Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Stĺp záchranca

vzorák **Katka**, opravovala **Katka**

Na začiatok si vyjadrime Adamíkovu rýchlosť u a Jarovu rýchlosť v:

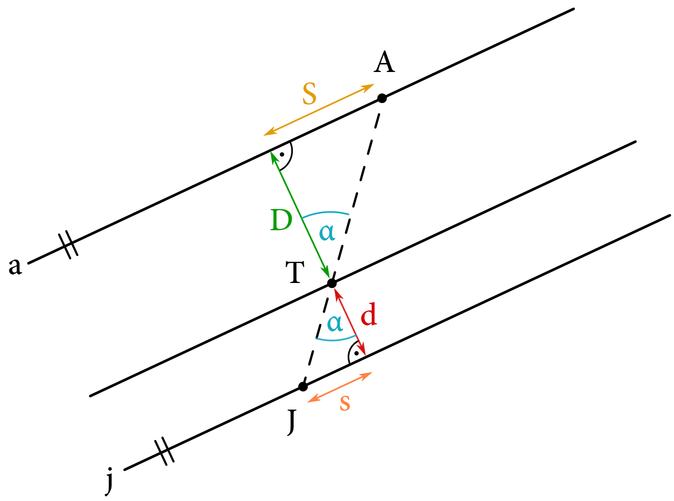
$$u = \frac{S}{t},$$

$$v = \frac{s}{t},$$

pričom t je nejaký čas, ktorý budú mať oba tvory stále rovnaký. Po vyjadrení t z oboch rovníc zistíme, že hľadaný čas v bude vyzerať takto:

$$v = \frac{s}{S}u.$$

Nakreslime si teraz, ako to vyzerá, keď sa Jaro J skrýva za stĺpom T pred Adamíkom A.



Z obrázka vidíme, že aby Jara J nebolo za stĺpom vidno, musia ležať body J, T a A na jednej priamke. To nám úplne vyhovuje, pretože v tom prípade musia byť uhly $\measuredangle ATX$ a $\measuredangle JTY$ stále rovnaké. Z podobnosti trojuholníkov nám potom vyplýva, že

$$\frac{S}{D} = \frac{s}{d}$$

a teda

$$\frac{s}{S} = \frac{d}{D}.$$

Po dosadení do prvej rovnice potom vidíme, že chudák Jaro bude musieť udržiavať konštantnú rýchlosť

$$v = \frac{s}{S}u = \frac{d}{D}u.$$

1.2 Kvíkove nabité gule

vzorák **Kiko**, opravoval **Kiko**

Vieme, že náboje s rovnakými znamienkami sa odpudzujú a náboje s opačnými znamienkami sa priťahujú. Poďme sa teda pozrieť, ako ďaleko by sme zašli len s touto informáciou. V prvom rade si môžeme všimnúť symetriu celého problému. Všetky náboje sú rozmiestnené symetricky do tvaru šesťuholníka a veľkosť ich nábojov je stále rovnaká, mení sa len ich znamienko. Ak sa budeme na situáciu pozerať z pohľadu jedného náboja a potom z pohľadu jeho suseda, musí pre každý z nich nastať rovnaká situácia. Každý náboj má po stranách dva príťažlivé náboje, potom dva odpudivé, a oproti jeden príťažlivý. Takže tá istá symetria bude aj v ich pohybe.

Pozrime sa ďalej, ako sú náboje rozmiestnené. Ak priložíme ku kladnému náboju kladný, odpudia sa a začnú sa pohybovať po priamke na ich spojnici. Sila potom pôsobí vždy smerom rovnobežným so spojnicou dvoch nábojov. V našom hexagóne sa teda zložky síl v smere kolmom na os symetrie prechádzajúcu cez náboj musia vykompenzovať. Výsledkom teda bude, že jediná možnosť je pohyb nábojov v smere do stredu hexagónu alebo od neho.

Aby sme vedeli zodpovedať túto otázku, musíme poznať správanie elektrostatickej sily. V našom prípade vyplýva z Coulombovho zákona

$$F = \frac{-Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

ktorý tvrdí, že sila závisí od vzdialenosti nepriamo úmerne druhej mocnine vzdialenosti a priamo úmerne veľkosti nábojov. Platí teda

$$F \propto \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Takýto príspevok sily môžeme vektorovo sčítať od každého z nábojov a získame výslednú silu, ktorá pôsobí na skúmaný náboj. Označme zápornú silu ako príťažlivú a dĺžku strany hexagónu a. V našom prípade, ako sme už spomínali, bude jediná nenulová zložka pôsobiť pozdĺž osi symetrie. Jednotlivé vzdialenosti si teda vieme vypočítať z výšky trojuholníka, prípadne uhlov. Pre výslednú silu dostávame

$$F_{\mathrm{os}} \propto 2\frac{-Q^2}{a^2}\cos 60° + 2\frac{Q^2}{3a^2}\cos 30° + \frac{-Q^2}{4a^2},$$

$$F_{\mathrm{os}} \propto \frac{-Q^2}{a^2} + \frac{Q^2}{3a^2}\sqrt{3} + \frac{-Q^2}{4a^2},$$

$$F_{\mathrm{os}} \propto \frac{Q^2}{a^2}\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\right) < 0.$$

Aha, dostávame pre výslednú silu zápornú hodnotu. Teda príťažlivá sila bude pôsobiť do stredu hexagónu, čím sa k sebe náboje pritiahnu, ale nezmenia formáciu.

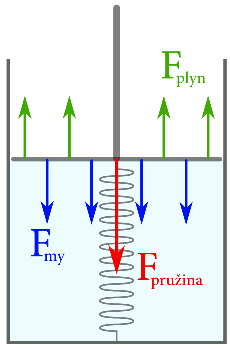
1.3 Piestýš

vzorák **Mary**, opravovala **Mary**

Mary sa prihodilo, že tento kanadský žartík má rozlúsknuť. Najprv zistila, že nulová pokojová dĺžka znamená, že čím je piest vyššie, tým viac sa pružina pokúša ťahať piest nadol, lebo je predĺžená. Teda platí $F = -kx$.

Ako bude vyzerať stavová rovnica uvažovaná pre náš plyn? Vieme, že pre sily platí $F_{\mathrm{my}} = F_{\mathrm{plyn}} - F_{\mathrm{pružina}}$. Tieto sily vyjadríme cez príslušné tlaky (plochy sú rovnaké, vykrátia sa):

$$p_{\mathrm{my}} = p_{\mathrm{plyn}} - p_{\mathrm{pružina}}.$$



Obrázok 1: *Sily pôsobiace na sústavu*

Tlak plynu vyjadríme pomocou stavovej rovnice $p_{\text{plyn}} = \frac{Nk_BT}{V}$. Pre tlak pružiny dostaneme

$$p_{\text{pružina}} = \frac{F}{S} = \frac{-kx}{S} = \frac{-kV}{S^2}.$$

Tu sme predĺženie pružiny x sme vyjadrili ako aktuálnu výšku uzavretej nádoby $\frac{V}{S}$.

