Fyzikálny korešpondenčný seminár
31. ročník, 2015/2016

FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 1. kola zimnej časti 2015/2016

1. Vážna úvaha (opravoval Duško)

Dušan sa minule po dlhom čase postavil na váhu. To ho donútilo zamyslieť sa: ako váha funguje? A čo ak by sme chceli zistiť hmotnosť telesa v beztiažovom stave? Vedeli by ste navrhnúť, ako sa to dá?

Tak som sa teda zamyslel, a predsa len som na niečo prišiel.

Najprv si povieme niečo o váhe a o tom, ako funguje. To, čo naozaj meriame váhou, je sila, ktorou na ňu pôsobíme, nie hmotnosť. My však poznáme prevod medzi našou hmotnosťou a tiažovou silou. Konkrétne $F = mg$, kde g je tiažové zrýchlenie, čiže žiaden problém. Otázkou teda zostáva: „ako zmeriame silu?“ Štandardne sa používa pružina, lebo sa stláča rovnomerne.[1] To znamená, že výchylka pružiny od rovnovážnej polohy x je priamo úmerná pôsobiacej sile, čo zapíšeme ako $F = kx$, kde k je tuhosť pružiny. Keď si dáme dve a dve dohromady, prídeme na to, že v takej pružinovej váhe stačí vyrobiť ciferník, ktorý ukáže hmotnosť $(k/g)x$, ak sa pružina váhy stlačí o x po tom, čo sa na ňu postavíme.

Len tak pre zaujímavosť spomeniem, že dnes sa štandardne stretnete s elektronickými váhami. Tie však fungujú na podobnom princípe ako pružinové, no miesto pružiny sa tam používa piezoelektrický kryštál. To je taký materiál (konkrétne dielektrikum), v ktorom sa pri mechanickej deformácii vytvára elektrické napätie. To vieme jednoducho merať a ak poznáme prevod medzi týmito veličinami, tak už pomerne ľahko vieme postaviť funkčnú váhu.

Teraz k tej druhej, zaujímavejšej otázke: „Ako zmerať hmotnosť v beztiažovom stave?“ Teda prakticky v stave, kde nemôžeme merať tiažovú silu. Možností je viacero, no najkrajší bude asi príklad z praxe. V ňom sa využíva tiež pružina, ale merajú sa jej kmity. Konkrétne sa na ňu zavesí objekt, ktorého hmotnosť chceme merať, uvedie sa do pohybu a meria sa perióda jeho kmitov. Ak by sme chceli zistiť, aký je prevod medzi hmotnosťou a periódou, museli by sme vyriešiť pohybovú rovnicu

$$ma(t) = -kx(t).$$

Jej riešenie je však pomerne známe, lebo sa jedná o lineárny harmonický oscilátor, ktorého perióda kmitov je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

[1] teda vo väčšine prípadov

a teda hmotnosť vieme vyjadriť ako

$$m = \frac{kT^2}{4\pi^2}.$$

No a toto je presne to, čo sme hľadali. Samozrejme, medzi vašimi riešeniami sa našli aj iné spôsoby, nie len tento. Nebojte sa, ak boli fyzikálne správne, boli odmenené plným počtom bodov.

2. Štafetová cyklovačka (opravoval Vladko)

Dvojkolesovačka Trihedronu naberá na obrátkach. Pripravuje sa na nej úplne nová súťažná disciplína – štafetová cyklovačka! O čo ide?

V každom tíme je niekoľko jazdcov. Jeden z nich je vždy na trati, zatiaľ čo ostatní môžu v kľude oddychovať v sprievodnom vozidle. Potom sa môžu kedykoľvek prestriedať na ľubovoľnom mieste trate.

Enka a Kvík začali poctivo trénovať a popri tom vymýšľajú víťaznú stratégiu. Zatiaľ zvažujú dve. V prvej budú obaja bicyklovať rovnako dlhý čas, v druhej každý odbicykluje rovnakú časť trate. Trať bude mať $45\ \mathrm{km}$. Enka dokáže na bicykli vyvinúť rýchlosť $27\ \mathrm{km/h}$ a Kvík až $35\ \mathrm{km/h}$. Ktorá stratégia je lepšia? Dokážete vymyslieť nejakú ešte lepšiu stratégiu? Aká stratégia je ideálna?

Aby sme rozhodli, ktorá z navrhovaných taktík je lepšia, vypočítame si, aký čas t by trvalo prejdenie celej trate s aplikovaním jednotlivých taktík. Ak Enka bicykluje rýchlosťou v_E, tak za čas $t_\mathrm{E} = t/2$ prejde úsek dlhý s_E. Analogicky platí pre Kvíkove v_K, t_K a s_K to isté. Môžeme teda napísať:

$$s = s_\mathrm{E} + s_\mathrm{K}$$

$$s = \frac{v_\mathrm{E} t}{2} + \frac{v_\mathrm{K} t}{2}$$

$$t = \frac{2s}{v_\mathrm{E} + v_\mathrm{K}} \approx 1{,}45\ \mathrm{h}.$$

Pre druhú taktiku platí $s_\mathrm{E} = s_\mathrm{K} = s/2$, z čoho vyplýva:

$$t = t_\mathrm{E} + t_\mathrm{K}$$

$$t = \frac{s_\mathrm{E}}{v_\mathrm{E}} + \frac{s_\mathrm{K}}{v_\mathrm{K}}$$

$$t = \frac{s}{2v_\mathrm{E}} + \frac{s}{2v_\mathrm{K}} \approx 1{,}47\ \mathrm{h}.$$

Teda prvá taktika je rýchlejšia o vyše jednu minútu. Lenže ako nájdeme najlepšiu taktiku? Napríklad tak, že vyjadríme čas prejdenia dráhy t pomocou dráhy, ktorú prejde Enka s_E. Keďže Kvík prejde vzdialenosť $s_\mathrm{K} = s - s_\mathrm{E}$, tak pomocou už vyššie spomenutej rovnosti napíšeme:

$$t = \frac{s_\mathrm{E}}{v_\mathrm{E}} + \frac{s - s_\mathrm{E}}{v_\mathrm{K}}$$

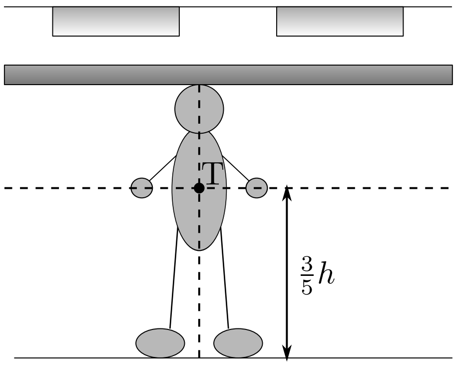
$$t = \frac{s_\mathrm{E}}{v_\mathrm{E}} + \frac{s}{v_\mathrm{K}} - \frac{s_\mathrm{E}}{v_\mathrm{K}}$$

$$t = \left(\frac{1}{v_\mathrm{E}} - \frac{1}{v_\mathrm{K}}\right) s_\mathrm{E} + \frac{s}{v_\mathrm{K}} \approx 0{,}0085 s_\mathrm{E} + 1{,}29.$$

Ako vidíme, závislosť je lineárna a keďže koeficient pri s_E je kladný, musí byť rastúca. Čo z toho vyplýva? Čím väčšiu časť pretekov prejde Enka, tak tým väčší čas vo výsledku bude naša dvojica mať. Najlepší čas dosiahnu, keď celé preteky bude bicyklovať len Kvík a Enka ho radšej zostane celý čas povzbudzovať v sprievodnom vozidle. Tento čas pre $s_\mathrm{E} = 0$ bude približne jedna hodina a sedemnásť minút. Výsledná taktika by nás nemala prekvapiť. Nakoľko obaja cyklisti majú konštantnú rýchlosť (neunavujú sa) a Kvík je rýchlejší, mali by sme ho nasadiť na celú dĺžku pretekov.

