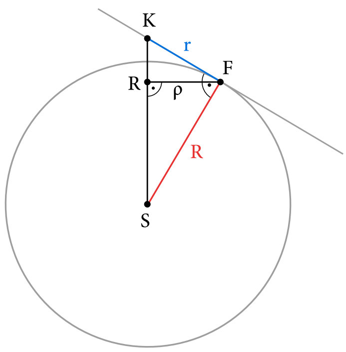
$$h = R\sin\alpha = \frac{2}{5}R.$$

2.7 Pirát plochozemec

vzorák **Dušan**, opravoval **Simon**

Ako ste si asi všimli, táto úloha nie je náročná výpočtovo, ale konceptuálne. Poďme teda zodpovedať kľúčové otázky: Prečo Francis vníma iný ako skutočný polomer kružnice ρ, po ktorej pláva, a aký je vzťah medzi skutočným a reálnym polomerom?

Francis je plochozemec, čo znamená, že pre neho je svet vždy lokálne rovinou. Človek 21. storočia (vynímajúc členov Flat Earth Society) znalý takmer dokonalej sférickosti Zeme si Francisovo vnímanie plochosti sveta môže predstaviť ako rovinu dotýkajúcu sa Zeme práve v bode F, v ktorom sa Francis nachádza. Pozri obrázok.



Obrázok 3: *Zem a zdanlivá plochozem z pohľadu vonkajšieho pozorovateľa*

Toto zamyslenie nám už veľa napovedá o tom, ako Francis meria polomer zdanlivej kružnice, po ktorej pláva. Jednak vieme, že stred zdanlivej kružnice K bude určite ležať na zdanlivej Francisovej rovine. (Konkrétne na priesečníku všetkých dotykových rovín k Zemi pozdĺž celej kružnicovej trajektórie). Dvak je to konzistentné aj s tým ako mohol Francis merať krivosť. Ak si vedel skonštruovať akcelerometer, pohyb po kružnici by sa prejavil na nenulovosti nameraného zrýchlenia. V smere kolmom na zdanlivú rovinu, t. j. v smere spojnice stredu Zeme S a bodu F by sa odstredivé zrýchlenie prejavilo iba ako malá korekcia g, a ako plochozemec by to to určite odignoroval. No v smere dotyčnicovom by nameral zrýchlenie a, ktoré by interpretoval ako $\frac{v^2}{r}$, z čoho by už jednoducho určil r. Zrýchlenie a však nie je nič iné ako dotyčnicová zložka odstredivého zrýchlenia veľkosti $\frac{v^2}{\rho}$. Keď si teraz zanalyzujeme trojuholníky FKS a RKF, a ich uhly na obrázku, dostaneme medzi spomínanými zrýchleniami vzťah

$$\frac{v^2}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}}\frac{v^2}{\rho},$$

z čoho vidno, že

$$\rho = \frac{Rr}{\sqrt{R^2 + r^2}}.$$

Druhý spôsob, ktorým mohol Francis merať polomer r, je z lokálnej krivosti. Inak povedané, ak by mal Francis na stranách lode kolieska, ktoré sa voľne otáčajú, polomer krivosti určí z rozdielu ich otáčok. Pri otočení o uhol φ, čo nie je nič iné ako pomer odplávanej dráhy s a polomeru r, by pozoroval, že koliesko bližšie k stredu kružnice prejde dráhu $\left(r - \frac{h}{2}\right)\varphi$ a koliesko ďalej zas $\left(r + \frac{h}{2}\right)\varphi$, kde h je šírka lode. Ak takto nameria polomer r na viacerých miestach svojej plavby, tak si potvrdí, že sa naozaj pohybuje po kružnici a tým sa potvrdzuje aj to, že bod K sa naozaj nachádza na priesečníku všetkých dotykových rovín k Zemi pozdĺž celej kružnicovej trajektórie. S týmto poznatkom vieme určiť polomer ρ aj geometricky. Pozrime sa na trojuholník FKS a jeho obsah. Keďže je pravouhlý, možno obsah vypočítať pomocou odvesien r a R, ako aj pomocou prepony $\sqrt{R^2 + r^2}$ a výšky ρ kolmej na ňu. Teda

$$\frac{1}{2}Rr = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + r^2}\rho,$$

čo je v zhode s predchádzajúcim výsledkom $\rho = \frac{Rr}{\sqrt{R^2+r^2}}$.

To, že je tento výsledok naozaj dobrý, možno ľahko overiť na dvoch okrajových prípadoch. Ak $r \to 0$, možno vyňatím R z menovateľa upraviť výsledok do tvaru $\rho = \frac{r}{\sqrt{1+\frac{r^2}{R^2}}} \to r$, keďže $\frac{r^2}{R^2} \ll 1$. Ako vidíme, v tejto limite je skutočný polomer ρ zhruba r, inak povedané, pre malé kružnice je Zem naozaj lokálne plochá. Pre $r \to \infty$ by sme mali očakávať, že Francis ide po tom, čo považuje za priamku a teda sa pohybuje po najväčšej možnej kružnici, teda po tej s polomerom $\rho = R$. A naozaj, ak vo výsledku vyjmeme pre zmenu z menovateľa r, dostaneme $\rho = \frac{R}{\sqrt{\frac{R^2}{r^2}+1}} \to R$, keďže $\frac{R^2}{r^2} \ll 1$.