Dosadíme p_{plyn} a $p_{\text{pružina}}$ do rovnice s tlakmi a dostaneme stavovú rovnicu pre náš tlak (odteraz budeme písať $p \equiv p_{\text{my}}$):

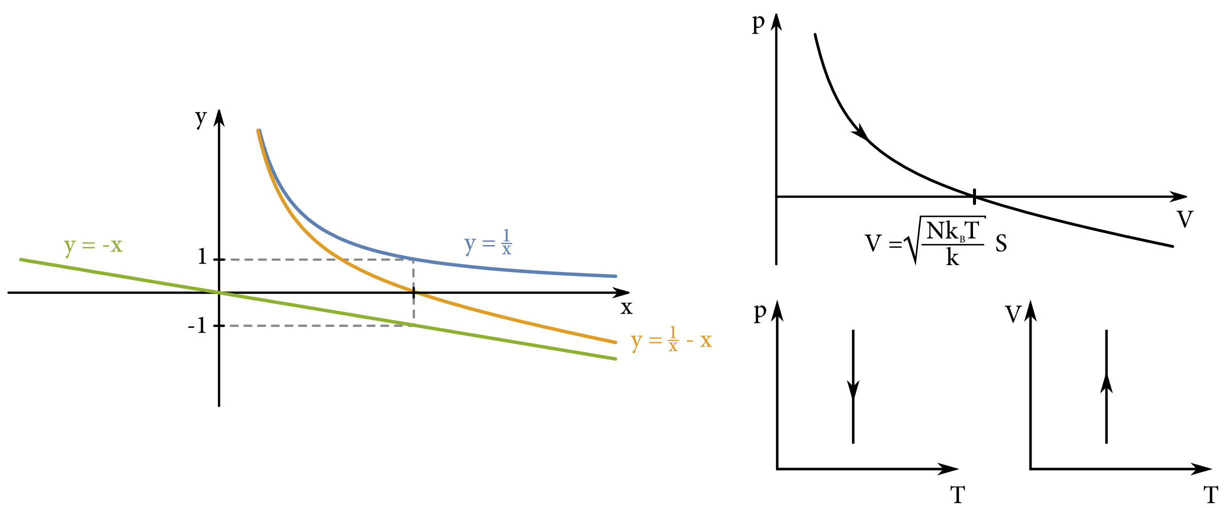
$$p = \frac{Nk_BT}{V} - \frac{-kV}{S^2}.$$

Teraz ju už len treba príslušne upravovať – podľa toho, aký dej prebieha.

Izotermický dej

Vidíme, že p je dané funkciou $\frac{1}{V} - V$. To je akoby funkcia $y = \frac{1}{x} - x$. Ľahko určíme priesečník s osou V – stačí, ak $p = 0$, viď obrázok. Ostatné diagramy sa veľmi líšiť nebudú.

Prečo ide tlak do záporných hodnôt? Je to tlak, akým tlačíme my. Ak je záporný, zodpovedá to zápornej sile a teda v takomto prípade piest ťaháme hore. Nastane to práve vtedy, keď objem plynu je veľký, teda piest je natiahnutý a pružina už priveľmi tlačí späť a túto silu musíme kompenzovať smerom hore. Pri veľkom objeme je i tlak plynu zanedbateľný, pretože zlomok $\frac{Nk_BT}{V}$ bude malý.



Obrázok 2: *Izotermický dej.*

Izochorický dej

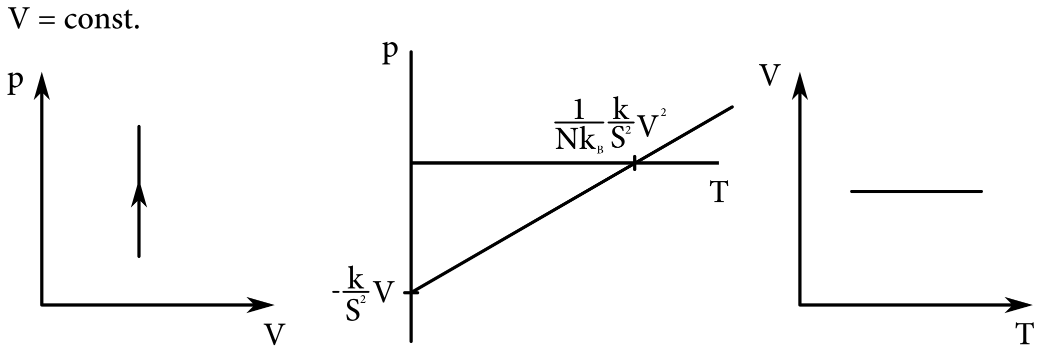
pV a VT diagramy sú zrejmé. Ešte pT. Vždy pri kreslení diagramov vychádzame zo stavovej rovnice. Vidíme, že p je úmerné T. Bude to preto akoby lineárna funkcia, avšak posunutá (píšem „akoby“, pretože diagramy nezaznačujú funkcie, ale všetky stavy, v ktorých plyn spĺňa stavovú rovnicu deja). Posunutie začiatku určíme, ak sa pozrieme na prípad $p = 0$. Dostaneme

$$\frac{Nk_BT}{V} = \frac{kV}{S^2},$$

a odtiaľ

$$T = \frac{kV^2}{S^2}\frac{1}{Nk_B},$$

čo je bod, kedy je $p = 0$, a teda je to bod, kde diagram pretína os T. Obdobne, keď položíme $T = 0$ zistíme, kedy pretne os p, viď graf.



Obrázok 3: *Izochorický dej*

Izobarický dej

Nezabudneme na zadanie, že vždy keď sa hovorí o tlaku, myslí sa tlak, ktorý vyvolávame my. Keďže p je konštantný, pV a pT diagramy sú zrejmé. Avšak VT diagram treba rozlúsknuť. Ako na to? Je to opäť hra s funkciami. Treba si uvedomiť, že s meniacou sa teplotou sa príslušne bude meniť objem, pretože tlak, ktorým pôsobíme, musí byť konštantný. Budeme sa snažiť nájsť nejakú funkčnú závislosť V od T, v ktorej p bude konštanta. Upravíme stavovú rovnicu nasledovne:

$$pV = Nk_BT - \frac{kV^2}{S^2}.$$

Po úprave na štvorec dostaneme

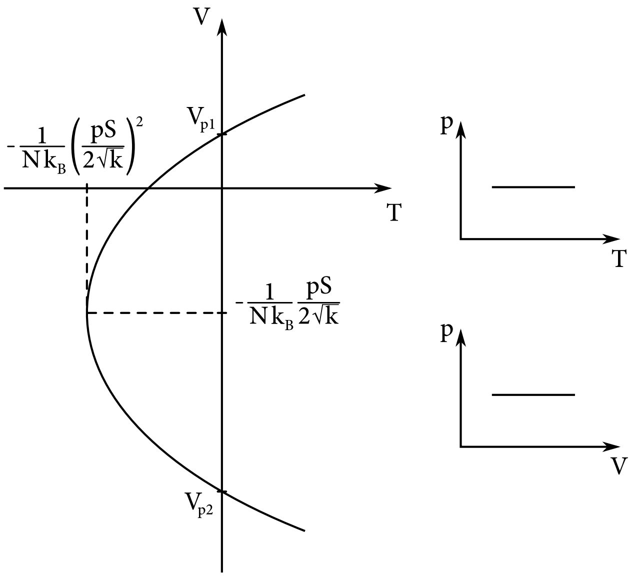
$$\left(\frac{pS}{2\sqrt{k}} + \sqrt{k}\frac{V}{S}\right)^2 - \left(\frac{pS}{2\sqrt{k}}\right)^2 = Nk_BT.$$

Ešte predelíme Nk_BT a z tejto formy vyčítame, kam sa nám posunie začiatok „súradnicovej sústavy“.

Ktoré osi a kde ich diagram pretne? Máme kvadratickú rovnicu: $\frac{kV^2}{S^2} + pV - Nk_BT = 0$. Predstavme si to ako funkciu x^2. Vypočítame korene (cez diskriminant) a dostaneme

$$V = -\frac{p}{2k} \mp \frac{S^2}{2k}\sqrt{p^2 + 4\frac{kNk_BT}{S^2}}.$$

To budú naše priesečníky na „véčkovej osi“, lebo sme to počítali pre V. A máme diagram.



Obrázok 4: *Izobarický dej*

1.4 Uzimený muzikant

vzorák **Krtko**, opravoval **Krtko**

Predtým, ako sa bezhlavo pustíme do strkania klavírov, gitár, fláut či huslí do mrazničiek alebo sáun, zamyslime sa, čo by sme mali od merania očakávať. Zadanie nám napovedá, že sa bude nejak meniť tón. Otázkou však ostáva, prečo? No, možností máme hneď niekoľko:

1. Teplotná rozťažnosť materiálov, z ktorých je náš hudobný nástroj. Obzvlášť citlivé by na to mali byť kovové struny. Vplyvom tepla sa struny predĺžia, čo spôsobí ich uvoľnenie. Struny sa teda natiahnu. Tým pádom sa zvýši vlnová dĺžka a zníži frekvencia.
2. Zvuk je mechanické vlnenie šíriace sa vzduchom. Rýchlosť, ktorou sa šíri, však nie je konštantná ale závisí od teploty ako
$$c = 331{,}57 + (0{,}607 \cdot T)\ \mathrm{m/s}.$$
To je spôsobené tým, že rýchlosť zvuku je závislá od hustoty vzduchu a obe veličiny, sú závislé od teploty.

Ako vidíme čím vyššia je teplota, tým vyššia je rýchlosť šírenia vĺn. A zároveň vieme, že pre vlny platí vzťah
$$\lambda = \frac{c}{f}.$$

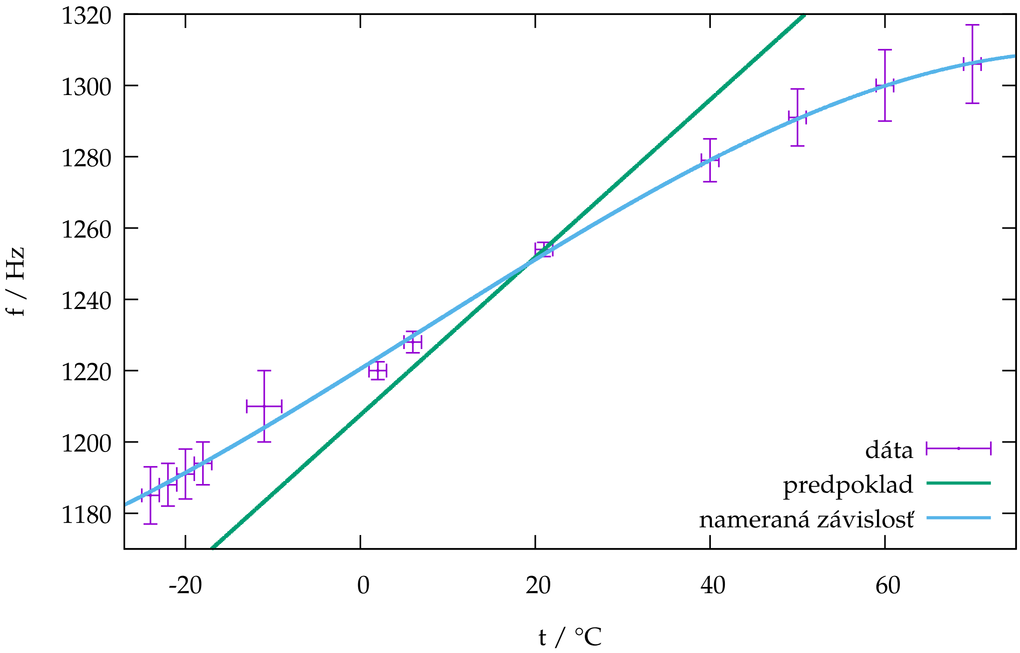
Ak teda budeme predpokladať, že vlnová dĺžka sa nemení, potom musí jasne stúpnuť frekvencia.

Došli sme teda ku dvom rôznym záverom – jeden nám hovorí, že frekvencia sa bude znižovať, pretože sa nám uvoľnia struny. Tento jav však bude mať minimálny vplyv na nástroje s malou teplotnou rozťažnosťou, ako je napríklad flauta. Druhý nám naopak hovorí, že frekvencia s teplotou porastie. Tento jav by mal byť pri všetkých nástrojoch zhruba rovnako viditeľný.

Teraz, keď máme nejakú predstavu o tom, čo by sme mohli namerať, môžeme si premyslieť, ako to chceme namerať. Ak chceme rozumne zmerať závislosť, budeme potrebovať aspoň tri, ideálne viac rôznych teplôt, pri ktorých pokus uskutočníme. Ak máte prázdnu mrazničku, tak ako ja, viete sa pohybovať v teplotách od −28 °C až po 80 °C pri ohrievaní v rúre. Do vyšších teplôt by som už radšej nešiel. Potom by sa mohla flauta začať topiť a to rozhodne nechceme. Meranie samozrejme netreba zabudnúť zopakovať pre všetky teploty viackrát, pre tento krát bude päť opakovaní stačiť.