3. Surfovanie v MHD (opravoval Paťo)

Spomínate si na príklad z minulého semestra s cestujúcim Vladkom v 39-tke? Tak tento príklad je jeho pokračovaním. Tento raz Maťo, Mišo a Kubo cestovali v pražskom metre. Ako iste tušíte, opäť raz tam nezostalo veľa miesta, takže sa nemali čoho chytiť. Ani koeficient trenia medzi stropom a rukou nebol veľmi priaznivý a oni museli vymyslieť nový spôsob, ako udržať rovnováhu. Od vás by radi vedeli, či spadnú alebo nie. Maťo sa postaví bokom k smeru jazdy. Na podlahu vždy pôsobí iba svojou tiažou. Presúvaním ťažiska v konštantnej výške medzi rozkročenými nohami z jednej nohy na druhú sa snaží udržať rovnováhu. Maťo váži $81\ \mathrm{kg}$, je vysoký $185\ \mathrm{cm}$ a môžete predpokladať, že jeho ťažisko je v $3/5$ jeho výšky. Vzdialenosť medzi jeho nohami je $40\ \mathrm{cm}$ a koeficient trenia medzi topánkami a podlahou metra je 0,5. Maťa by teraz zaujímalo, pre aké hodnoty zrýchlenia sa mu podarí udržať rovnováhu presúvaním ťažiska z jednej nohy na druhú.



Obr. 1: Maťovo ťažisko

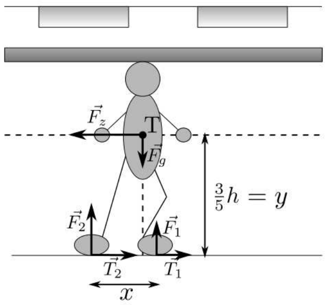
Zrýchľujúce alebo spomaľujúce metro je z Maťovho pohľadu tzv. neinerciálna vzťažná sústava. To je sústava, ktorá sa voči inerciálnej sústave (napríklad voči nástupišťu) pohybuje s nejakým zrýchlením.

V neinerciálnych sústavach platí, že okrem síl, ktorých pôvod dôverne poznáme, bude na Maťa pôsobiť ešte ďalšia, tzv. fiktívna sila. V našom prípade sa sila, ktorá na Maťa pôsobí v zrýchľujúcom metre, nazýva *zotrvačná* sila. Jej veľkosť je $F_\mathrm{z} = ma$, kde a je veľkosť zrýchlenia metra. Smer zotrvačnej sily je presne opačný ako smer zrýchlenia vzťažnej sústavy.

Aby sme mohli vypočítať maximálne možné a, musíme si, najlepšie do obrázku, zakresliť všetky sily, ktoré pôsobia na Maťa. Predpokladajme, že metro zrýchľuje smerom doprava, takže zotrvačná sila musí pôsobiť doľava. Aby Maťo rovno nespadol, váhu (ťažisko) preniesol na svoju pravú nohu (viď Obr. 2).

Ďalej na Maťa pôsobí tiažová sila (v ťažisku, smerom kolmo nadol). Na chodidlá naňho pôsobí podlaha metra silami F_1 a F_2 (ich veľkosť nepoznáme, vieme iba, že pôsobia kolmo na podlahu metra, tzn. kolmo nahor).

Úplne nakoniec na Maťa pôsobia trecie sily T_1 a T_2. Keďže sila F_z chce Maťa „ťahať" doľava, trecie sily sa budú snažiť tomuto pohybu brániť a pôsobiť smerom doprava (viď Obr. 2). Veľkosť trecích síl je z definície $T_1 = fF_1$ a $T_2 = fF_2$, kde f je trecí koeficient.



Obr. 2: Sily pôsobiace na Maťa

Situácia na obrázku vyzerá optimisticky – všetky zakreslené sily pôsobia buď vo vodorovnom alebo v zvislom smere. Okamžite preto môžeme napísať rovnice pre rovnováhy síl v týchto smeroch:

$$F_1 + F_2 = mg$$

$$T_1 + T_2 = F_z.$$

Ak do rovníc dosadíme $F_z = ma$ a vyjadrenia pre trecie sily, z rovníc rýchlo dostávame podmienku

$$fmg = ma \qquad \Rightarrow \qquad a = fg.$$

To zamená, že ak bude zrýchlenie metra väčšie ako $0{,}5g \approx 5\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, Maťo, nech sa akokoľvek snaží nespadnúť, sa začne na podlahe metra šmýkať v protismere jeho jazdy.

Vyzerá to tak, že sme úlohu vyriešili. Bohužiaľ, stále Maťovi nevieme zaručiť bezpečnú cestu. Musíme sa ešte pozrieť na to, či náhodou Maťo pôsobením zotrvačnej sily nespadne skôr, ako príde k scenáru popísanému vyššie.

Pozrime sa preto ešte na momenty síl, ktoré sú úzko spojené s otáčaním telies. Aby Maťo nepadal (= neotáčal sa), musia byť v rovnováhe aj momenty síl, a to okolo *ľubovoľnej* osi. To nám poskytuje obrovskú výhodu – os otáčania si môžeme zvoliť tak, aby rovnica rovnováhy momentov síl bola čo najjednoduchšia, tzn. obsahovala čo najmenej neznámych síl. V našom prípade sú neznáme sily F_1 a F_2 (a sily T_1 a T_2). „Zbavíme sa" ich tak, že os otáčania zvolíme do takého bodu, že tieto sily, resp. ich väčščina bude mať nulový moment.

Ideálni kandidáti na tieto body sú Maťove chodidlá. Pozrite sa na obrázok 2. Ak zvolíme os otáčania v Maťovej pravej nohe, len dve sily majú nenulový moment (sily F_2 a F_z). Platí teda

$$F_2x = F_zy.$$

Ak si predstavíme os otáčania v ľavej Maťovej nohe, rovnakou úvahou dospejeme k rovnováhe momentov

$$F_1x + mgx = F_zy.$$

Ak rovnice sčítame, dostaneme (po úprave a dosadení z rovnováhy síl $F_1 + F_2 = mg$) rovnicu

$$a = \frac{y}{x}g.$$

Po dosadení za $y = (3/5) \cdot 185$ cm $= 111$ cm a $x = 40$ cm dostaneme $a \approx 0{,}36g = 3{,}6\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, čo je menej, ako predošlý výsledok.

Metro teda nemôže zrýchľovať viac, ako zrýchlením $3{,}6\ \mathrm{m\,s^{-2}}$. Po prekročení tejto hranice Maťo pôsobením príliš veľkého momentu zotrvačnej sily spadne skôr, ako sa jeho topánky začnú šmýkať po podlahe.

Všimnite si, že v celom riešení sme nepotrebovali vedieť, aké veľké sú sily F_1 a F_2. Tento poznatok sme obišli dôsledným zápisom rovnováhy síl a prefíkanou voľbou osí otáčania.

4. Ako špagety sajú (opravovala Zuzka)

Zuzka si v poslednom čase obľúbila špagety. Ako iste viete, keď namočíte špagety do vody, tak menia svoj objem. Zistite, koľko vody také špagety nasajú počas desiatich minút v rôzne teplej vode. Potom si vyberte jednu teplotu vody a pre tú odmerajte, ako závisí množstvo nasatej vody v špagetách od času.

