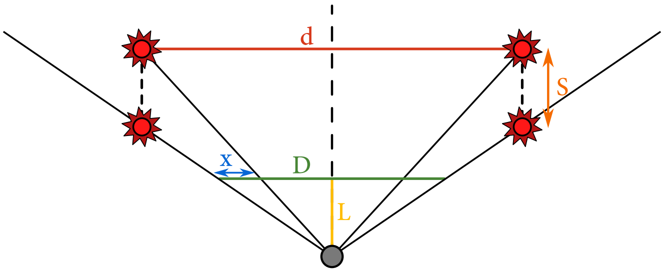
Riešenia 3. kola zimnej časti

3.1 Električka

vzorák **Katka**, opravoval **Kiko**

Adam vidí niečo takéto:



Obrázok 1: *Adam vidí*

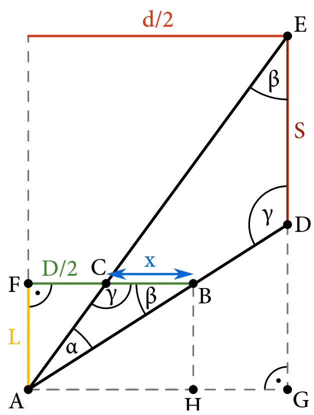
Na začiatok si na zjednodušenie rátania musíme uvedomiť jednu vec – keď o svetlách vieme, že sa k sebe navzájom približujú rýchlosťou u a že v očiach pozorovateľa (Adama) sa pohybujú rovnako rýchlo, je to to isté, akoby sa obe svetielka pohybovali v očiach pozorovateľa rýchlosťou $\frac{u}{2}$.

Na čo nám je to dobré? Teraz, keď túto "skutočnú" rýchlosť pohybu svetielka máme vyjadrenú, môžeme sa sústrediť na vyjadrenie rýchlosti v. Vieme, že čas, za ktorý prejdú zdanlivo svetielka dráhu x, musia skutočné svetielka na električke prejsť dráhu s. Čiže platí

$$t = \frac{s}{v} = \frac{x}{\frac{u}{2}},$$

$$v = \frac{u}{2}\frac{s}{x}.$$

Chceme si teda nejak elegantne vyjadriť neznáme s a x pomocou nám zadaných parametrov. Pre zjednodušenie vlastnej existencie si obrázok vyššie vieme orezať na polovicu podľa osi symetrie a po dopísaní všetkých známych údajov sa pozeráme na niečo takéto:



Obrázok 2: *Adam sa pozerá*

Na začiatok si zadefinujme nejaké pomocné y, ktoré nám vyjadruje skutočnú vzdialenosť električky od Adama. Vďaka podobnosti trojuholníkov (ďalej už len PT, tých podobných trojuholníkov je tu viac ako smogu v Číne) $\triangle AHB$ a $\triangle AGD$ vieme napísať

$$\frac{y}{\frac{d}{2}} = \frac{L}{\frac{D}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = L\frac{d}{D}.$$

Pozrime sa teraz na ďalšiu vhodnú dvojicu PT: $\triangle AFC$ a $\triangle EGA$. Potom znova musia platiť pomery

$$\frac{|CF|}{|AF|} = \frac{|AG|}{|EG|}.$$

Vyjadríme dĺžky strán:

$$\frac{\frac{D}{2} - x}{L} = \frac{\frac{d}{2}}{s + y}$$

Keby sme si do obrázka dokreslili nejaké pomocné uhly, pekne by bolo vidieť ďalšiu dvojicu PT, a to $\triangle ADE$ a $\triangle ACB$. Pomer príslušných strán musí byť zachovaný, preto možno písať

$$\frac{|ED|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AC|},$$

a teda

$$\frac{s}{x} = \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2}}{\sqrt{L^2 + \left(\frac{D}{2} - x\right)^2}}.$$

A zrazu tu máme nie veľmi oslnivú sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych. ktorú keď vyriešime, dostaneme

$$s = d\left(\frac{D}{4L} - \frac{L}{D}\right),$$

$$x = \frac{D}{2} - \frac{2L^2}{D}.$$

Po dosadení do prvej rovnice dostávame vzťah pre rýchlosť električky:

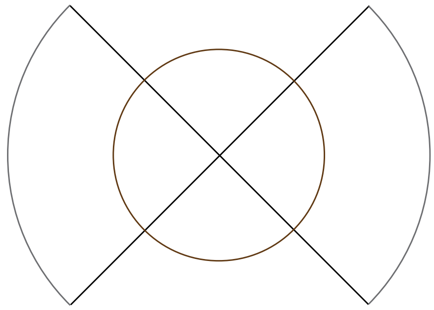
$$v = \frac{u}{2} \cdot \frac{d\left(\frac{D}{4L} - \frac{L}{D}\right)}{\frac{D}{2} - \frac{2L^2}{D}} = \frac{ud\left(\frac{D}{4L} - \frac{L}{D}\right)}{D - \frac{4L^2}{D}}.$$

3.2 Otočné dvere?

vzorák **Marek**, opravoval **Marek**

Na začiatok si uvedomíme čo znamená, že dvere sú mechanické. To sú také dvere, ktoré sa neotáčajú pomocou elektriny, ale otočia sa iba ak do nich zatlačíme. Mechanizmov na takéto otočné dvere je vskutku veľa, ale menej z nich bude takých, že sa vrátia do niektorej polohy.

Zamyslime sa teda, aký fyzikálny jav by mal ovplyvniť to, že sa niečo vráti do nejakej polohy. Keďže každý systém sa snaží o to aby mal čo najmenej energie tak by sme sa na to mohli pozrieť cez energie. Vhodným kandidátom je potenciálna energia. Totiž, každé teleso ak mu v tom neni bránené tak sa pokúsi dostať do stavu s menšou potenciálnou energiou. Teda naše dvere by mali mať najmenšiu potenciálnu energiu v jednom zo štyroch stavov a väčšiu inde. Ako niečo takéto docielime? Stačí aby dvere v hociakej polohe okolo vyžadovaných polôh mali možnosť sa voľne presunúť do polohy, ktorá je nižšie a teda aj s menšou potenciálnou energiou.



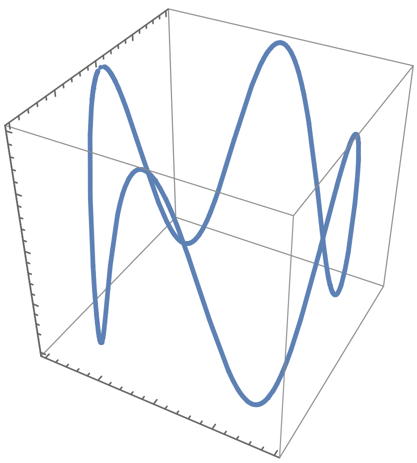
Konštrukcia: Zavesíme dvere na hnedú obruč tak aby sa vedeli otáčať, napríklad pomocou štyroch koliesok, nad každým krídlom jedno, na koľajnici. Ale obruč nebude len tak hociaká, ale bude mať nasledujúci tvar:

$$x = r \cdot cos(\varphi),$$

$$y = r \cdot sin(\varphi),$$

$$z = d \cdot cos(4\varphi).$$

Prvé dve rovnice nám zaručia kružnicu s polomerom r. Tretia nám zaručí, že deformujeme kružnicu tak aby mala naše žiadané vlastnosti. d zvolíme také aby mala vhodne mierny sklon aby sa dvere dali aj napriek tomu otáčať. Na obrázku 2 je však znázornené $r = 1$, $d = 1$.