Pre dychové nástroje by bolo ideálne fúkať vzduch danej teploty priamo do nástroja, no vzhľadom na niektoré už vcelku extrémne teploty, ktoré by nemusela zniesť batéria, ktorou by sme ventilátor napájali, budeme si musieť vystačiť s vlastným dychom. To samozrejme prináša problémy, pretože vzduch vychádzajúci z našich pľúc určite nebude mať −28 °C, či 80 °C. Kým opustí nástroj, určite zmení svoju teplotu. Naše meranie teda nebude zrovna najpresnejšie, ale dostaneme aspoň rádový odhad, aký vplyv má teplota na dychový hudobný nastroj.

Pre strunové nástroje by to mohlo byť jednoduchšie, netreba do nich fúkať. No, väčšina z nich sa nezmestí do mrazničky alebo rúry a sú omnoho citlivejšie na poškodenie. Taktiež naša teória naznačuje, že jav by pri strunových nástrojoch mal byť menej výrazný.



Obrázok 5: *Závislosť frekvencie flauty od teploty*

Ako vidíte na grafe, ja som pokus realizoval s flautou. Hodnoty vcelku zodpovedajú našim predpokladom a teda môžeme vidieť, že pri extrémnejších teplotách sme naozaj boli nepresnejší, čo sa dalo očakávať, keďže som do flauty fúkal vzduch zo svojich pľúc.

Na záver by som ešte spomenul, že na analýzu nahrávky ste mohli použiť napríklad Audacity.

1.5 Päť minút romantiky

vzorák **Simon**, opravoval **Simon**

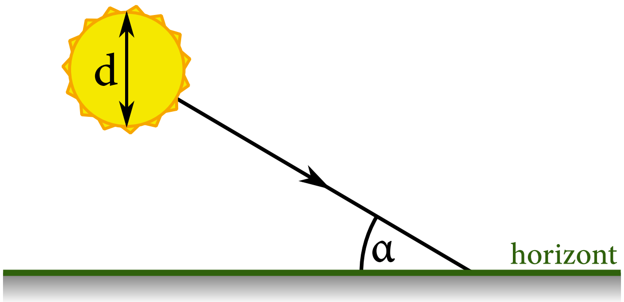
Táto úloha sa dala riešiť viacero možnými spôsobmi. Tu uvediem dva z nich. V prvom nájdeme trajektóriu Slnka po nebeskej sfére, a s využitím sférickej trigonometrie nájdeme uhol, pod akým Slnko zachádza za horizont. V druhom sa pozrieme na to, ako lokalita pozorovateľa prechádza cez pás polotieňa na Zemi.

Postup 1

V tomto postupe na zistenie toho, koľko bude slniečku trvať zapadanie, potrebujeme určiť tri veci:

1. Aké veľké je slniečko na oblohe,
2. Ako rýchlo ide po oblohe,
3. Pod akým uhlom bude zachádzať za horizont.

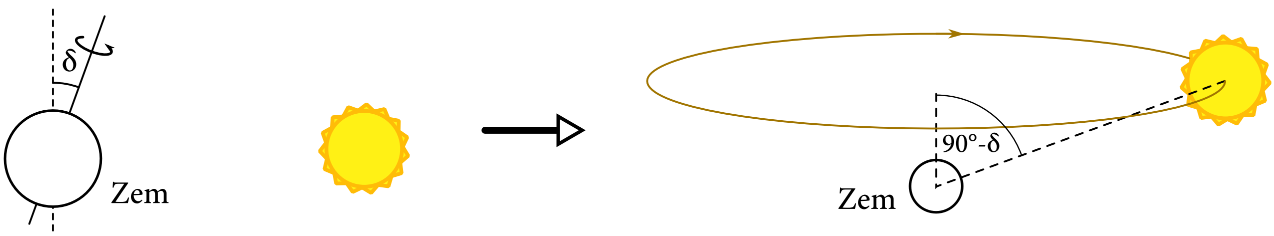
Trvanie západu potom bude čas, za aký slniečko na oblohe prejde vertikálnu vzdialenosť rovnú svojmu zdanlivému polomeru. Zachádzanie slnka za horizont je ilustrované na obrázku 6.



Obrázok 6: *Zachádzanie slniečka za horizont*

Pozrime sa teda na všetky tri záležitosti. Najprv ale ešte chcem pripomenúť, že všetky vzdialenosti aj rýchlosti, s ktorými tu budeme pracovať, nebudú dĺžkové vzdialenosti a rýchlosti, ale uhlové. To je preto, lebo Slnko, tak ako aj všetky ostatné objekty na oblohe, sa z pohľadu Zeme pohybuje po guli, ktorá sa v astronómii nazýva nebeská sféra, pričom Zem leží v strede tejto gule. No ale táto guľa je len imaginárna, a polohy objektov na nej sú len projekcie, takže vzdialenosti na nej nemá význam merať v dĺžkových jednotkách, význam majú len zlomky z celého obvodu gule, čo sú vlastne uhly. Inak povedané, guli môžete priradiť ľubovoľný polomer, vo výsledku sa aj tak vykráti.

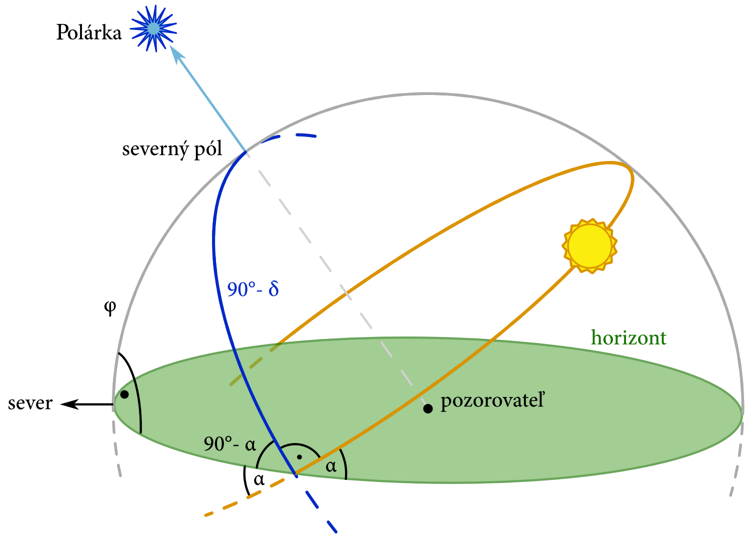
Oboznámení s touto skutočnosťou sa môžeme pozrieť na pohyb Slnka po nebeskej sfére. Vieme, že zemská os je k rovine obehu naklonená. Na prvý pohľad sa vám preto možno zdá, že dráha Slnka po oblohe bude nejaká strašne komplikovaná. Pomocou malého triku ale uvidíte, že to tak vôbec nie je. Jediné, čo treba spraviť, je vrátiť sa do starých čias a prehlásiť Zem za nehybnú, a Slnko za jej obežnicu. Prejdeme teda do takej sústavy, v ktorej os Zeme smeruje kolmo nahor a ktorá sa otáča spolu so Zemou. Takýto prechod je znázornený na obrázku 7.