Máme zmerať množstvo vody nasaté špagetami za nejaký čas pri nejakej teplote. To znie ako niečo, čo bude trochu náročné na aparatúru, preto si treba najprv dobre premyslieť, akým spôsobom to chceme merať a či na to máme doma všetky potrebné veci.

Pod množstvom zo zadania úlohy môžeme rozumieť hmotnosť, ako aj objem vody. Je na nás, aby sme sa zamysleli, čo z toho chceme merať, teda na čo máme doma použiteľnú aparatúru a vieme to zmerať jednoduchšie a presnejšie.

Rozumný odmerný valec s dostatočne malým najmenším dielikom na stupnici (aspoň 1 cm^3) asi nemá doma každý. Naproti tomu digitálna váha merajúca s presnosťou na jeden gram rozhodne nie je v domácnosti raritou, preto som osobne skôr za meranie hmotnosti než objemu.

Ďalej budeme určite potrebovať kuchynský teplomer. Čím presnejší, tým lepšie. A stopky. Alebo minútky.

Keďže jedna časť úlohy vyžaduje držať špagety desať minút vo vode s konštantnou teplotou, treba sa zamyslieť aj nad tým, ako tú teplotu udržať. Možností je hneď niekoľko. Môžeme si zimprovizovať kalorimeter, ktorému budeme dôverovať natoľko, aby sme v ňom tú vodu len tak nechali, alebo použiť termohrnček, ktorému dostatočne dôverujeme, alebo stáť desať minút pri sporáku s teplomerom strčeným v hrnci a podľa toho, ako sa teplota vody mení, ju prihrievať. Je to len na nás.

Myslieť musíme aj na to, že sacia schopnosť sa podľa druhu špagiet môže líšiť, preto je fajn uviesť, aké špagety sme použili.

Keď máme vyriešenú aparatúru, môžeme pristúpiť k samotnému meraniu. Prvá časť úlohy hovorí, že treba zistiť, koľko vody nasajú špagety počas desiatich minút v rôzne teplej vode. To neznie až tak zložito. Navážime si špagety, zohrejeme vodu, celé to zavrieme do aparatúry a odstopujeme si desať minút. Potom špagety precedíme a odvážime. Toto zopakujeme povedzme päťkrát pre päť rôznych teplôt a s prvou časťou sme hotoví (samozrejme, čím viac teplôt odmeriame, tým lepšie budeme vedieť odhadnúť hľadanú závislosť).

Druhá časť úlohy od nás chce, aby sme pre jednu teplotu zmerali závislosť množstva nasatej vody od času. Teda si zvolíme nejakú teplotu, ktorá sa nám podľa prvého merania zdá najvhodnejšia, a nejaký časový interval, po ktorom špagety zakaždým precedíme a odvážime.

Pri svojom meraní som použila termohrnček[2], historický teplomer s najmenším dielikom 2 °C, digitálnu váhu merajúcu s presnosťou na jeden gram a bezvaječné špagety Clever. Pri prvom experimente bola počiatočná hmotnosť špagiet 19 g, pri druhom 30 g. Tu sú výsledky môjho merania:

	T [°C]	Δm [g]
1.	60	7
2.	70	11
3.	80	14
4.	90	19
5.	100	19

Tabuľka 1: Prírastky hmotnosti špagiet po desiatich minútach v rôznych teplotách vody

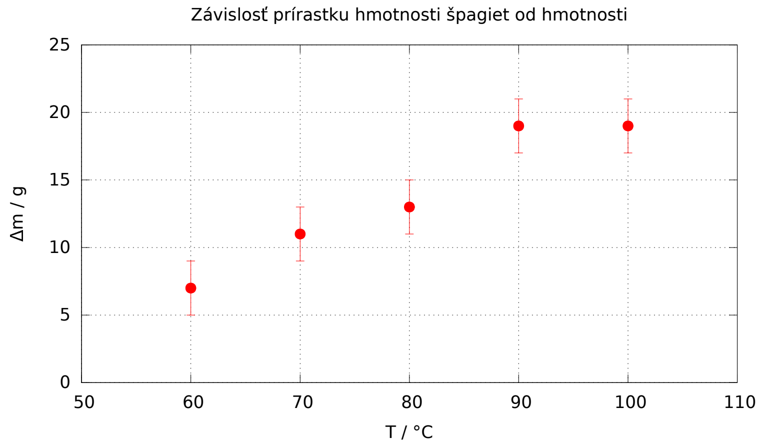
	t [s]	Δm [g]
1.	120	15
2.	240	18
3.	360	22
4.	480	26
5.	600	30
6.	720	33
7.	840	36
8.	960	38
9.	1080	41
10.	1200	44

Tabuľka 2: Prírastky hmotnosti špagiet v rôznom čase pri teplote $T = 80$ °C

Odmerané máme, môžeme pristúpiť k interpretácii údajov. Tu sa ujíma slova ľubovoľný tabuľkový editor. Mohli ste použiť *Excel*, *LibreOffice Calc*,... Na vykreslenie grafov sme sa však rozhodli použiť *Gnuplot*.

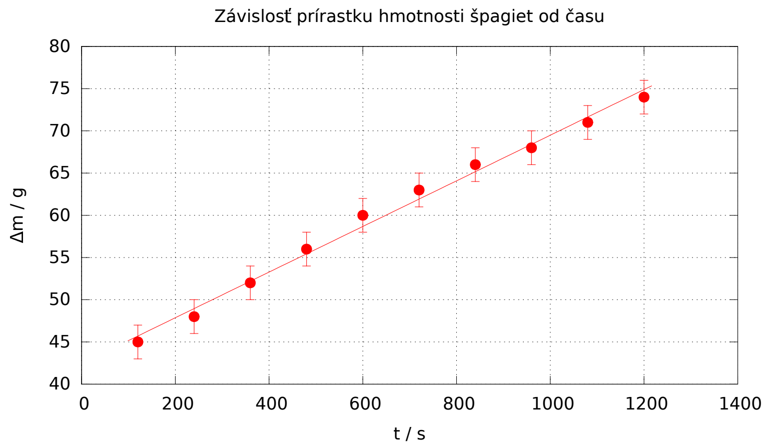
Grafický výstup merania závislosti prírastku hmotnosti špagiet od teploty (prvá časť úlohy) by mohol vyzerať nejako takto:

[2] Teplota v ňom, sa počas merania menila maximálne o pár stupňov Celzia, čo je rozhodne menej ako rozdiely medzi teplotami vody pri jednotlivých pokusoch



Obr. 3: Grafické spracovanie prvého merania (Áno, nemám graf graf plný bodov, lebo som si povedala, že na ukážku to bude stačiť. Verím, že vy máte lepšie.)