Všimnime si, že miesta s najmenšou potenciálnou energiou sú v $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{N}$ a teda sa dvere vrátia do tejto polohy skoro vždy.

Na záver si treba všimnúť, že existujú miesta $\frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{N}$ také, že dvere tam zostanú a nevrátia sa do požadovanej polohy, ale keďže sa jedná o labilné stacionárne body, tak za bežných okolností ich do tohto stavu nedostaneme, tj. museli by sme sa naozaj snažiť aby tak zostali stáť. Preto tento špeciálny prípad môžeme mať na vedomí, ale prakticky to výsledok neovplyvní.

Mnohým z vás som dal do komentáru poznámku na zamyslenie, že ako by vyzerali dvere, ktoré majú takú vlastnosť, že sa nevrátia iba do jednej zo štyroch polôh, ale sa vrátia vždy do nasledujúcej. Také dvere vieme skonštruovať napríklad tak, že extrémy, tj. mista s najmenšou a najväčšou potenciálnou energiou, umiestnime blízko seba. To spôsobí, že ak dvere vychýlime v protismere tak sa vrátia ako zvyčajne, ale keď ich vychýlime v smere tak prekonajú extrém a začnú sa pohybovať do nasledujúceho minima. Samozrejme musíme uvažovať veľmi malé zmeny vo výškach, aby sme nespôsobili pasažierovi veľa námahy pri postrčení dverí.

3.3 Mary a jej väzby

vzorák **Mary**, opravovala **Mary**

Mary si povedala, že väzbová energia sa dá prirovnať práve teplu, ktoré musíme dodať, aby látky prešli z pevného skupenstva (kde je kryštalická mriežka) až po plynné skupenstvo (kde je štruktúra voľná). Prečo?

Dodávaním energie sa ióny v mriežke rozkmitávajú. Mriežka sa začne narúšať. Keď dosiahneme teplotu tesne nad teplotou topenia, tak táto mriežka už neexistuje. Ďalším dodávaním energie sa ióny (teraz už kvapalného skupenstva) rozkmitávajú viac a viac až dosiahnú teplotu varu. Pri ďalšom dodávaní energie sa väzby medzi nimi narúšajú[1], až dosiahneme plynné skupenstvo. A v plynnom skupenstve už častice na seba skoro nepôsobia, preto tento proces môžeme prirovnať rozbíjaniu chemickej väzby. V prípade H_2O ide o van-der-Waalsove väzby medzi molekulami, v prípade NaCl ide o iónovú väzbu. Pri rozbíjaní chemickej väzby treba dodať také množstvo energie, aby sme vzdialili dva atómy, prípadne ióny natoľko, že nebudú na seba silovo pôsobiť (jednoducho povedané).

Teda našej Mary treba spočítať všetky teplá, ktoré musí látka prijať aby zvýšila svoju teplotu a menila skupenstvá. Spomenula si na obrázok (viď dole), ktorý nakreslila jej učiteľka na základnej škole. Teda vie, že výsledná energia, ktorú musí dodať látke, bude rovná: teplo potrebné na ohriatie z 0 K na teplotu topenia + teplo potrebné na zmenu skupenstva z pevného na kvapalné + teplo na ohriatie látky z teploty topenia na teplotu varu + teplo potrebné na zmenu skupenstva z kvapalného na plynné.

Ako prvé spočíta teplá pre H_2O, konkrétne teplo potrebné na premenu 100 g vody z $0K$ na teplotu vyparovania. Keďže na výpočet tepla je potrebná hmotnosť vzorky, tak si hmotnosť zvolí a pre ľahkosť výpočtu bude uvažovať 100 g. Je jedno aké množstvo si zvolí. Aj tak to nakoniec prepočíta na energiu jednej molekuly.

Na zohriatie vody z $T_0 = 0$ K na teplotu topenia $T_t = 273{,}15$ K potrebujeme látke v "pevnom" skupenstve dodať teplo

$$Q_p = m \cdot c_p \cdot (T_t - T_0)\,,$$

kde m je hmotnosť našej vzorky a c_p je merná tepelná kapacita ľadu. Z tabuliek alebo internetu máme pre $c_p = 2{,}05$ JK/g. Dostávame $Q_p = 100\,\mathrm{g} \cdot 2{,}05\,\mathrm{J/(gK)} \cdot 273{,}15\,\mathrm{K} \doteq 56\,\mathrm{kJ}$.

Na skupenský prechod z ľadu na vodu, to je z pevného skupenstva na kvapalné, potrebujeme teplo na roztopenie celej vzorky, ktoré je $L_t = l_t m$. Z tabuliek máme pre $l_t = 332{,}4$ J/g. Dosadíme a máme

$$L_t = 332{,}4\,\mathrm{J/g} \cdot 100\,\mathrm{g} = 33{,}24\,\mathrm{kJ}.$$

[1] Áno aj v kvapaline existujú väzby medzi atómami, iónmi a molekulami. Neexistuje v nich však ďalekodosahové usporiadanie, a preto majú nestály tvar ale stály objem.

Na zvýšenie teploty z teploty topenia $t_t = 273{,}15$ K na teplotu varu $t_v = 373{,}15$ K potrebujeme teplo "kvapaliny" $Q_k = m \cdot c_k \cdot (t_v - t_t)$. Tu je c_k merná tepelná kapacita látky v kvapalnom skupenstve. Opäť vyhľadáme v tabuľkách mernú tepelnú kapacitu vody. Dostávame

$$Q_k = 100\ \mathrm{K} \cdot 4{,}18\ \mathrm{J/(gK)} \cdot 100\ \mathrm{J} = 41{,}8\ \mathrm{kJ}.$$

Ako posledné potrebujeme látku vypariť, prejsť z kvapalného skupenstva na plynné. Pre teplo potrebné na "vyparenie" platí $L_v = l_v \dot{m}$. Merné skupenské teplo vyparovania vody našla na internete, že je 40,7 kJ/mol (až neskôr našla skupenské teplo vyparovania aj v J/g, že je $l_v = 2259$ J/g). Vidí, že má dané merné skupenské teplo vyparovania v hmotnosti na mol. Mary síce nepozná zo školy vzorček (buď nemali alebo si nepamätá). Pozná však trik, že môže urobiť analýzu jednotiek. Navyše, stále má dostatok čokolády, aby rozmýšľala. Urobí takúto úvahu: buď potrebuje dostať hmotnosť do jednotiek g/mol alebo zadanú konštantu do jednotiek J/g aby jej sedeli jednotky. Rozhodne sa pre druhé, a preto vydelí nájdenú konštantu mólovou hmotnosťou vody a pre teplo dostáva

$$L_v = 100\ \mathrm{g} \cdot \frac{40{,}7\ \mathrm{kJ/mol}}{18{,}00\ \mathrm{g/mol}} \doteq 226{,}1\ \mathrm{kJ}.$$

Teraz všetky teplá sčíta a približne má

$$Q = Q_p + L_t + Q_k + l_v = 56\ \mathrm{kJ} + 33{,}24\ \mathrm{kJ} + 41{,}8\ \mathrm{kJ} + 226{,}1\ \mathrm{kJ} = 357{,}14\ \mathrm{kJ}.$$

Ešte to dostať do jednotiek elektrónvolty. Ako? Vieme, že $1\ \mathrm{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ J. Teda $357\,140\ \mathrm{J} = 2{,}232\,12 \times 10^{24}$ eV.