Obrázok 7: *Prechod do sústavy, v ktorej Slnko obieha okolo Zeme*

No a v tejto novej sústave je predsa pozorovateľ nehybný! To znamená, že na obrázku 7 vidíme rovno dráhu, akú bude na oblohe opisovať Slnko. Už ju stačí iba nakloniť, keďže pozorovateľ stojí na obrázku naklonený.

Výsledok z prejdenia do novej sústavy teda je, že Slnko na oblohe opisuje kružnicu, ktorej stred je v smere severného pólu, ktorej uhlový polomer je $90° - \delta$, a ktorá je naklonená o φ voči horizontu. Teraz musíte veľmi silno zapojiť svoju predstavivosť. Výsledkom zapojenia vašej predstavivosti by mala byť situácia, ako znázornená na obrázku 8.



Obrázok 8: *Dráha Slnka po nebeskej sfére*

Naozaj, pokiaľ vám nebude jasná každá vec na tom obrázku, tak nečítajte ďalej. Čo sme na obrázku 8 dostali, je demonštrácia *geometrie na sfére*. Čo to je zač? Rovnako ako v rovine existujú nejaké množiny bodov (kružnice, priamky,…) a dajú sa nájsť pravidlá, ktoré musia útvary skonštruované z týchto množín spĺňať, to isté sa dá urobiť aj na povrchu gule. Napríklad jedno veľké odvetvie, *sférická trigonometria*, rieši trojuholníky na povrchu gule. A rovnako ako v rovine existuje Pytagorova veta, sínusová veta, atď., aj na guli existujú vzorčeky, ktoré mi zo znalosti nejakých parametrov trojuholníka umožnia vypočítať tie zvyšné. Nič viac, nič menej. Stačí si nalistovať na Wikipédii.

Najprv ale treba vlastne určiť, čo je trojuholník na guli. V rovine je trojuholník tvorený troma rovnými čiarami. Na guli ale nie sú rovné čiary. Ale skoro. Na guli sa považuje za rovnú čiaru to, čo človek dostane, keď nasadne do auta a ide stále rovno bez zatáčania volantom. Po čase sa samozrejme vráti na miesto, kde začal, takže zjavne nemohol ísť po rovnej čiare, ale je to to najrovnejšie, čo sa dá na guli dosiahnuť. Taká čiara sa volá *hlavná kružnica*.

Kontrolná otázka: Ktoré z čiar na obrázku 8 sú rovné?

Odpoveď: Modrá, horizont, a obrys znázorňujúci oblohu. Dráha slnka *nejde* po hlavnej kružnici.

Nechce už veľa ďalšej námahy uvedomiť si, že rovnú čiaru na guli tvorí vždy kružnica so stredom v strede gule. Nám sa teda ponúka nejaký ten trojuholníček. Napríklad trojuholník *sever – severný pól – bod západu Slnka*. Už zostáva len nalistovať si v nejakej múdrej internetovej stránke. Jedna z prvých vecí, čo tam na vás vyskočí, je asi sínusová veta. Táto veta je skoro úplne rovnaká ako pre rovinné trojuholníky, len treba brať aj sínusy dĺžok strán.[1] Pre náš prípad teda bude

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}=\frac{\sin\left(90^\circ-\delta\right)}{\sin 90^\circ},$$

a keďže $\sin\left(90^\circ - x\right) = \cos x$, tak máme

$$\cos\alpha=\frac{\sin\varphi}{\cos\delta}. \tag{1.5.1}$$

[1] Pamätajte, čo považujeme za dĺžku

Bod číslo 3 hotový! Teraz bod číslo 2. Je jasné, že Slnko musí celú svoju dráhu na oblohe opísať za 24 hodín. Ak je uhlový priemer kružnice $90° - \delta$, pri pohľade na obrázok 7 je zrejmé, že jeho polomer je $\sin(90° - \delta) = \cos\delta$, a teda dĺžka $2\pi\cos\delta$. Tak dostávame uhlovú rýchlosť slniečka na oblohe

$$\omega = \frac{2\pi\cos\delta}{24\,\mathrm{h}}. \tag{1.5.2}$$

Už zostáva len bod číslo jedna – nájsť uhlovú veľkosť Slnka. Tu nie je nad čím rozmýšľať, len pozrieť sa na internet, kde sa dočítame, že je rovný približne 32 uhlových minút $= 2\pi \cdot \frac{32}{360\cdot 60} = \frac{2\pi}{675}$ rad.[2] Ďalej ho označím d. A už len stačí to všetko dať dokopy – podľa obrázku 6 potrebujeme, aby Slnko prešlo vzdialenosť

$$x = \frac{d}{\sin\alpha}. \tag{1.5.3}$$

Teraz už môžete buď do vzorcov 1.5.1, 1.5.2 a 1.5.3 podosádzať čísla a tak dostať výsledok, alebo ich skombinovať a vyjadriť výsledok vo všeobecnosti. Všeobecný výsledok pre trvanie západu slnka je

$$t = \frac{x}{\omega} = 24\,\mathrm{h} \cdot \frac{d}{2\pi\sin\left(\arccos\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\delta}\right)\right)\cos\delta} = \frac{24\,\mathrm{h}}{675} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2\delta - \sin^2\varphi}} = 128\,\mathrm{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2\delta - \sin^2\varphi}},$$

kde sme využili, že $\sin = \sqrt{1 - \cos^2 x}$.

Aký utešený výsledok! Pamätajte, že δ je uhol dopadajúcich lúčov voči zemskej osi a φ je zemepisná šírka pozorovateľa na Zemi. Čo sa týka rovnodennosti, vtedy je uhol δ rovný nule a náš vzorček nám dá výsledok 191,29 sekundy = 3 min. 11 s. Čo sa týka slnovratov, počas zimného aj letného je uhol δ rovný náklonu zemskej osi voči rovine obehu, a to je 23,44°, a náš vzorček dá výsledok 237,90 sekundy = 3 min. 58 s. Vidíme teda, že počas rovnodenností je západ Slnka najkratší a počas slnovratov najdlhší, a v iných časoch roka osciluje medzi nimi.

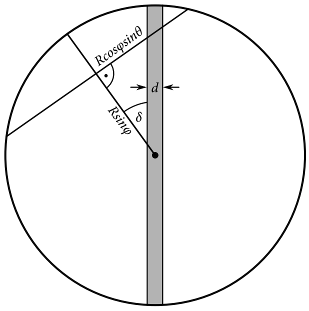
Ny záver si treba uvedomiť, že v riešení sme urobili jednu aproximáciu – predpokladali sme z obrázka 6, že slnko sa počas zapadania pohybuje po priamke, čo ale nie je pravda, keďže Slnko sa na oblohe pohybuje po kružniciach, čo sme si tak krvopotne uvedomovali, a teda dráha na obrázku 6 je v skutočnosti len malý úsek kružnice. Ten ale môžeme považovať za priamku, keďže uhlový priemer Slnka je oveľa menší, ako dĺžka celej jeho dráhy po oblohe. Akurát v polárnych krajoch by bol náš výsledok značne nepresný a museli by sme to počítať inak.