Druhé meranie nám poskytlo takýto výsledok:



Obr. 4: Grafické spracovanie druhého merania

Na záver nám zostáva zamyslieť sa, čo všetko nám mohlo spôsobiť nepresné meranie. V prvom rade to boli úniky tepla do okolia. V kuchynských podmienkach sa ťažko vyrába dokonale izolovaná sústava. Pri použití termohrnčeka (malej termosky), tieto straty obmedzíme, no ako bolo spomenuté, teplota sa počas merania môže zmeniť o niekoľko stupňov.[3] Okrem toho teplomer mal presnosť ± 1 °C, čo chyba rádovo na úrovni tých, čo spôsobili úniky tepla. Ďalšími meranými veličinami bol čas a hmotnosť špagiet. Nepresnosti stopiek a váhy sú dostačne malé na to, aby signifikantne prispievali k chybám merania. No je tu ešte jedna vec, na ktorú nemôžeme zabudnúť, a to je dostatočné scedenie špagiet. Ak to neurobíme poriadne, nejaká voda nám tam zostane. Pokojne aj gram, či dva. Zdá sa to málo, ale keď sa zamyslíme nad tým, aké hmotnosti meriame, tak už i ten gram navyše nám spôsobí nepresnosť $5-10\%$. Zvyšné zdroje, ako rozpúšťanie škrobu zo špagiet do vody, alebo odparovanie vody zo špagiet počas merania,

[3] Táto zmena bude určite menšia ako 10 °C, čo sú rozdiely medzi nami meranými teplotami.

nemá zmysel uvažovať, lebo ich efekt je rádovo menši, ako tých pred chvíľou spomenutých. až po nejakú tú hmotnosť navyše spôsobenú nedostatočným odkvapkaním scedených špagiet.

A máme hotovo, môžeme ísť jesť. Keby mal niekto záujem o recept na mega pseudobolonskú omáčku, ktorá je jednoduchá a určite nesklame, napíšte mi ;).

5. Poistka vs. Li-Ion články (opravoval Jaro)

Jaro sa hral s 300 A poistkou a čuduj sa svete, podarilo sa mu ju prepáliť :). K dispozícii mal ľubovoľne veľa Li-Ion článkov s elektromotorickým napätím 3,3 V a vnútorným odporom 10 mΩ, tie vieme spájať pomocou ľubovoľného počtu dokonalých vodičov s nulovým odporom do ľubovoľne veľkého zdroja. Na jeho konce pripojíme poistku s odporom 10 mΩ. Nájdite všetky také zapojenia, pozostávajúce z čo najmenšieho počtu článkov, ktoré prepália poistku.

Zrejme je každému jasné, že na vyriešenie úlohy je potrebné pochopenie činnosti elektrického zdroja.[4]

Elektrický zdroj je súčiastka, ktorá koná prácu proti elektrickému poľu, čím udržuje potenciálový rozdiel medzi svorkami, a tým umožňuje prúdu tiecť obvodom. Bežne sa na výpočty používajú dva abstraktné modely zdroja, a to ideálny zdroj napätia a ideálny zdroj prúdu. Oba sa vyznačujú tým, že v obvode udržujú konštantné napätie, resp. prúd, bez ohľadu na to, čo na svorky zdroja pripojíme. Ak by sme použili jeden z týchto modelov, veľa by sme sa nenapočítali. V prípade použitia ideálneho zdroja napätia by sme len do série zapojili dostatočne veľa zdrojov a obvodom by tiekol ľubovoľne veľký prúd, ľahko vypočítateľný z Ohmovho zákona. V prípade použitia ideálneho zdroja prúdu by sme to mali ešte jednoduchšie. Obvodom by tiekol taký prúd, na aký je stavaný zdroj. Lenže reálny zdroj sa správa inak. Už v samotnom zdroji dochádza k istým stratám, ktoré v tomto prípade nemožno zanedbať, ako sa to vo väčšine prípadov robí.

Problémom je, že nevieme, čo presne sa v takom zdroji deje a ako presne tie straty vyzerajú. Našťastie nás to ale nemusí ani zaujímať. Teória elektrických obvodov obsahuje dve veľmi užitočné vety, Theveninovu a Nortonovu teorému[5].

V jednoduchosti, Theveninova teoréma nám hovorí, že keď máme ľubovoľne zložitý lineárny obvod a zaujíma nás prúd tečúci len jednou jeho vetvou, tak zvyšok obvodu možno nahradiť ideálnym zdrojom napätia s napätím rovným napätiu medzi svorkami nahradenej časti, zapojeným s odporom do série, ktorého veľkosť je rovná odporu nahradenej časti. [6]

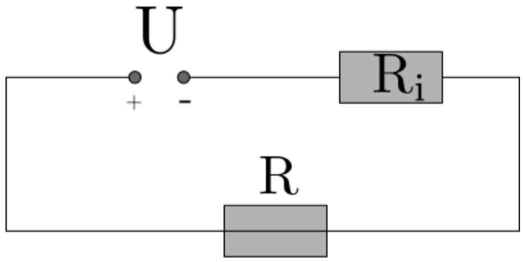
A to je presne náš prípad. Reálny zdroj možno považovať za zložitú časť obvodu, pričom nás zaujíma len prúd tečúci jedinou vetvou (cez poistku), preto reálny zdroj nahradíme podľa Theveninovej vety ideálnym zdrojom a k nemu do série zapojeným vnútorným odporom.[7] V celom príklade bude Li-Ion článok nahradený ideálnym zdrojom napätia $U = 3{,}3$ V a k nemu do série pripojeným odporom $R_i = 10$ mΩ. Najjednoduchší obvod s jedným článkom preto bude vyzerať takto:

[4] Alebo možno aj nie, ale sme tu preto, aby sme sa niečo naučili. :)

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9venin%27s_theorem, resp. https://en.wikipedia.org/wiki/Norton%27s_theorem

[6] Nortonova teoréma je jej analógiou, keď ľubovoľnú časť obvodu nahradíme ideálnym zdrojom prúdu s paralelne zapojeným vnútorným odporom. Obe vety sú si rovnocenné a dá sa medzi nimi jednoducho prechádzať.

[7] Použijeme Theveninovu vetu a nie Nortonovu, pretože v zadaní sa hovorí o zdroji s elektromotorickým napätím a nie o zdroji prúdu.



Obr. 5: Náhradné zapojenie s jedným článkom

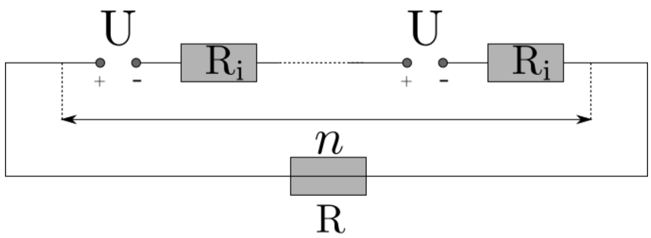
Prúd tečúci týmto obvodom bude jednoducho podľa Ohmovho zákona $I = (U/R_i + R) = = 165$ A. Vidíme, že jediný článok ani zďaleka nestačí na prepálenie poistky. Budeme preto musieť zapájať zložitejšie obvody.

Zrejme najistejší spôsob, ako analyzovať zložitejšie obvody, sú Kirchhoffove zákony. Všetky výpočty budú založené práve na nich, a tak by bolo na mieste si ich pripomenúť.

Prvý Kirchhoffov zákon hovorí, že súčet prúdov, ktoré do uzla vtekajú, sa rovná súčtu prúdov, ktoré z neho vytekajú. Podľa *druhého Kirchhoffovho zákona* zase algebraický súčet úbytkov napätí zdrojov v uzavretej slučke je rovný súčtu napätí na jednotlivých spotrebičoch danej slučky.

Priamym dôsledkom Kirchhoffových zákonov je skutočnosť, že ak nerozvetvenou časťou obvodu tečie prúd I a v nejakom mieste sa obvod vetví na k zhodných vetiev, tak každou z nich preteká rovnaký prúd I/k, čo budeme výhodne využívať na zníženie počtu rovníc. Viac o Kirchhoffových zákonoch tu písať nebudeme, nakoľko všetky návody, ako zostavovať rovnice, sa dajú ľahko nájsť na webe alebo v starých príkladoch FKS.