Mary nezabúda, že výsledok má byť v eV na jednu molekulu. V 100 g vody sa nachádza približne 5,5 mol vody, lebo molárna hmotnosť je $M_v = 18$ g/mol (hmotnosť vzorky predelíme molárnou hmotnosťou, ktorá určuje, akú má hmotnosť jeden mol látky a tak dostaneme množstvo látky v móloch). Prenásobením Avogadrovou konštantou dostaneme počet častíc v 5,5 móloch, čo je $3{,}3121 \times 10^{24}$ molekúl vody. Už jej len ostáva vydeliť výslednú energiu v eV počtom častíc. Teda

$$\frac{2{,}232\,12 \times 10^{24}}{3{,}3121 \times 10^{24}} \mathrm{eV} = 0{,}674\ \mathrm{eV}.$$

Teda, väzbová energia na jednu molekulu H_2O je približne 0,674 eV

A teraz rovnaké výpočty urobí pre soľ. Konštaty opäť vyhladá v tabuľkách. Tiež bude uvažovať 100 g vzorky. Teplota topenia NaCl je 1075 K. Na zvýšenie teploty tuhého NaCl na teplotu topenia potrebujeme teplo

$$Q_p = 100\ \mathrm{g} \cdot 0{,}99\ \mathrm{J/(gK)} \cdot 1075\ \mathrm{K} \doteq 107{,}5\ \mathrm{kJ}.$$

Na zmenu skupenstva z pevného na kvapalné potrebujeme teplo 48,2 kJ. Teplota vyparovania NaCl je 1686 Kelvin. Preto na zvýšenie teploty na teplotu vyparovania potrebujeme

$$Q_k = 100\ \mathrm{g} \cdot 1{,}22\ \mathrm{J/(gK)} \cdot (1686\ \mathrm{K} - 1075\ \mathrm{K}) \doteq 74{,}542\ \mathrm{kJ}.$$

Na zmenu skupenstva z kvapalného na plynné potrebujeme teplo $L_v = 100 \cdot \frac{272600}{58.4} = 466{,}78$ kJ. Pre celkové teplo dostávame

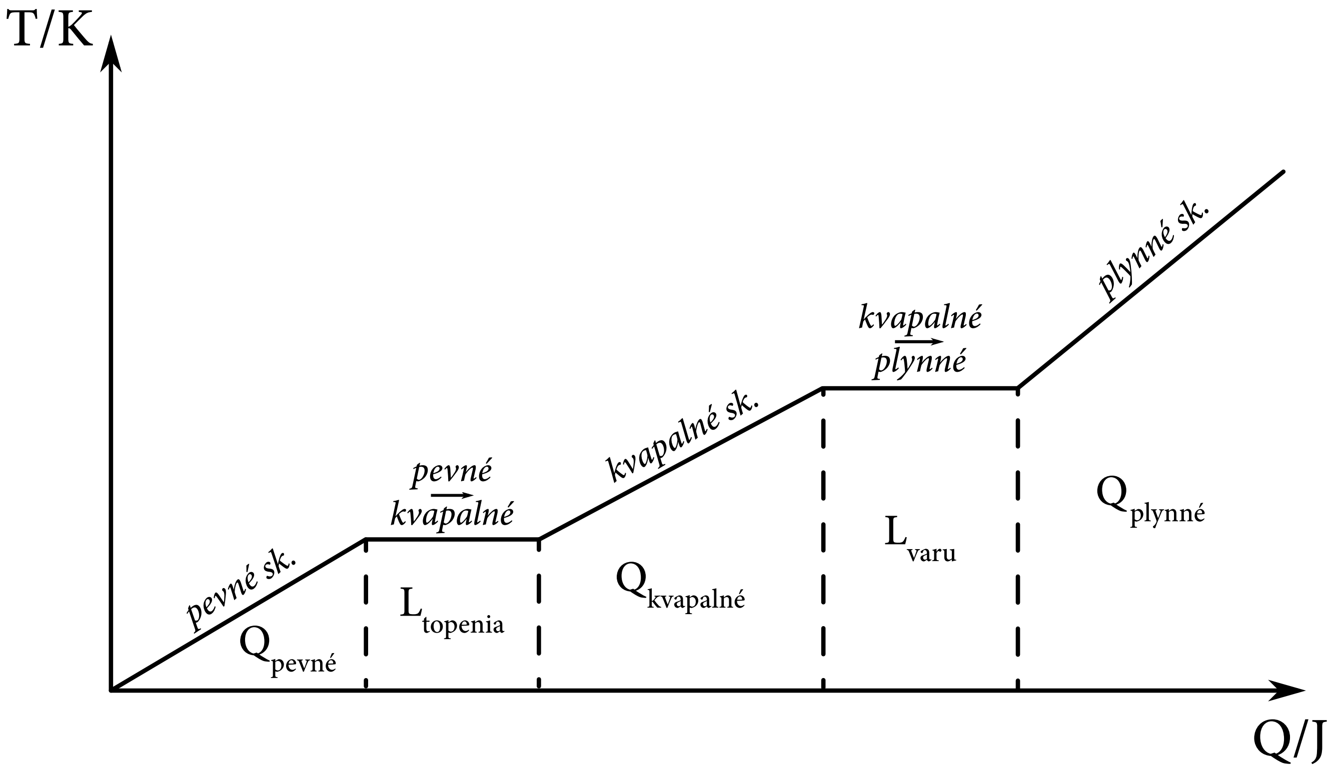
$$Q = 107{,}5\ \mathrm{kJ} + 48{,}2\ \mathrm{kJ} + 74{,}542\ \mathrm{kJ} + 466{,}78\ \mathrm{kJ} = 697{,}022\ \mathrm{kJ} = 4{,}356\ \mathrm{eV}.$$

Molárna hmotnosť NaCl je 58,44 g/mol. V 100 g NaCl je približne 1,71 mol, a to je približne $10{,}3 \times 10^{23}$ častíc. Teda pre energiu na jednu molekulu dostávame

$$\frac{4{,}356}{1{,}03 \times 10^{24}} \mathrm{eV},$$

čo je približne 4,23 eV na jednu molekulu.

Na záver teda máme, že väzbová energia H_2O na jednu molekulu je 0,674 eV. Väzbová energia NaCl na jednu molekulu je približne 4,356 eV.



Obrázok 3: *Závislosť množstva tepla, ktoré treba dodať pre dané fázové prechody*

3.4 Ako by hrach o hrach, a ten o stenu hádzal

vzorák **Adam**, opravoval **Adam**

Ako je v zadaní povedané, body sa budú pružne zrážať. To znamená, že okrem hybnosti sa každou zrážkou nezmení ani ich energia. Označme u_n rýchlosť hmotného bodu s hmotnosťou M po n-tej zrážke, pričom $u_0 = u$. Analogicky definujeme aj v_n, pričom $v_0 = 0$. Zákon zachovania mechanickej energie môžeme zapísať ako

$$\frac{1}{2}Mu_n^2 + \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}Mu_{n+1}^2 + \frac{1}{2}mv_{n+1}^2$$

Aby sme užitočne sformulovali zákon zachovania hybnosti počas zrážky, musíme si ujasniť niektoré smery rýchlostí (znamienka pri jednotlivých členoch). Pred $n+1$-ou zrážkou sa k stene rýchlosťou u_n blíži ťažší z hmotných bodov, pričom naproti mu ide ľahší rýchlosťou v_n, ktorou sa po n-tej zrážke a pred odrazom od steny hýbal smerom k stene [2]. Teda

$$Mu_n - mv_n = Mu_{n+1} + mv_{n+1}$$

[2] Za spomenutie stojí, že aj keď sa hybnosť zachováva medzi počas zrážky, nezachováva sa celkovo, a to kvôli odrazom ľahšieho bodu od steny.