Už len dodám, že obrázok 8 je kľúčom k pochopeniu všetkých javov súvisiacich s pohybom slnka počas roka na oblohe. Skúste si napríklad premyslieť, ako by sa tento obrázok vyvíjal v čase pre nejaké fixné miesto na zemi (fixné φ, premenlivé δ), alebo ako by vyzeral pre miesto, kde práve prebieha polárny deň alebo noc.

Postup 2

V tomto postupe bude kľúčové uvedomiť si, že počas zapadania slnka prechádzjú Vladko s Katkou cez rozhranie medzi dennou a nočnou stranou zeme. To je pás čiastočného tieňa, ktorý sa tiahne okolo celej Zeme, a miesta ktoré sa v ňom práve nachádzajú, práve zažívajú západ/východ Slnka. Krátke zamyslenie nás privedie k záveru, že šírka tohoto pásu musí byť rovná uhlovému priemeru Slnka. Ďalej sa na celú situáciu môžeme pozerať v projekcii z boku, tak že pás polotieňa je vertikálny a dráha Vladka s Katkou ide vzhľadom na polotieň pod uhlom δ. Celý pohyb sa takto efektívne odohráva v rovine, nám stačí zobrať len správne zložky rýchlostí a vzdialeností, a určiť, koľko potrvá cesta Vladka s Katkou cez pás polotieňa. Všetko je znázornené na obrázku 9.

[2] Počas roka sa trochu mení. Teoreticky ste ho mohli zarátať, počas slnovratov to spraví celkom rozdiel.

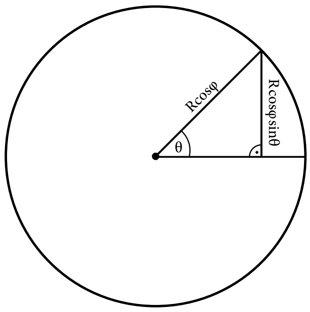


Obrázok 9: *Pohľad na Zem z boku*

Dôležité pozorovanie ešte je, že rýchlosť Vladka s Katkou premietnutá do roviny je úmerná kosínusu uhla θ medzi nimi a smerom kolmým na rovinu projekcie. Ak idú Vladko s Katkou po rovnobežke so zemepisnou šírkou φ, tak ich skutočná obežná rýchlosť je $\omega \cos \varphi$ a teda zložka v smere roviny je

$$\omega \cos \varphi \cos \theta,$$

kde ω je uhlová rýchlosť otáčania Zeme. Nás teda zaujíma uhol θ v momente, keď Vladko s Katkou prechádzajú cez pás. Na to, aby sme pochopili, kde sa na obrázku 9 vzala dĺžka $R \cos \varphi \sin \theta$, nám pomôže, ako inak, obrázok 10. Ten ilustruje pohľad zhora na rovnobežku, po ktorej sa dvojica pohybuje.



Obrázok 10: *Pohľad zhora na rovnobežku, po ktorej sa pohybujú Vladko s Katkou*

Teraz z geometrie pravouhlého trojuholníka na obrázku 9 vyplýva

$$\tan \delta = \frac{R \cos \varphi \sin \theta}{R \sin \varphi},$$

odkiaľ vyjadríme uhol θ

$$\theta = \arcsin\left(\tan \delta \tan \varphi\right).$$

A už to stačí len dať dokopy. Podľa obrázka 9 musia Vladko s Katkou cez pás prejsť vzdialenosť

$$\frac{d}{\cos \delta}$$

a to rýchlosťou

$$\omega \cos \varphi \cos\left(\arcsin\left(\tan \delta \tan \varphi\right)\right).$$

Teda čas, ktorý na to potrebujú, je

$$T = \frac{d}{\omega \cos\delta \cos\varphi \cos\left(\arcsin\left(\tan\delta \tan\varphi\right)\right)}.$$

Opäť využijeme že $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ a dostaneme

$$T = \frac{d}{\omega\sqrt{\cos^2\delta \cos^2\varphi - \sin^2\delta \sin^2\varphi}}.$$

Teraz už len stačí znova napísať $\cos^2\varphi$ v prvom člene ako $1 - \sin^2\varphi$ a $\sin^2\delta$ v druhom ako $1 - \cos^2\delta$, a dostávame

$$T = \frac{d}{\omega\sqrt{\cos^2\delta - \sin^2\varphi}},$$

čo je rovnaký výsledok, ako predchádzajúcou metódou :)

1.6 Plackozem

vzorák **Dušan**, opravovali **Frederik** a **Dušan**

Po prečítaní zadania isto šípite, že na vyriešenie tejto úlohy bude postačujúce vedieť, ako žiari dokonale čierne teleso. Tak sa rovno do toho pusťme.

Celkový žiarivý výkon dokonale čierneho telesa plochy S a teploty T vyjadruje Stefan-Boltzmannov zákon. Platí

$$P = \sigma T^4 S,$$

kde σ je Stefan-Boltzmannova konštanta. Z toho je teda jasné, že žiarivý výkon Plackoslnka, ktorý zodpovedá množstvu energie vyžiarenej smerom k Plackozemi je $P_\odot = \sigma T_\odot^4 \pi R_\odot^2$.

Druhý poznatok, ktorý musíme využiť je, že intenzita žiarenia dopadajúceho na plochu ΔS, ktorá je k nemu kolmá, klesá s uhlom θ, pod ktorým bolo žiarenie vyžiarené z plochy zdroja S.[3] Inak povedané, musíme vedieť, čo je to lambertovský rozptyl.[4] V jazyku matematiky

$$I = \frac{P}{\Delta S} = \sigma T^4 S \frac{\cos\theta}{\pi l^2},$$

pričom l je vzdialenosť plochy zdroja a plochy, na ktorú dopadá žiarenie.