Teraz, keď vieme, ako na to, môžeme sa pustiť do analyzovania jednotlivých zapojení. Na začiatok preverme dve najbežnejšie zapojenia, sériové a paralelné.



Obr. 6: Obvod s n článkami zapojenými v sérii

Najskôr zapojme do série n článkov. Podľa druhého Kirchhoffovho zákona napíšeme rovnicu pre zapojenie $nU = (nR_i + R)\,I$, odkiaľ

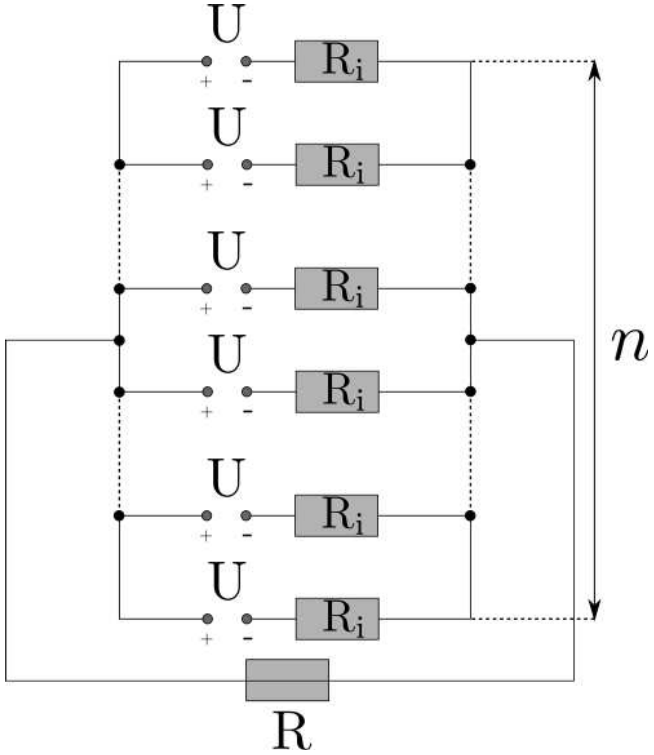
$$I = \frac{nU}{nR_i + R} = \left.\frac{U}{R_i + \frac{R}{n}}\right|_{n\to\infty} = \frac{U}{R_i}.$$

Tento zápis znamená, že ak n budeme zvyšovať nad všetky medze, tak prúd sa bude tým viac k danej hodnote približovať. To preto, lebo ak R je nejaké reálne číslo a n rastie až do nekonečna, tak podiel R/n je prakticky rovný nule (presnejšie povedané – blíži sa k nule).

Pre číselné hodnoty $\lim_{n\to\infty} I(n) = 330$ A[8]. Vidíme, že maximálny prúd, ktorý možno dosiahnuť sériovým zapojením článkov, naozaj prepáli poistku. Zistime, kedy sa tak stane. Označme I_{max} prúd, pri ktorom sa poistka prepáli. Zrejme musí platiť nerovnosť $I_{max} \le I(n)$, kde $I(n) = nU/(nR_i + R)$. Odtiaľ dostávame, že

$$n \ge \frac{I_{max}R}{U - I_{max}R_i} = 10.$$

Na záver ešte poznamenajme, že pri dostatočne veľkom počte článkov zapojených do série je prúd v obvode určený predovšetkým vnútorným odporom článkov, keďže v zadaní stojí, že vonkajší odpor obvodu je rovnaký ako vnútorný odpor jedného článku. Zdroj s takouto vlastnosťou sa nazýva mäkký.



Obr. 7: Obvod s n článkami zapojenými paralelne

Pozrime sa teraz na paralelné zapojenie n článkov. Podľa 2.KZ s využitím poznámky o identických vetvách dostávame rovnicu $U = R_iI/n + RI$, odkiaľ

$$I = \left.\frac{U}{\frac{R_i}{n} + R}\right|_{n\to\infty} = \frac{U}{R}.$$

Prúd v obvode je tentokrát pre dostatočne veľké n určený predovšetkým vonkajším odporom zapojenia. Takýto zdroj sa nazýva tvrdý. Pre konkrétne číselné hodnoty zo zadania $\lim_{n\to\infty} I(n) =$

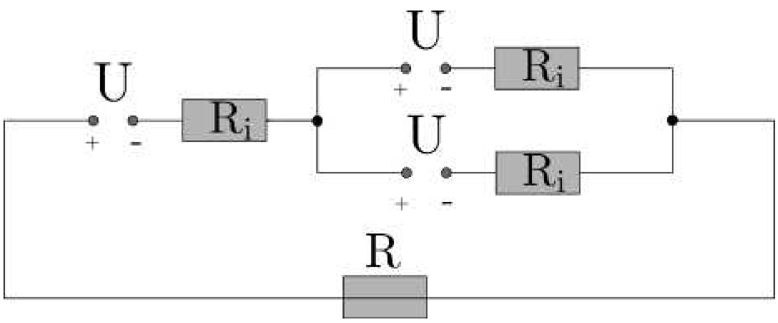
[8] lim je limita a vyjadruje presne to, čo sme popísali; ak n ide do nekonečna, tak udáva, k čomu sa blíži I

$= 330$ A. Aj v tomto prípade dokážeme prepáliť poistku. Stane sa tak, ak počet zapojených zdrojov spĺňa nerovnosť $I_{max} \leq I(n)$, kde $I(n) = nU/(R_i + nR)$. Odtiaľ dostaneme, že

$$n \geq \frac{I_{max}R_i}{U - I_{max}R} = 10.$$

Sériové i paralelné zapojenie nám dáva rovnaké číselné výsledky. V oboch prípadoch sa poistka prepáli pri aspoň 10 článkoch. Rovnaký výsledok pre oba zapojenia však nie je pravidlo. Vďačíme za to tomu, že vnútorný odpor článku a odpor záťaže sú rovnaké. Ak by tomu tak nebolo, tak by sme dostávali rôzne výsledky.

Snáď ešte jedna poznámka. Paralelné zapojenie má tú nevýhodu, že ak je náhodou niektorý zo zdrojov „slabší", tak touto vetvou začne tiecť elektrický prúd proti smeru polarity slabšieho zdroja, čím sa výrazne znižuje efektivita takéhoto zapojenia, nehovoriac o tom, že by mohlo dôjsť k poškodeniu zdroja.