Skúsenosť hovorí, že je užitočné poriadne si oba vzťahy upraviť[3] na tvar

$$M(u_n - u_{n+1})(u_n + u_{n+1}) = m(v_{n+1} + v_n)(v_{n+1} - v_n)$$

$$M(u_n - u_{n+1}) = m(v_n + v_{n+1})$$

Táto sústava rovníc má dve riešenia. Jedno z nich je ale triviálny proces "nič sa nestane"[4]. Ak s ním nerátame, je ekvivalentnou úpravou predeliť prvú rovnicu druhou.

Dostaneme sústavu už len lineárnych rovníc

$$u_n + u_{n+1} = v_{n+1} - v_n$$

$$M(u_n - u_{n+1}) = m(v_n + v_{n+1})$$

Tá sa dá ľahko vyriešiť štandardnými metódami. Výsledkom sú nasledujúce vzťahy:

$$u_{n+1} = \frac{M-m}{M+m}u_n - \frac{2m}{M+m}v_n$$

$$v_{n+1} = \frac{M-m}{M+m}v_n + \frac{2M}{M+m}u_n$$

Pre potreby ďalšieho počítania je vhodné predeliť obe rovnice u (t.j. vyjadrovať ďalej rýchlosti v jednotkách u), a dosadiť za M hodnotu zo zadania. Vzťahy nadobudnú podobu:

$$\frac{u_{n+1}}{u} = \frac{999}{1001}\frac{u_n}{u} - \frac{2}{1001}\frac{v_n}{u}$$

$$\frac{v_{n+1}}{u} = \frac{999}{1001}\frac{v_n}{u} + \frac{2000}{1001}\frac{u_n}{u}$$

Pričom počiatočné podmienky sú po novom $\frac{u_0}{u} = 1$ a $\frac{v_0}{u} = 0$.

Ešte treba podoknúť, že nás zaujíma také n, že u_n bude záporné (vtedy sa ťažší hmotný bod začne od steny vzdaľovať). Už sme plne vyzbrojený zapnúť tabuľkový kalkulátor a v priebehu pár minúť zodpovedať prvú otázku zo zadania. Na zodpovedanie druhej nám však treba sledovať aj nejakú polohu zrážok. Označme teda L_n vzdialenosť bodov od steny počas $n+1$-ej zrážky[5]. Označme pracovne čas od $n-1$-ej do n-tej zrážky t_n. Ak sa zamyslíme nad tým, ako sa budú hýbať body medzi zrážkami, mali by sme pomerne rýchlo dospieť k týmto vzťahom[6]:

$$L_n = L_{n-1} - u_n t_n$$

$$v_n t_n = L_n + L_{n-1}$$

Z nich vieme vyjadriť:

$$L_n = \frac{v_n - u_n}{v_n + u_n} L_{n-1}$$

[3] Použijúc $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

[4] Triviálne totiž spĺňa ako ZZH, tak aj ZZE.

[5] Zdá sa to síce neprirodzené, ale umožňuje nám to mať $L_0 = L$. Je to teda vzdialenosť, v ktorej sa zrazia body keď majú rýchlosti u_n, v_n

[6] Ak sa vám nepozdávajú, skúste naformulovať ich tvrdenia slovne. Vie to veci ujasniť.

Pre potreby numerického riešenia je zase potrebným prerobenie do bezrozmerných veličín ($\frac{L_0}{L} = 1$):

$$\frac{L_n}{L} = \frac{\frac{v_n}{u} - \frac{u_n}{u}}{\frac{v_n}{u} + \frac{u_n}{u}} \frac{L_{n-1}}{L}$$

Už stačí len pošrotiť uvedené vzťahy v tabuľkovom kalkulátore[7] (i keď presnosť výpočtov bola väčšia, uvádzame hodnoty s presnosťou len na 3 desatinné miesta).

n	$u_n[u]$	$v_n[u]$	$L_n[L]$
0	1	0	1
1	0,998	1,998	0,334
2	0,992	3,988	0,201
3	0,982	5,962	0,144
4	0,968	7,912	0,113
5	0,950	9,831	0,093
6	0,929	11,710	0,079
7	0,904	13,543	0,069
8	0,875	15,321	0,062
9	0,842	17,039	0,056
10	0,807	18,688	0,051
11	0,768	20,262	0,048
12	0,726	21,756	0,044
13	0,681	23,162	0,042
14	0,633	24,476	0,040
15	0,583	25,692	0,038
16	0,531	26,806	0,037
17	0,476	27,812	0,035
18	0,419	28,708	0,034
19	0,361	29,488	0,034
20	0,302	30,151	0,033
21	0,241	30,693	0,032
22	0,179	31,113	0,032
23	0,116	31,408	0,032
24	0,053	31,578	0,032
25	−0,010	31,621	0,032

Vidíme, že pre hodnoty zo zadania sú odpovede na otázky zo zadania 25 a približne $0.032L$.

3.5 Súmrak Krtov

vzorák **Jaro**, opravovala **Denda**

Zase raz astrofyzika! Tí sa museli zblázniť! Po prečítaní zadania sa mohol kde-kto vydesiť. My si však ukážeme, že nemusíte byť víťazmi Medzinárodnej Astronomickej olympiády, aby ste túto úlohu zvládli. Urobte si horúcu čokoládu, pohodlne sa usaďte a kochajte sa, ako astrofyzikálnu úlohu rieši neastrofyzik.

[7] Na motiváciu do budúcna upriamime pozornosť na krásnu kosínusovú, respektíve sínusovú závislosť u_n, respektíve v_n

Zadanie nám hovorí, že Krtkov vesmír je akýsi prázdny. Okrem neho a hviezd sa tam nenachádza nič, čo by mu bránilo vo výhľade. Ak sa teda chce vyhnúť svetlu niektorej z hviezd, musí sa od nej nevyhnutne vzdialiť. Ako prvú vec si vysvetlime, prečo to funguje.

Hviezdy sú zdrojom elektromagnetického vlnenia.[8] Za jednotku času vyžiaria v jeho podobe isté množstvo energie, teda každá hviezda má nejaký výkon P. Táto energia sa šíri rovnomerne všetkými smermi do priestoru. To znamená, že na jednotkovú plochu vo vzdialenosti r dopadá výkon $\frac{P}{4\pi r^2}$. Vidíme teda, že množstvo dopadajúcej energie klesá so vzdialenosťou ako $\frac{1}{r^2}$. No a to, ako jasná sa nám hviezda javí, súvisí práve s tým, koľko energie nám dopadá do oka.[9]

Zadefinujme veličinu, ktorá bude popisovať práve hustotu výkonu elektromagnetickej vlny a nazvime ju intenzita I.[10] Intenzita vo vzdialenosti r od hviezdy bude $I(r) = \frac{A}{r^2}$, kde A je nejaká konštanta špecifická pre každú hviezdu, ktorá súvisí s výkonom hviezdy.

Vidíme, že dve hviezdy s rôznym výkonom môžu byť rovnako jasné – stačí, ak sa "výkonnejšia" hviezda[11] nachádza vo väčšej vzdialenosti. Uvedomme si však jednu vec – ak dve rôzne hviezdy sú rovnako jasné, teda v danom mieste majú rovnakú intenzitu, tak intenzita slabšej hviezdy[12] klesá rýchlejšie. Ak by sme to chceli matematicky dokázať, potrebovali by sme vedieť derivovať.[13] Dá sa na to ale prísť aj na základe skúsenosti. Predstavte si, že v noci stojíte pod pouličnou lampou a nad horizontom svieti mesiac. Stojíte práve na takom mieste, kde je intenzita od oboch zdrojov rovnaká. Stačí sa však vzdialiť od lampy pár desiatok metrov a jej intenzita bude o poznanie nižšia než intenzita mesiaca.