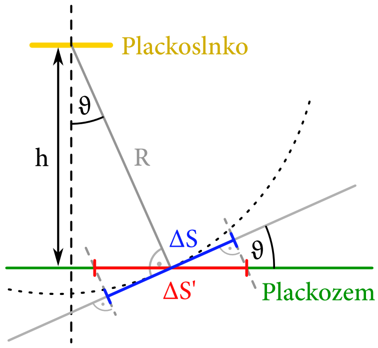
Teraz by ste sa mohli spýtať: „Prečo to vlastne platí?“ Ľahká odpoveď by bola: „Lebo to tak vyšlo.“ Tá ťažká sa skladá z niekoľkých malých odpovedí. Jednak uvažujme, že plocha žiariča S je malá, takže nech sa plocha ΔS nachádza kdekoľvek, bude uhlový rozmer žiariča rovnaký. (To je aj náš prípad, lebo $R_\odot \ll h$.) Intenzita žiarenia čierneho telesa klesá s odklonom od kolmice k ploche žiariče ako $\cos\theta$ a taktiež klesá prirodzene so vzdialenosťou ako l^{-2}. Ako ako posledné musíme žiadať, aby sa vyžiarený výkon nikde nestrácal, čiže ak by sme obalili zdroj nejakou plochou, tá musí všetok výkon zachytiť. Ak sa teraz spýtame, aký výkon prijme kolmá plocha ΔS vo vzdialeností l pod uhlom φ od zdroja, určite musí platiť

$$P_{\Delta S} \propto P \frac{\cos\theta}{l^2} = \sigma T^4 S \frac{\cos\theta}{l^2}.$$

[3] Znie to trochu zmätočne, no keď si to ešte raz poriadne prečítate a pozriete sa na vzorec a neskôr obrázok, isto to pochopíte :)

[4] Lambertovský rozptyl sme spomínali v druhom kole zimnej série. Viac si môžete prečítať napríklad tam alebo na wikipédii https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert's_cosine_law

To je takmer výsledok, ktorý sme uviedli. Konštanta π sa v menovateli nachádza kvôli požiadavke zachovania vyžiareného a prijatého výkonu.[5]



Obrázok 11: *Plackoslnko žiariace na plochu $\Delta S'$ na Plackozemi pod uhlom θ.*

Po dlhšom úvode sa vráťme späť k nášmu problému. Máme zistiť, ako bude vyzerať teplota na každom mieste Plackozeme. Je očividné, že náš problém má cylindrickú symetriu a najvyššiu teplotu bude mať bod priamo pod Plackoslnkom. To znamená, že chceme nájsť funkciu $T(R)$, kde R je vzdialenosť od najteplejšieho bodu na Plackozemi. Zamerajme sa teraz na plochu $\Delta S'$ vo vzdialenosti R od najteplejšieho bodu a pod uhlom θ od Plackoslnka. Pre uhol θ samozrejme platí $\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$. Podľa vyššie uvedeného, na plochu $\Delta S'$ dopadá žiarenie s výkonom

$$P_{in} = P_{\odot}\frac{\Delta S\cos\theta}{\pi\left(R^2+h^2\right)} = \sigma T_{\odot}^4 R_{\odot}^2\frac{\Delta S' h^2}{\left(R^2+h^2\right)^2},$$

kde $\Delta S = \Delta S'\cos\theta$ je plocha kolmá na dopadajúce žiarenie, efektívne zodpovedajúca ploche $\Delta S'$ na Plackozemi.

Plocha $\Delta S'$ nie len energiu prijíma, ale aj vyžaruje. Keďže aj Plackozem považujeme za čierne teleso, triviálne platí

$$P_{out} = \sigma T^4\Delta S'.$$

Vieme, že teplota je na Plackozemi ustálená a teda musí platiť $P_{\mathrm{in}} = P_{\mathrm{out}}$. Porovnaním oboch výrazov dostaneme

$$T^4 = \frac{R_{\odot}^2 h^2}{\left(R^2+h^2\right)^2}T_{\odot}^4,$$

a teda

$$T = \sqrt{\frac{R_{\odot}h}{R^2+h^2}}T_{\odot} = \sqrt{\frac{R_{\odot}}{h}\cos\theta}\, T_{\odot}.$$

Tak a to je všetko. Teraz môžete dosadiť konkrétne hodnoty a skúste nájsť interval vzdialeností R, na ktorých by sme dokázali žiť. A môžete sa zamyslieť aj nad tým, čo by muselo pribudnúť, aby sa na takej Plackozemi striedal deň s nocou.

1.7 Troll science

vzorák **Simon**, opravoval **Simon**

Označme si rýchlosť kabíny s trollom tesne pred výskokom v, rýchlosť trolla po výskoku u a rýchlosť kabíny po výskoku w. Za kladný smer si zvoľme smer nadol.

[5] Pre tých čo vedia integrovať, vyjadrite si kolmú plochu na sfére vo sférických súradniciach ako $dS = l^2\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$ a preintegrujte cez polsféru, do ktorej vyžaruje plochý zdroj a uvidíte, že musí byť v menovateli π, aby ste dostali vyžiarený výkon.

Začnime tým, čo vieme o výskoku okamžite povedať. Rozhodne musí platiť zákon zachovania hybnosti, podľa ktorého

$$(m+M)\,v = mu + Mw,$$

kde m je hmotnosť trolla a M je hmotnosť kabíny. Zákon zachovania mechanickej energie nemôžeme priamo použiť, pretože trollove nohy vykonávajú pri výskoku prácu. Čo ale môžeme bez obáv tvrdiť, je, že zmena kinetickej energie sústavy pri výskoku je rovná vykonanej práci W, alebo

$$\frac{1}{2}(m+M)\,v^2 + W = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Mw^2.$$

Otázkou je, či vieme nejako zistiť, akú prácu vykonajú trollove nohy.

Máme informáciu o tom, do akej výšky vie troll vyskočiť na pevnej zemi. Čo to ale znamená pre výskok v padajúcom výťahu? Rozhodne vieme povedať, že výška výskoku je v oboch prípadoch limitovaná silou, akú vedia trollove nohy pri výskoku vyvinúť. Pokiaľ sa troll snaží vyskočiť najviac, ako to ide, tak sila bude v oboch prípadoch rovnaká. Vieme tento poznatok nejako zúročiť?

Zadanie nás nabáda, aby sme sa zamysleli nad prácami a impulzmi síl, teda nad integrálmi $W = \int F\,\mathrm{d}s$, resp. $I = \int F\,\mathrm{d}t$. Vieme o niektorom z nich povedať, že je rovnaký v prípade výskoku z pevnej zeme i pri výskoku v padajúcej kabíne výťahu. Ak nie, tak preskúmajme oba prípady.