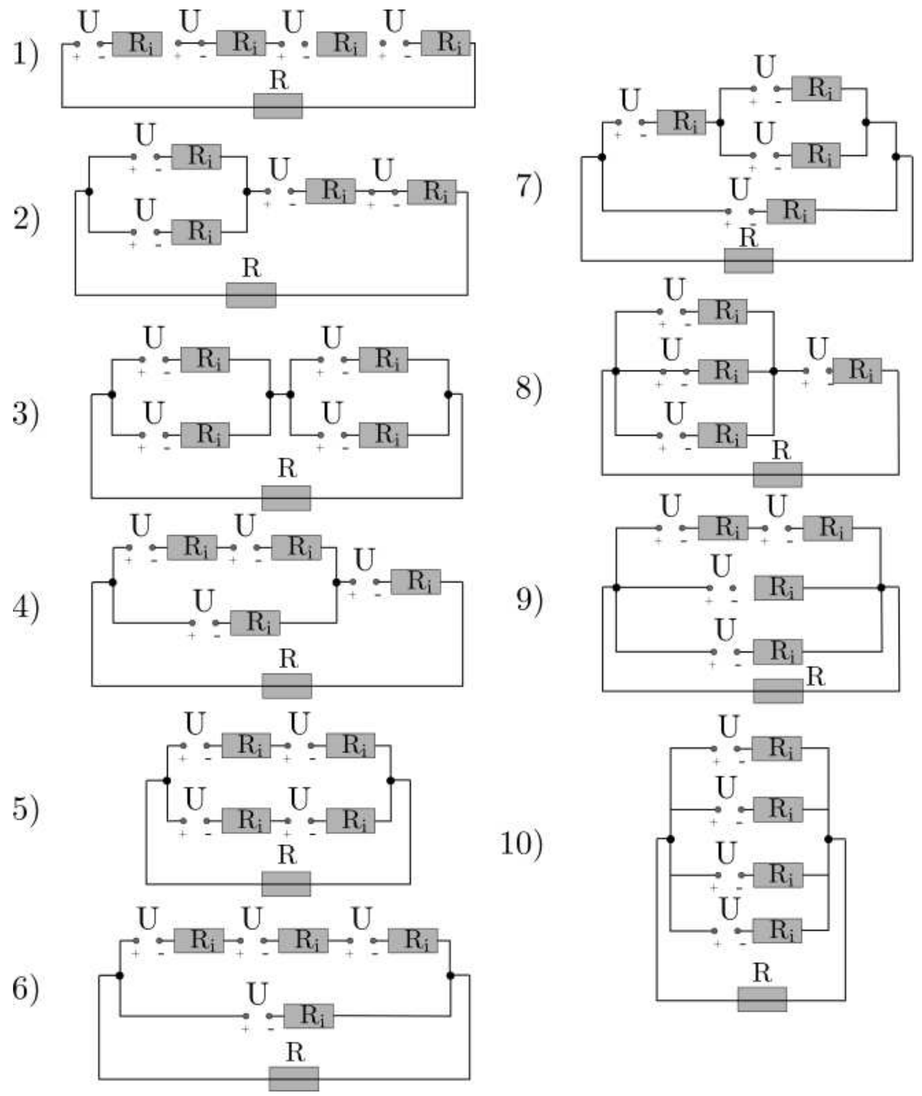


Obr. 8: Najjednoduchšie „hybridné" zapojenie pozostávajúce z 3 zdrojov

Už sme zistili, kedy sa poistka prepáli pri sériovom a paralelnom zapojení. Zostáva už len zistiť, či neexistuje nejaké hybridné zapojenie, ktoré bude fungovať aj pre menší počet zdrojov. Napovedať by nám mohlo najjednoduchšie takéto zapojenie pozostávajúce z troch zdrojov (viď Obr. 8). Podľa druhého Kirchhoffovho zákona dostávame rovnicu $2U = (R_i + R)I + R_iI/2$, odkiaľ $I = 4U/(3R_i + 2R) = 264$ A. Pre porovnanie, sériovým a paralelným zapojením troch článkov dostaneme prúd len 247,8 A. To je pre nás zlá správa, pretože sme ukázali, že hybridné zapojenie vážne dokáže vyprodukovať väčší prúd než obyčajné sériové alebo paralelné, a tak musíme skúšať ďalej.

Preskúmajme teraz všetky zapojenia štyroch článkov. Je ich až 10 a každé z nich treba preveriť.[9] Všetky sú zobrazené na nasledujúcom obrázku.

[9] Ak by sme prihliadali na polaritu zapojenia zdrojov, tak ich je ďaleko viac, no predpokladáme, že netreba nikoho presviedčať o tom, že zapojenie zdrojov s opačnou polaritou bude výrazne neefektívnejšie než s polaritou súhlasnou.



Obr. 9: Prehľad všetkých zapojení 4 zdrojov

Teraz už len zostáva dopočítať prúd v jednotlivých obvodoch. Naznačili sme, ako treba postupovať pri zostavovaní rovníc pomocou Kirchhoffových zákonov, a tak tu uvedieme už iba výsledky. Pre väčšiu prehľadnosť ich zapíšme do tabuľky.

Číslo obvodu	Algebraický výsledok	Numerický výsledok
1)	$I = \frac{4U}{4R_i+R}$	264 A
2)	$I = \frac{6U}{5R_i+2R}$	283 A
3)	$I = \frac{2U}{R_i+R}$	330 A
4)	$I = \frac{7U}{5R_i+3R}$	289 A
5)	$I = \frac{2U}{R_i+R}$	330 A
6)	$I = \frac{6U}{3R_i+4R}$	283 A
7)	$I = \frac{7U}{3R_i+5R}$	289 A
8)	$I = \frac{6U}{4R_i+3R}$	283 A
9)	$I = \frac{6U}{2R_i+5R}$	283 A
10)	$I = \frac{4U}{R_i+4R}$	264 A

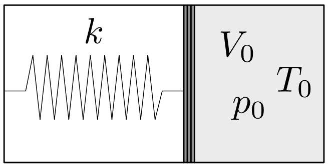
Tab. 1: Prúdy pretekajúce poistkou pre jednotlivé zapojenia štyroch zdrojov

Podarilo sa nám nájsť dve také zapojenia (3 a 5) pozostávajúce zo štyroch článkov, ktoré prepália poistku.[10] Zároveň sme ukázali, že žiadne zapojenie pozostávajúce z menšieho alebo nanajvýš rovnakého počtu článkov nedokáže poistku prepáliť. Tým je úloha vyriešená.

6. Tepelná kapacita (opravoval MaťoB)

Kubo si postavil ďalší super stroj. Ten obsahoval komoru s pohyblivým piestom, v ktorej sa nachádzal ideálny jednoatómový plyn s tlakom p_0, objemom V_0 a teplotou T_0 v ustálenom stave. Piest je pripojený na pružinu tuhosti k. Ak odstránime plyn zo stroja, tak sa piest dotýka pravej steny nádoby. Pokojová dĺžka pružiny je rovnaká ako dĺžka celej komory. Kuba by teraz zaujímalo, aká je tepelná kapacita takéhoto systému. Predpokladajte, že tepelná kapacita materiálu pružiny a stien nádoby je zanedbateľná.

[10] To, že zapojenia 3 a 5 dávajú rovnaké výsledky, nie je náhoda. Sú to ekvivalentné zapojenia. Vodič medzi vetveniami obvodu 3 nekladie žiaden odpor, t.j. oba uzly majú rovnaký potenciál, a teda ich možno stiahnuť do jedného. Navyše zapojenie je symetrické, teda cez uzol neprechádza medzi hornou a dolnou vetvou prúd, teda ho možno rozpojiť a dostaneme zapojenie 5.