To nám dáva jedno dôležité ponaučenie – nestačí, aby sa Krtko pohol smerom k najjasnejšej hviezde. Pokojne sa môže stať, že najjasnejšou hviezdou na nočnej oblohe je obrovská hviezda kdesi ďaleko, a pritom niekde blízko sa nachádza slabučká hviezda, ku ktorej keď Krtko príde dostatočne blízko, stane sa najjasnejšou hviezdou, podobne ako lampa v príklade s mesiacom.

Niekde však začať treba. Zoberieme teda najjasnejšiu hviezdu na nočnej oblohe – tou je Sírius – a nájdeme vzdialenosť r_{min}, ktorú by musel Krtko prejsť, aby bol Sírius jasnejší než Slnko. Rozhodne vieme povedať, že každá hviezda, ktorá je ku Krtkovi bližšie než r_{min}, sa stane najjasnejším objektom, ak k nej príde dostatočne blízko. To znamená, že ak má byť Sírius správnou voľbou, nemôže existovať žiadna iná hviezda v okruhu r_{min} od Krtka. To je však len nutnou, nie postačujúcou podmienkou.

Ďalej je očividné, že neexistuje žiadna vzdialenejšia hviezda než Sírius, ku ktorej keby sa Krtko vybral, stačilo by mu uraziť menšiu vzdialenosť, než musí prejsť, keď sa vyberie k Síriovi. Dokážeme si to sporom.

Najskôr predpokladajme, že taká hviezda existuje a je slabšia než Sírius. To znamená, že jej intenzita klesá rýchlejšie než Síriova. Ak má Krtkovi stačiť prejsť menšiu vzdialenosť, než keď sa vyberie k Síriovi, musí byť intenzita tejto hviezdy vo vzdialenosti r_{min} aspoň rovnaká ako intenzita Síria v tejto vzdialenosti. Lenže intenzita neznámej hviezdy rastie rýchlejšie než intenzita Síria, keďže je menšia. Navyše je aj ďalej. To znamená, že ak sa Krtko priblíži na rovnakú štandardizovanú jednotkovú vzdialenosť raz k jednej a potom

[8] Áno, svetlo je elektromagnetická vlna.

[9] V skutočnosti to závisí ešte od spektra hviezdy a citlivosti oka na jednotlivé vlnové dĺžky. Hviezda môže svietiť koľko chce – keď to bude v infračervenej oblasti, my ju neuvidíme. Toto zohľadňujú fotometrické veličiny.

[10] Fotometrickou analógiou k intenzite je osvetlenie. Pre naše potreby je však úplne jedno, či budeme používať intenzitu alebo osvetlenie. Pre nás je dôležité len to, že obe klesajú so vzdialenosťou ako $\frac{1}{r^2}$, a teda pre obe platia rovnaké vzťahy. Nech si teda za I každý dosadí, čo mu je milšie.

[11] hviezda s väčším A

[12] hviezda s menším A

[13] Majme dve hviezdy s intenzitami $I_1 = \frac{A_1}{r_1^2}$, $I_2 = \frac{A_2}{r_2^2}$, kde r_1, r_2 sú lokálne súradnice merané od hviezdy. Nech v nejakom bode platí $I_1(r_1) = I_2(r_2) \overset{\text{ozn.}}{=} I$, teda $\frac{A_1}{r_1^2} = \frac{A_2}{r_2^2}$. Rýchlosť rastu funkcie vyjadruje jej derivácia $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}r} = -2\frac{A}{r^3} = \frac{-2}{r}I$. V našom prípade $\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}r_1} = \frac{-2}{r_1}I$ a $\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}r_2} = \frac{-2}{r_2}I$. Ak $A_1 > A_2$, potom $r_1 > r_2$ a tým pádom $\left|\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}r_1}\right| < \left|\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}r_2}\right|$, čo znamená, že intenzita "výkonnejšej" hviezdy klesá pomalšie.

k druhej hviezde, tak intenzita neznámej hviezdy bude vyššia, čo je v spore s predpokladom, že neznáma hviezda je slabšia.

Teraz predpokladajme, že neznáma hviezda je silnejšia. Opäť platí, že aby bola táto hviezda lepšou voľbou než Sírius, musí byť jej intenzita vo vzdialenosti $r_{\min}$ od Krtka aspoň rovnaká ako Síriova v tejto vzdialenosti. Lenže intenzita "výkonnejšej" hviezdy klesá pomalšie, preto v Krtkovom počiatočnom mieste bude jej intenzita vyššia než intenzita Síria, čo je tentokrát v rozpore s tým, že Sírius je najjasnejšia hviezda na nočnej oblohe.

Ešte potrebujeme preveriť hviezdy, ktorých vzdialenosť od Krtka je $r \in (r_{\min}; d)$, kde d je vzdialenosť k Síriovi. Aj pre tieto hviezdy platí, že ak má byť Sírius tou správnou voľbou pre Krtka, tak ich intenzita vo vzdialenosti $r_{\min}$ musí byť menšia než intenzita Síria.

Poďme ale pekne po poriadku. Nájdime najskôr vzdialenosť $r_{\min}$. Ak sa ukáže, že existuje nejaká hviezda v okruhu $r_{\min}$ od Krtka, tak potom táto hviezda je pre Krtka najvhodnejšia a my nemusíme skúmať žiadne ďalšie podmienky.

Dohodnime sa, že za počiatok O súradnicovej sústavy zoberieme polohu Krtka a vzdialenosť r budeme merať od tohto bodu. Intenzita Slnka sa potom mení ako $I_s(r) = \frac{A_s}{(r+a)^2}$, kde a označuje vzdialenosť Slnka od počiatku súradnicovej sústavy, a intenzita Síria ako $I_d(r) = \frac{A_d}{(r-d)^2}$.

Hľadáme takú vzdialenosť $r_{\min}$, pre ktorú platí $I_s(r_{\min}) = I_d(r_{\min})$. Vyriešením tejto rovnice dostávame

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{A_s}d - \sqrt{A_d}a}{\sqrt{A_s} + \sqrt{A_d}}.$$

Nepáči sa nám, že vo výsledku vystupujú neznáme konštanty A, ktorých hodnoty nepoznáme. Čo však poznáme dobre, je intenzita $I(\mathrm{O})$, s ktorou vidíme hviezdu zo Zeme. Nájdime teda prepočet medzi $I(\mathrm{O})$ a A. To však nie je žiaden problém. Platí, že $I_s(\mathrm{O}) = \frac{A_s}{a^2}$ a $I_d(\mathrm{O}) = \frac{A_d}{d^2}$, preto

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{I_s(\mathrm{O})} - \sqrt{I_d(\mathrm{O})}}{\sqrt{I_s(\mathrm{O})}a + \sqrt{I_d(\mathrm{O})}d}ad.$$

Ľudské oko však dokáže zaznamenať širokú škálu intenzít pokrývajúcu mnoho rádov, preto sa astrofyzici rozhodli zaviesť logaritmickú stupnicu na určovanie hviezdnej veľkosti. To dáva perfektný zmysel. Už trocha menší zmysel dáva, prečo sa jasnejším hviezdam rozhodli priradiť menšiu magnitúdu.