Najskôr predpokladajme, že impulz sily je to, čo je rovnaké v oboch prípadoch. Vieme, že troll vyskočí z pevnej zeme do výšky h, takže tesne po výskoku má rýchlosť $v_0 = \sqrt{2gh}$. To znamená, že si udelí impulz veľkosti $I = m\sqrt{2gh}$. Rovnako veľký impulz udelí aj zemi.[6] Ak si rovnaký impulz udelí aj v padajúcom výťahu, tak potom môžeme písať

$$mv - mu = m\sqrt{2gh}.$$

Spolu so zákonom zachovania hybnosti dostávame sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych, ktorej riešením sú rýchlosti trolla a kabíny po výskoku

$$u = v - \sqrt{2gh},$$

$$w = v + \frac{m}{M}\sqrt{2gh}.$$

Môžeme sa pozrieť, aká práca nôh zodpovedá tomuto prípadu. Z energetickej bilancie jednoducho dostávame

$$W = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Mw^2 - \frac{1}{2}(m+M)\,v^2 = mgh\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

Keď sa tomuto výsledku prizrieme bližšie, zbadáme, že nemôže zodpovedať realite. Jednak si všimnime, že rýchlosť trolla po výskoku nezávisí od hmotnosti kabíny. To znamená, že by sa rovnako dobre mohol odraziť od svojej topánky, ktorá by vďaka tomu získala obrovskú rýchlosť a vystrelila by nadol ako projektil. Zároveň by si tento akt vyžiadal šialené množstvo energie, čo vidíme z energetickej bilancie, nakoľko hmotnosť M vystupuje v menovateli.

Uvažujme teda druhý prípad. Nech práca nôh je v oboch prípadoch rovnaká. Keďže troll z pevnej zeme vyskočí do výšky h, jej množstvo je $W = mgh$. To sa líši oproti predchádzajúcemu prípadu iba chýbajúcim faktorom $\left(1+\frac{m}{M}\right)$ a v prípade ďaleko ťažšej kabíny (hobit vo výťahu) dáva rovnaký výsledok. Zákon zachovania hybnosti

[6] Nenechajte sa zmiasť tým, že rýchlosť zeme sa pri výskoku nijako nezmení. Aby platil zákon zachovania hybnosti, musí sa aj hybnosť zeme zmeniť o rovnakú hodnotu, teda o $m\sqrt{2gh}$ opačným smerom. Keďže ale zem považujeme za nekonečne ťažkú, tak jej zmena rýchlosti je nekonečne malá. Výraz $\Delta p_\oplus = M_\oplus \cdot \Delta v_\oplus$ je totiž výraz typu $\infty \cdot 0$, a ten môže nadobúdať akúkoľvek hodnotu z rozsahu 0 až ∞.

spolu s rovnicou pre energetickú bilanciu

$$\frac{1}{2}\left(m+M\right)v^2+mgh=\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}Mw^2$$

potom dáva rýchlosť trolla po výskoku

$$u=v-\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{m}{M}}}.$$

Pre zaujímavosť, to zodpovedá získanému impulzu sily

$$I=mv-mu=m\sqrt{2gh}\sqrt{\frac{M}{M+m}}.$$

V prípade, že kabína je ďaleko ťažšia (hobit vo výťahu) je to rovnaký impulz ako pri výskoku z pevnej zeme. V prípade, že kabína má zanedbateľnú hmotnosť (Samko vo výťahu), rýchlosť Samka sa prakticky nezmení (Samko zohráva úlohu pevnej zeme).

Dospeli sme teda k záveru, že správny môže byť len druhý prípad, teda že práca je rovnaká pri oboch výskokoch. Keď zo zákona zachovania energie ešte dopočítame rýchlosť kabíny s trollom tesne pred výskokom, ktorá je $v=\sqrt{2gH}$, dostaneme pre rýchlosť trolla po výsoku $u=\sqrt{2gH}-\sqrt{\frac{M}{M+m}2gh}$, čo opäť zo zákona zachovania energie dáva zodpovedajúcu výšku pádu bez výskoku

$$\mathcal{H}=\frac{u^2}{2g}=\left(\sqrt{H}-\sqrt{\frac{h}{1+\frac{m}{M}}}\right)^2.$$

Na záver sa hlbšie zamyslime, či to, čo sme dostali, dáva zmysel aj na základe teoretických úvah. Čítať len na vlastné riziko. Sila medzi trollom a objektom, z ktorého sa odráža, pôsobí iba na krátkej dráhe, na ktorej sú nohy s objektom v kontakte. Táto sila závisí od toho, v akej fáze výskoku sa troll nachádza, teda od vzdialenosti trolla od odrazového objektu. Sila, ktorou pôsobí troll na objekt je podľa tretieho Newtonovho zákona v každom momente rovnako veľká ako sila, ktorou pôsobí objekt na trolla. Trollovi je pri výskoku udelená energia zodpovedajúca práci, ktorú vykoná sila od odrazového objektu pôsobiaca na dráhe, ktorú urazí troll počas kontaktu jeho nôh s objektom.[7] Matematicky zapísané $W_{\mathrm{troll}}=\int_{\mathrm{dráhatrolla}}F\,\mathrm{d}s_{\mathrm{troll}}$. Odrazovému objektu je zase udelená energia $W_{\mathrm{objekt}}=\int_{\mathrm{dráhaobjektu}}F\,\mathrm{d}s_{\mathrm{objekt}}$. Celková práca je teda $W=W_{\mathrm{troll}}+W_{\mathrm{objekt}}=\int_{\mathrm{celkovádráha}}F\,\mathrm{d}s$, no a tento integrál je rovnaký pri výskoku zo zeme i pri výskoku vo výťahu, pretože priebeh sily nám závisí od vzájomnej polohy trolla a odrazového objektu a dráha je v oboch prípadoch rovnaká, keďže k ich oddeleniu dôjde pri tej istej vzdialenosti. Z toho dôvodu možno nohy nahradiť pružinkou, keďže aj sila pružinky závisí len od predĺženia, teda de facto od vzdialenosti trolla a odrazového objektu. Hodnota uvedeného integrálu je rovná uloženej energii v stlačenej pružinke, a tá závisí len od miery stlačenia a tuhosti a nie od hmotností objektov, ktoré spája. Na druhej strane, impulz, ktorý si pri výskoku udelí troll, je $I_{\mathrm{troll}}=\int F\,\mathrm{d}t=\int F\frac{\mathrm{d}s_{\mathrm{troll}}}{\mathrm{d}s_{\mathrm{troll}}}\,\mathrm{d}t=\int_{\mathrm{dráhatrolla}}\frac{F}{v_{\mathrm{troll}}}\,\mathrm{d}s_{\mathrm{troll}}$ a impulz, ktorý udelí troll objektu je analogicky $I_{\mathrm{objekt}}=\int_{\mathrm{dráhaobjektu}}\frac{F}{v_{\mathrm{objekt}}}\,\mathrm{d}s_{\mathrm{objekt}}$. Hodnoty týchto impulzov zjavne závisia od toho, či ide o výskok z pevnej zeme alebo v padajúcej kabíne, nakoľko závisia od rýchlostí, a tie sú v týchto prípadoch rôzne a závisia na hmotnostiach trolla a objektu, preto nemôžu byť impulzy v jednotlivých prípadoch rovnaké.

[7] Pozor, táto dráha nie je rovná celkovej vzdialenosti, o ktorú sa troll a objekt vzdialia počas doby kontaktu, pretože časť tejto vzdialenosti pripadá aj na dráhu odrazového objektu.