Obr. 10: Skúmaný stroj

Najprv si pripomeňme, čo je to vlastne *tepelná kapacita*. Tá nám hovorí, koľko energie vo forme tepla musíme "zaplatiť" za to, aby sme ohriali systém o jednotku teploty (napríklad jeden stupeň Celzia).[11]

$$C \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Teplo sa môže uložiť do vnútornej energie plynu alebo použiť na vykonanie práce. V našom prípade môže plyn tlačiť na piest, čím vykoná stlačením pružinky piestu prácu. Dôležité ale je, aby sme si uvedomili, že práca, ktorú vykoná plyn tlačením na piest, je rovnaká ako nárast potenciálnej energie pružinky. Preto tento príspevok energie môžeme započítať iba raz![12] Teplo by sa mohlo ešte teoreticky použiť na ohriatie materiálu stien nádoby, piestu a pružinky, no v zadaní sme povedali, že ich tepelné kapacity sú zanedbateľné. Každopádne, energia sa musí zachovať, čo môžeme zhrnúť *zákonom zachovania energie*, v termodynamike taktiež nazývaným aj ako *prvá veta termodynamická*, ktorý môžeme následne dosadiť do definície tepelnej kapacity:

$$\Delta Q = \Delta U_{\text{plyn}} + \Delta W$$

$$C = \frac{\Delta U_{\text{plyn}}}{\Delta T} + \frac{\Delta W}{\Delta T}.$$

Zo zadania ďalej vieme, že piest (pružinka) sa nachádza v pokojovom stave, keď sa dotýka pravej steny nádoby. Ak si označíme plochu piestu S, objem plynu v pravej časti piestu V a dĺžku pravej časti s plynom x, čo je zároveň stlačenie pružinky, tak vieme, že sila, ktorou pôsobí plyn na piest $F_{\text{plyn}} = pS$, musí byť rovnaká ako sila, ktorou pôsobí pružinka na piest $F_{\text{pruž}} = kx$. Odtiaľ

$$F_{\text{pruž}} = F_{\text{plyn}}$$

$$kx = pS$$

$$kx^2 = pSx = pV.$$

Keďže vieme, že plyn je jednoatómový a môžeme ho považovať za ideálny, môžeme rovno pre vnútornú energiu plynu napísať známy vzťah $\Delta U = (3/2)nR\Delta T$.[13]

[11] Zdôrazňujeme však, že formálne nie je Δ pri Q to isté ako Δ pri T, keďže teplo nie je **stavová veličina**! A preto by sme ich mali po správnosti rozlišovať.

[12] Keďže táto energia je uložená v systéme "iba raz" v podobe potenciálnej energie pružinky.

[13] Konštnata tri súvisí s *počtom stupňov voľnosti* molekúl plynu. Jednoatómový plyn má iba tri, keďže každý atóm sa môže pohybovať v troch smeroch a pri ľubovoľnej rotácii okolo svojho stredu je nerozoznateľný. Na stupeň voľnosti sa môžete pozerať ako na počet parametrov, ktoré potrebujeme poznať na to, aby sme presne určili pozíciu a natočenie molekuly plynu. Skúste si teda premyslieť, koľko stupňov voľnosti majú dvojatómové molekuly.

Zostáva nám teda zistiť, akú nekonečne malú prácu ΔW vykoná plyn, keď sa zväčší teplota plynu o nekonečne malý prírastok ΔT. Práca ΔW je rovná $p\Delta V = pS\Delta x = kx\Delta x$. Vložením zatiaľ všetkého, čo sme zistili, do *prvej vety termodynamickej* dostaneme:

$$C = \frac{\Delta U_{\text{plyn}}}{\Delta T} + \frac{\Delta W}{\Delta T} \qquad\qquad C = \frac{3}{2}nR + kx\frac{\Delta x}{\Delta T}\,.$$

Mali by sme taktiež vedieť, ako súvisí Δx s ΔT. Na to si pomôžeme stavovou rovnicou ideálneho plynu. Označme n počet mólov plynu. Ďalej vieme, že v každom okamihu musí platiť rovnica ideálneho plynu, t.j. aj po ohriatí o ΔT.[14]

$$kx^2 = pV = nRT$$

$$k(x+\Delta x)^2 = nR\,(T + \Delta T)\,.$$

Odčítaním týchto dvoch rovníc a zanedbaním členu $k\Delta x^2$[15], šikovne zistíme ako súvisí Δx s ΔT.

$$k(x+\Delta x)^2 - kx^2 \approx 2kx\Delta x = nR\Delta T \qquad\qquad \frac{\Delta x}{\Delta T} = \frac{nR}{2kx}.$$

Pokročilejší z vás sa mohli vyhnúť tejto obskúrnosti vyjadrením ΔT a Δx, diferencovaním výrazu $kx^2 = nRT$, čím by sme ale dostali rovnaký výsledok.

Dosadením všetkého, čo sme sa dozvedeli, do definície tepelnej kapacity dostaneme celkom milý výsledok:

$$C = \frac{3}{2}nR + \frac{1}{2}nR = 2nR = 2\frac{p_0V_0}{T_0},$$

kde sme nakoniec vyjadrili výraz nR na základe veličín zo zadania, keďže počet častíc plynu sa v pieste nemení.

Komentár k riešeniam Vyskytlo sa niekoľko riešení, pri ktorých autori s hrôzou zistili, že v tomto prípade zohrievanie plynu nie je žiaden zo štyroch základných dejov. To však nevadí, tepelná kapacita sa dá spočítať aj v takomto prípade! Ďalšie chyby v riešeniach väčšinou pramenili z neuvedomenia si, kedy je pružinka v pokoji a čo je to predĺženie pružinky v tomto príklade. Body boli väčšinou strhávané za nekonzistentnosť vašich úvah. Dobrá rada na záver teda je, prečítať si po sebe svoje riešenia a porozmýšlať, či tam náhodou nie sú tvrdenia, ktoré si navzájom odporujú.

7. Nezelené hviezdy (opravoval MaťoB)

Andrej sa veľmi rád pozerá na hviezdy, ale ešte radšej pri tom rozmýšľa nad dôležitými životnými otázkami. Väčšinou si na ne dokáže odpovedať sám. Minule však prišiel na niečo, čo mu už dlho nedá spať. Andreja by zaujímalo, prečo na oblohe nedokáže nájsť žiadnu hviezdu, ktorú by sme našimi očami videli ako zelenú. Pomôžte mu vyrovnať sa s týmto problémom. Svoje argumenty sa snažte čo najviac podložiť výpočtami. Dokázali by ste povedať, akú farbu majú hviezdy, ktoré by "mali mať zelenú farbu" (t.j najviac žiarenia vyžarujú na vlnových dĺžkach blízkych 530 nm) ?

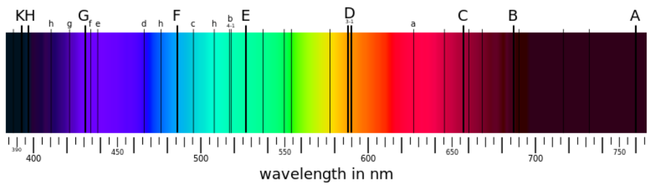
[14] Na systém sa pozeráme po ohriatí o ΔT vždy, keď sa ustáli v stave termodynamickej rovnováhy, pre ktorý stavová rovnica v prípade ideálneho plynu platí.

[15] Keďže vo fyzike nás často zaujíma ako sa veci majú do *prvého rádu*, tak si to môžeme dovoliť. Intuitívne si to môžete predstaviť, že ak je Δx malé, tak Δx^2 je o niekoľko rádov menšie a teda oproti Δx zanedbateľné.

Predtým, než si zodpovieme otázku zo zadania, si vyjasnime, čo je to vlastne *farba*.

Farba je čisto subjektívny pocit a interpretácia svetla istej vlnovej dĺžky našim okom a mozgom. Naše oči sa skladajú z troch druhov čapíkov, tzv. S, M a L čapíky, ktoré sú rozdielne citlivé na svetlá rôznych vlnových dĺžok. Pozor, tieto čapíky nie sú citlivé na svetlo iba jednej vlnovej dĺžky, ale reagujú na pomerne široký rozsah vlnových dĺžok. Pri veľmi letmom pohľade tieto čapíky korelujú s voľbou troch základných farieb, ktoré sa používajú na monitoroch a displejoch – RGB[16]. To, akú farbu vidíme, teda záleží od dvoch vecí: citlivosti nášho oka na svetlo rôznych vlnových dĺžok a samotného spektra svetla, ktoré dopadá do nášho oka, čiže toho, ako veľmi sú zastúpené rôzne vlnové dĺžky v dopadajúcom svetle.