Jednotkou hviezdnej veľkosti je magnitúda. V skutočnosti existujú dva typy magnitúd – absolútna a zdanlivá. Absolútna hviezdna veľkosť dáva do súvisu intenzity hviezd v štandardizovanej vzdialenosti od tej-ktorej hviezdy. Zdanlivá magnitúda určuje hviezdnu veľkosť pri pozorovaní zo Zeme. Prevod medzi intenzitami[14] a hviezdnymi magnitúdami poskytuje Pogsonova rovnica

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log \frac{I_1(\mathrm{O})}{I_2(\mathrm{O})}.$$

V našom prípade používame intenzity prepočítané do miesta Zeme, takže $m_{1,2}$ predstavujú zdanlivé hviezdne magnitúdy.

[14] Ak by sme chceli byť presní, tak tu vystupujú časti intenzity približne vo viditeľnom spektre, teda by sme mali hovoriť o fotometrických veličinách. Ako sme však uviedli na začiatku, všetky naše doterajšie úvahy boli platné ako pre rádiometrické, tak i pre fotometrické veličiny, preto si pod I môžeme pokojne predstavovať časť intenzity v želanom rozsahu frekvencií. Totiž pre rôzne typy hviezd sa berú do úvahy iné frekvenčné rozsahy, no situácia sa tým nijak nemení.

Teraz nám nič nebráni urobiť prepočet medzi intenzitami a hviezdnymi magnitúdami. Všimnime si, že vo výpočtoch sa nám vyskytujú výrazy typu $\sqrt{\frac{I_1(\mathrm{O})}{I_2(\mathrm{O})}}$. Z definície magnitúd platí

$$\sqrt{\frac{I_1(\mathrm{O})}{I_2(\mathrm{O})}} = 10^{-0,2(m_1-m_2)}.$$

Využijúc túto formulu môžeme vzdialenosť $r_{\min}$ prepísať ako

$$r_{\min} = \frac{10^{-0,2(m_\mathrm{s}-m_\mathrm{d})} - 1}{10^{-0,2(m_\mathrm{s}-m_\mathrm{d})}a + d}ad.$$

Na internete vyhľadáme, že $m_\mathrm{s} = -26{,}74$, $a = 1$ AU, $m_\mathrm{d} = -1{,}46$ a $d = 8{,}659$ ly. To nám umožňuje vyčísliť

$$r_{\min} \doteq 1{,}4928\ \mathrm{ly}.$$

To nás ale neteší, lebo žiadna hviezda okrem Slnka neleží v takomto okruhu od Zeme,[15] preto stále nemôžeme vylúčiť, že Sírius je pre Krtka skutočne tou najlepšou voľbou. Musíme teda ešte prešetriť všetky hviezdy v intervale $r \in (r_{\min}; d)$. Našťastie ich nie je až toľko.

Už sme uviedli, že nutnou podmienkou toho, aby Sírius bol pre Krtka tou správnou voľbou, je, že pre všetky hviezdy, ktorých vzdialenosť $r = x$ je z intervalu $(r_{\min}; d)$, musí platiť, že ich intenzita vo vzdialenosti $r_{\min}$ nie je väčšia než intenzita Síria v tejto vzdialenosti, čiže matematicky zapísané

$$\forall x \in (r_{\min}; d) \ : \ I_\mathrm{x}(r_{\min}) \leq I_\mathrm{d}(r_{\min}).$$

Ak by toto niektorá z hviezd porušovala, okamžite by sa stala horúcim kandidátom na víťaza a museli by sme pre ňu poctivo vykonať výpočet vzdialenosti, pri ktorej sa stane jasnejšou než Slnko, a tú potom porovnať s ostatnými takými kandidátmi. Ak sa však taká hviezda nenájde, potom Síria už nič neprekoná. Poďme teda na to.

V prvom rade naša podmienka hovorí, že

$$\frac{A_\mathrm{x}}{(r_{\min} - x)^2} \leq \frac{A_\mathrm{d}}{(r_{\min} - d)^2}.$$

Odtiaľ pre $x, d > r_{\min}$ platí

$$x \geq \sqrt{\frac{A_\mathrm{x}}{A_\mathrm{d}}}(d - r_{\min}) + r_{\min}.$$

Po dosadení príslušných výrazov za $A_{\mathrm{x,d}}$ a $r_{\min}$ a miernom preusporiadaní dostávame podmienku

$$1 \geq \sqrt{\frac{I_\mathrm{x}(\mathrm{O})}{I_\mathrm{d}(\mathrm{O})}}\left(1 - \frac{\sqrt{I_\mathrm{s}(\mathrm{O})} - \sqrt{I_\mathrm{d}(\mathrm{O})}}{\sqrt{I_\mathrm{s}(\mathrm{O})}a + \sqrt{I_\mathrm{d}(\mathrm{O})}d}a\right) + \frac{\sqrt{I_\mathrm{s}(\mathrm{O})} - \sqrt{I_\mathrm{d}(\mathrm{O})}}{\sqrt{I_\mathrm{s}(\mathrm{O})}a + \sqrt{I_\mathrm{d}(\mathrm{O})}d}\frac{ad}{x}.$$

Na záver to ešte prepíšeme v intenciách zdanlivých magnitúd a dostaneme

$$1 \geq 10^{-0,2(m_\mathrm{x}-m_\mathrm{d})}\left(1 - \frac{10^{-0,2(m_\mathrm{s}-m_\mathrm{d})} - 1}{10^{-0,2(m_\mathrm{s}-m_\mathrm{d})}a + d}a\right) + \frac{10^{-0,2(m_\mathrm{s}-m_\mathrm{d})} - 1}{10^{-0,2(m_\mathrm{s}-m_\mathrm{d})}a + d}\frac{ad}{x}.$$

[15] Všetky údaje o vzdialenostiach a zdanlivých manitúdach sú čerpané z https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_nearest_stars_and_brown_dwarfs/#List.

Už to len stačí overiť pre jednotlivé hviezdy a sme hotoví. Prehľad jednotlivých hviezd je uvedený v tabuľke. Vidíme, že každá z hviezd podmienku s prehľadom spĺňa, preto je Sírius naozaj najlepšou voľbou.

Tabuľka 2: Prehľad hviezd bližších než Sírius. Hviezdy označené * sú hnedé trpaslíky a ich magnitúda bola počítaná v blízkosti IR oblasti spektra

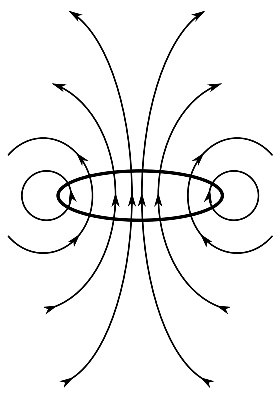
Hviezda	Zdanlivá magnitúda m_x	Vzdialenosť od Zeme x [ly]	Podmienka 1 ≥
Proxima Centauri	11,09	4,2441	0,353
alfa Centauri A	0,01	4,3650	0,762
alfa Centauri B	1,34	4,3650	0,569
Bernardova hviezda	9,53	5,9577	0,255
Luhman 16A	10,70*	6,5029	0,232
Luhman 16B	—*	6,5029	0,229
WISE 0855-0714	25,00*	7,2600	0,205
Wolf 359	13,44	7,8560	0,190
Lalande 21185	7,47	8,3070	0,193