Spektrum svetla, resp. žiarenia hviezd možno pre naše účely považovať za spektrum *absolútne čierneho telesa*. Hviezdy však žiaria iba v obmedzenom spektre, ktoré súvisí s ich zložením a zodpovedá preskokom elektrónov medzi rôznymi energetickými hladinami v atómoch a molekulách, ktoré hviezdy tvoria. Ďalej budeme tento fakt veselo ignorovať a budeme hviezdy považovať za absolútne čierne telesá. Áno, viem ako zvláštne to znie :). No na to ste si už asi vo fyzike zvykli. Pravdou je, že pre väčšinu hviezd je takáto aproximácia dostatočná. Aj keby sme prítomnosť spektrálnych čiar uvažovali, na výsledok by to nemalo veľký vplyv. Hviezda by totiž musela mať naozaj *veľmi exotické* zloženie, aby to bolo dôvod na to, že ju vidíme zelenú.



Obr. 11: Obrázok *Fraunhoferových čiar* – spektrálnych čiar v spektre Slnka. Obrázok je prepožičaný z `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2f/Fraunhofer_lines.svg`.

Žiarenie absolútne čierneho telesa sa riadi tzv. *Planckovým vyžarovacím zákonom*[17]. Ten nám hovorí, koľko elektromagnetického žiarenia vyžaruje absolútne čierne teleso pri určitej teplote.

$$I(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1},$$

kde I označuje vyžiarený výkon na jednotku plochy, priestorový uhol a vlnovú dĺžku λ, h je Planckova konštanta, k je Boltzmanova konštanta, c je rýchlosť svetla a T je teplota absolútne čierneho telesa.

Wienov posuvný zákon,

$$\lambda_{\max} = \frac{2{,}898\ \mathrm{mm\,K}}{T},$$

nám pre každú teplotu hovorí, na ktorej vlnovej dĺžke λ vyžaruje absolútne čierne teleso najviac žiarenia (teda pre aké λ je $I(\lambda)$ maximálne). Vieme z neho ľahko dopočítať, akú teplotu by musela mať hviezda, aby najviac žiarenia vyžarovala na vlnovej dĺžke $\lambda = 530$ nm, čo je

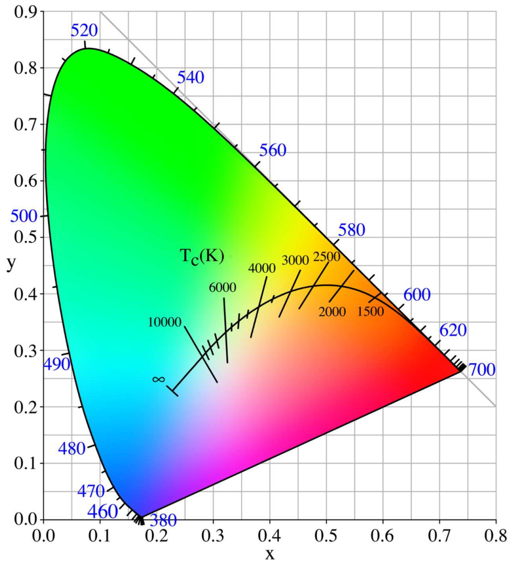
[16] Red, green, blue, teda červená, zelená a modrá.
[17] `https://en.wikipedia.org/wiki/Planck\%27s_law`

približne zelená. Ľahkým dosadením zistíme, že hviezda by musela mať teplotu $T \approx 5\,470$ K, čo vôbec nie je nezvyčajná teplota pre hviezdu!

Ako to, že teda nepozorujeme na oblohe zelené hviezdy? Hviezdy, ktoré vyžarujú najviac žiarenia v zelenej časti spektra, vyžarujú veľa žiarenia aj vo zvyšku viditeľnej časti spektra. Keďže viditeľné spektrum je naozaj pomerne úzke oproti celému vyžarovanému spektru hviezdy, „zelené“ (M) čapíky sú dráždené podobne, ako zvyšné dva druhy čapíkov. Farbu určuje to, ako veľmi podobne to je. Dokonca ak je teplota hviezdy vyššia ako 20 000 K, svetlo hviezdy vnímame ako modrasté bez ohľadu na to, aká je teplota hviezdy, keďže najviac sú dráždene práve „modré“ čapíky.

Toto je dôvod, prečo astronómovia nepozorujú zelené hviezdy.[18]

Už vieme, prečo nie sú hviezdy zelené, no musíme ešte zistiť, akú farbu majú vlastne hviezdy, ktoré by „mali byť zelené“. Môžeme použiť buď tento obrázok[19]



Obr. 12: Na obrázku môžeme vidieť krivku, na ktorej je znázornená teplota v Kelvinoch. A príslušné farby, ktoré zodpovedajú príslušnej teplote absolútne čierneho telesa.

alebo si to skúsime sami vypočítať. Na to, aby sme to vypočítali, však musíme vedieť, ako presne sú naše čapíky citlivé na svetlo rôznych vlnových dĺžok. Našťastie nemusíme dlho hladať, pretože ak sa trošku posnažíme, dopátrame sa k tzv. *CIE color matching functions*[20], čo sú štandardizované citlivosti čapíkov na rôzne vlnové dlžky. Samotné tabuľky x, y a z funkcií možno nájsť napríklad tu[21].

Stačí si teda otvoriť tabuľkový procesor, nakopírovať si tabuľky x, y a z funkcií (napr. po 0,1 nm), prenásobiť vo viditeľnom spektre spektrom absolútne čierneho telesa teploty $T \approx 5\,470$ K

[18] V skutočnosti sa im občas stane, že uvidia zelenú hviezdu, ale to iba v skupine červených hviezd. To je však spôsobené len únavou nášho oka, ktoré v prítomnosti veľa červených bodiek začne vidieť aj zelené.

[19] `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/ba/PlanckianLocus.png`

[20] `https://en.wikipedia.org/wiki/CIE_1931_color_space#Color_matching_functions`

[21] `http://cvrl.ioo.ucl.ac.uk/cmfs.htm`

a následne sčítať po malých kúskoch (napr. po 0,1 nm) (viď článok o *Color matching functions*).[22] Nakoniec už len nájsť spôsob ako čísla *color functions* X, Y a Z prepočítať na RGB farbu.

Iný spôsob bol priamo nájsť približné vzťahy[23] na výpočet X a Y súradníc v CEI farebnom spektre priamo z teploty a potom prepočítať na RGB farbu.

Či už zvolíme prvý alebo druhý spôsob, dopátrame sa k skoro čisto bielej farbe[24]. „Zelené hviezdy“ sú teda v skutočnosti biele. Pravdou je, že v tom obrovskom množstve hviezd sa môže nachádzať zopár hviezd s takým exotickým zložením,že vďaka absorbčnému a emisnému spektru prvkov, z ktorých sa bude skladať, sa nám bude zdať zelená, no žiadnu sme doteraz nenašli. Ak len predsa len narazíte na nejaký obrázok či fotku v hviezdy v zelenej farbe, napr. na stránke NASA, ide o počítačovo upravenú fotku s umelými farbami.

[22] Ak vám táto myšlienka ščitovanie po malých kúskoch nie je jasná, odporúčame si prečítať v Archive FKS vzorák k úlohe Vlnitá panoráma z 29. ročníka.

[23] `https://en.wikipedia.org/wiki/Planckian_locus#Approximation`

[24] [0.333,0.342] v CEI 1931 Color space