3.6 Magnetické peripetie

vzorák **Maťo G.**, opravoval **Maťo G.**

Adamov model

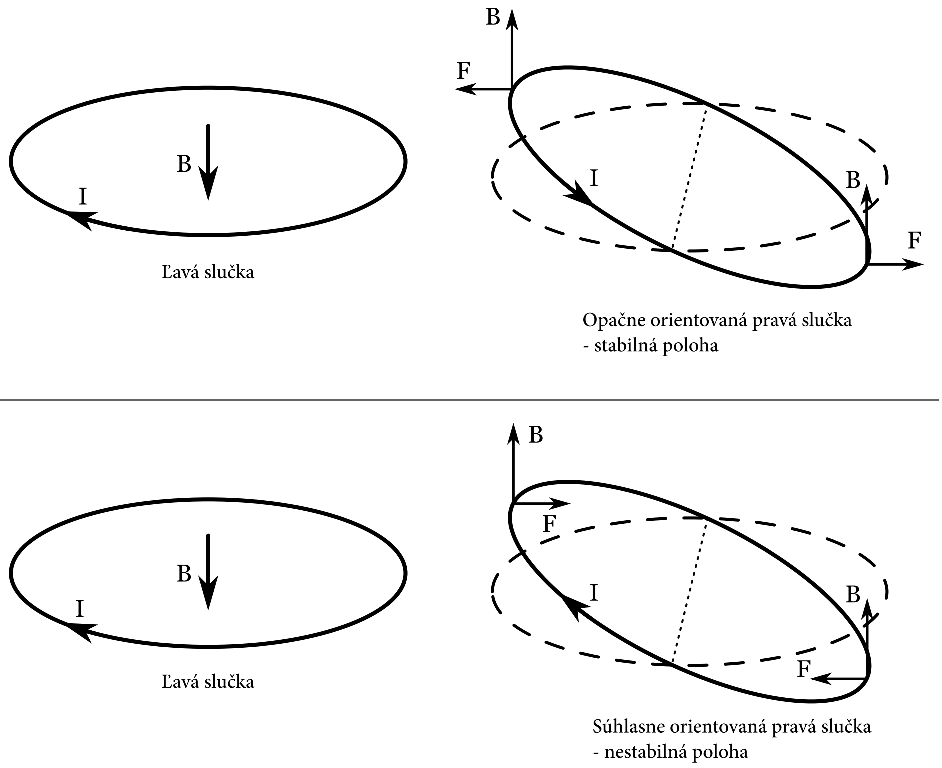
Najskôr vyriešime, čo predpovedá Adamov model, ktorý modeluje magnet ako valec s plošným prúdom na povrchu. Na začiatok budeme uvažovať, že takýto plošný prúd je ekvivalentný jednej prúdovej slučke. Prúdová slučka vygeneruje magnetické pole v jej okolí, ktoré vyzerá tak ako na obrázku 4. Nás zaujíma, že ktorá z dvoch možných konfigurácií dvoch takýchto prúdových slučiek bude mať nižšiu potenciálnu energiu.



Obrázok 4: *Pole v okolí jednej prúdovej slučky.*

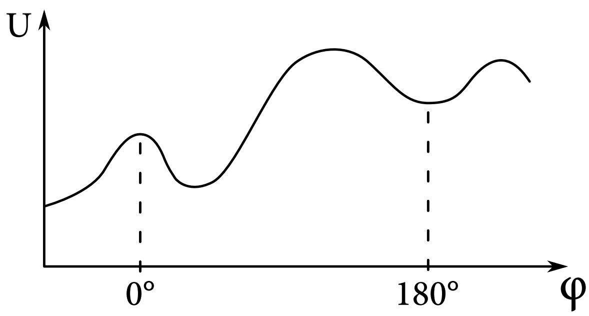
Priamo spočítať, alebo aspoň kvalitatívne určiť potenciálnu energiu sústavy prúdov vôbec nie je jednoduché, a tak bude lepšie sa uchýliť ku inému spôsobu. Začneme s faktom, že ak na prúdovú slučku pôsobí moment sily, tak to znamená, že pri malom otočení v rovnakom smere by potenciálna energia slučky poklesla.[16] V prípade našej slučky sa to dá pozorovať vtedy, keď slučku budeme otáčať tak ako na obrázku 5. Na prúdy pôsobí totiž sila $\vec{F}/L = \vec{I} \times \vec{B}$. Smery týchto síl na slučku sú znázornené na rovnakom obrázku. Je vidieť, že sily otáčajú slučku tak, **akokeby** nižšia potenciálna energia bola v prípade, keď sú slučky otočené nesúhlasne.

[16]Toto si môžete predstaviť ako vozík na naklonenej rovine – ak ho posunieme smerom, kam ho tlačí gravitačná sila, jeho potenciálna energia poklesne.



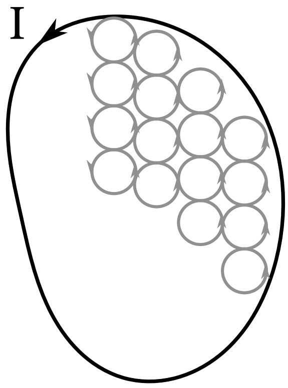
Obrázok 5: *Natáčanie slučky a pôsobiace sily.*

Znamená to však skutočne, že opačná orientácia musí mať nižšiu energiu? Nie, lebo sme neukázali, že moment sily bude slučku otáčať po celý čas tým istým smerom. Jediné, čo sme ukázali je, že súhlasná poloha je nestabilná (teda lokálne maximum energie) a nesúhlasná poloha je stabilná (lokálne minimum energie). Na to, aby toto platilo by sme museli niečo vedieť o poli generovanom prvou slučkou, ktoré je mimo plochy symetrie. Tvar tohto poľa je však netriviálny, lebo vieme, že dve slučky sú tesne pri sebe. Vyzerá to, že ani tadeto cesta nevedie.



Obrázok 6: *Napríklad aj takto by hypoteticky mohla vyzerať závislosť energie od natočenia. Uhly 0 stupňov a 180 stupňov sú lokálne maximum a minimum (ako sme ukázali), ale energia minima je väčšia ako energia maxima.*

Naštastie však nie sme úplne v koncoch – trik spočíva v tom, že slučku v takomto nehomogénnom poli vieme nahradiť superpozíciou nekonečného počtu nekonečne malých slučiek (minislučiek), ktoré celkovo vyskladajú prúd veľkej slučky tak, ako na obrázku 7. Je vidieť že susedné slučky majú na spoločnej strane opačne orientované prúdy, ktoré sa tým navzájom anulujú – preto vo výsledku je prúd v strede slučky nulový tak ako by mal byť. Zároveň slučky na okraji nemá čo anulovať a výsledkom je teda požadovaný prúd po okraji.



Obrázok 7: *Superpozícia malých minislučiek.*

Každá z týchto minislučiek je tak malá, že magnetické pole v jej okolí je prakticky konštantné, a preto náš argument platí pre ľubovoľné natočenie takejto minislučky; moment sily vždy otočí minislučku tak, že je orientovaná opačne ku druhému magnetu. Tým pádom po celú dobu tohto otáčania potenciálna energia minislučky klesá a menšiu energiu má naozaj stav, keď je minislučka orientovaná opačne. Keďže toto platí pre každú minislučku, rovnako to bude aj pre skutočnú veľkú slučku, a tým môžme povedať, že dve Adamove slučky budú mať nižšiu energiu, keď budú orientované *opačne*.

Zostáva nám sa len zamyslieť, či sa výsledok zmení, ak budeme magnety brať ako valce s povrchovým prúdom namiesto prúdových slučiek. V prvom rade sa nám trochu zmení pole tvorené prvým magnetom – skôr bude pripomínať pole tvorené cievkou v tvare solenoidu.[17] V takomto poli budeme mať druhý takýto solenoidný magnet, ktorý si však vieme predstaviť ako superpozíciu viacerých postupne poposúvaných slučiek, ktoré sme už vyriešili. Keďže v priestore, kde sa nachádza druhý magnet má magnetické rovnaký smer ako v prípade dvoch slučiek, pre každú slučku sa viac oplatí byť opačne. Tým pádom sa nám výsledok nezmení.

Simonov model

Magnetické monopóly znejú síce veľmi exoticky, no princíp je podobný ako pri obyčajných (elektrických) nábojoch: dva súhlasné magnetické náboje sa odpudzujú a dva nesúhlasné priťahujú. Zároveň platí aj "Coloumbov zákon pre magnetické monopóly", ktorý vraví, že sila medzi dvomi magnetickými monopólmi je nepriamo úmerná druhej mocnine ich vzájomnej vzdialenosti. Vďaka týmto dvom faktom, analogicky ku potenciálnej energii dvoch elektrických nábojov, vieme napísať potenciálnu energiu dvoch monopólov ako:

$$U = C\frac{q_{m1}q_{m2}}{r},$$

kde C je nejaká kladná konštanta a q_{m1} a q_{m2} sú magnetické náboje dvoch magnetických monopólov. [18]

[17] Ak chcete vidieť, ako také pole vyzerá, pozrite https://www.falstad.com/vector3dm/ a zvoľte solenoid. V nastaveniach odporúčam zvoliť: Display: Field Lines, Show Y slice a posuvné nastavenia nastaviť všetky do 1/10 okrem Field Strength a # of Turns, ktoré dajte na maximum.

[18] Ak vás veľmi trápi, čomu sa rovná konštanta C, tak je to

$$C = \frac{\mu_0}{4\pi}.$$

Teraz nám už zostáva len určiť energie dvoch sústav. Označme vzdialenosť dvoch magnetov ako R a vzdialenosť dvoch monopólov na uhlopriečku L. Samozrejme, $L > R$, a teda aj $1/L < 1/R$. Tento fakt sa nám bude hodiť o chvíľku. V prípade, že sú magnety orientované rovnakým smerom bude celková energia:

$$U_{\text{rovnako}} = Cq_m^2 \left(\frac{2}{R} - \frac{2}{L}\right).$$

Pri druhej konfigurácii to bude:

$$U_{\text{opačne}} = Cq_m^2 \left(\frac{2}{L} - \frac{2}{R}\right).$$

Teraz si spomenieme, že $1/L < 1/R$, a teda rovno vieme povedať, že:

$$U_{\text{rovnako}} > 0\,,$$

$$U_{\text{opačne}} < 0\,.$$

Z toho vidíme, že podľa Simonovho modelu budú mať magnety nižšiu energiu, ak budú opačne.

3.7 Valec, valec, ide sa na vec!

vzorák **Simon**, opravoval **Simon**

Vyriešme najprv podúlohu "na zemi sa objaví valec s počiatočnou uhlovou rýchlosťou ω_0 a počiatočnou translačnou rýchlosťou v_0, aká bude jeho rýchlosť po ustálení?" Pokiaľ sú plochy valca a zeme vo vzájomnom pohybe, bude medzi nimi existovať trecia sila konštantnej veľkosti. Podľa pravidiel pohybu tuhého telesa táto sila bude nezávisle spôsobovať translačné zrýchlenie valčeka, a jej moment bude spôsobovať uhlové zrýchlenie valčeka. Tak dostávame rovnice

$$v(t) = v_0 - \frac{F}{m}t = v_0 - gdt,$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{\tau}{I}t = \omega_0 + \frac{mgdr}{I}t = \omega_0 + \frac{2gd}{r}t.$$

Trecia sila prestane pôsobiť keď styčné plochy prestanú byť vo vzájomnom pohybe, teda keď

$$v = \omega r,$$

$$v_0 - gdt = \omega_0 r + 2gdt,$$

$$t = \frac{v_0 - \omega_0 r}{3gd}.$$

Keď tento čas spätne dosadíme do rovnice pre $v(t)$, zistíme rýchlosť po ustálení

$$v_{\text{fin}} = \frac{2}{3}v_0 + \frac{\omega_0 r}{3}. \tag{1.7.1}$$

To je polovica riešenia za nami! Ale tá jednoduchšia polovica. Teraz treba vymyslieť, čo sa s valčekom udeje pri dopade.

Prvotná myšlienka človeka môže byť, že valček jednoducho príde o svoju vertikálnu zložku translačnej rýchlosti, a nič viac sa nestane. To ale zrejme nebude pravda.[19] Treba si uvedomiť, že počas nárazu na valček pôsobí na kratučký okamih väčšia normálová sila, a táto veľká normálová sila spôsobí na kratučký okamih aj väčšie trenie. Ako zistíme, čo urobí toto trenie s valčekom? Sila pri dopade má neznámy priebeh a pôsobí infinitezimálne krátky čas. Preto je zrejmé, že bude vhodné použiť nejaký zákon zachovania. Ktorý? Dnes sa rozhodneme pre zákon zachovania hybnosti, teda presnejšie jeho zovšeobecnenú podobu, ktorá hovorí, že zmena hybnosti izolovaného telesa je krytá pôsobiacimi vonkajšími silami.[20] Normálová sila pri dopade udelí zmenu hybnosti mv_{dopad}. Ak predpokladáme, že trecia sila je d krát normálová, potom trecia sila udelí zmenu hybnosti dmv_{dopad} a moment trecej sily udelí zmenu momentu hybnosti $rdmv_{\mathrm{dopad}}$, kde v_{dopad} je samozrejme $\sqrt{2gh}$. To znamená, že valček počas okamihu dopadu získa translačnú rýchlosť

$$dv_{\mathrm{dopad}},$$

a stratí uhlovú rýchlosť

$$\frac{drmv_{\mathrm{dopad}}}{I} = \frac{2dv_{\mathrm{dopad}}}{r}.$$

Ak tieto údaje dosadíme do rovnice 1.7.1 nájdenej predtým, teda za $v_0 \to dv_{\mathrm{dopad}}$ a za $\omega_0 \to \omega_0 - \frac{2dv_{\mathrm{dopad}}}{r}$ tak dostaneme

$$v_{fin} = \frac{2}{3}dv_{\mathrm{dopad}} + \frac{\omega_0 r}{3} - \frac{2dv_{\mathrm{dopad}}}{3} = \frac{\omega_0 r}{3}.$$

To je ale šokujúci výsledok! Výsledná rýchlosť valčeka nezávisí od výšky z akej dopadne, a teda ani od vertikálnej rýchlosti pri dopade. To znamená, že ak by sme na vertikálnu zložku rýchlosti zabudli, výsledok je taký istý, ako keď valček jednoducho položíme na zem! Je to preto, lebo pri dopade z väčšej výšky sa kvôli väčšiemu treniu viac z uhlovej rýchlosti zmení na translačnú rýchlosť, ale tento efekt sa v rovnici 1.7.1 vyruší. A už teda nezostáva nič iné, len užívať si krásu fyziky :)

[19] Inak by sme vám nedali túto úlohu :)

[20] Opäť si treba položiť otázku prečo hybnosť a nie energia? Pretože tu máme kolíziu a pri kolíziach sa môže mechanická energia aj stratiť. Pamätajte si, zatiaľ čo mechanická energia sa môže premieňať na iné formy energie, takže sa nemusí vždy zachovávať, tak zákon zachovania hybnosti platí totálne všiculinko VŽDY.