Fyzikálny korešpondenčný seminár
XXXIV. ročník, 2018/2019
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Smolná prechádzka

vzorák **Vladko**, opravovala **Jarka**

Podľa zadania nebudeme uvažovať deformačné vlastnosti – kvalitu nárazníkov a možné prejdenie. Budeme skúmať len samotnú zrážku cca 70 kg tela, ktoré stojí, a dopravného prostriedku. Keď si do YouTube naťukáme „dashcam car hits pedestrian“, môžeme vidieť, že pri zrážke auta s chodcom sa chodec hneď neodrazí, ale auto si ho „nesie“. Budeme preto uvažovať zrážku ako dokonale nepružnú.

Najprv skúsme problém vyriešiť bez rovníc, len úvahami. Zranenia sú spôsobené pôsobením sily, ktorá je definovaná ako zmena hybnosti za jednotku času. Pri ignorovaní vlastností nárazníka, nevieme nič konkrétne povedať o časovom úseku, počas ktorého zmena hybnosti nastala. Zostáva nám sa iba pozrieť na zmenu hybnosti chodca. Keďže hmotnosti vozidiel sú oveľa väčšie ako hmotnosť chodca, môžeme zanedbať spomalenie vozidla pri zrážke a pozerať sa iba na zmenu hybnosti. Ak Jimi neuteká smerom od alebo k vozidlu, zmena jeho rýchlosti je totožná s rýchlosťou po zrážke. To znamená, že je nebezpečnejšia zrážka s rýchlejším vozidlom bez ohľadu na jeho hmotnosť. Ak ste podobnú úvahu napísali do vášho riešenia, sme s vami úplne spokojný.

Pre premotivovaných riešiteľov ponúkneme aj matematickejšie riešenie – budeme riešiť nepružnú zrážku vozidla a stojaceho človeka. Pomocou zákonu zachovania hybnosti, môžeme napísať

$$Mv_i = (M+m)v_f.$$

Na ľavej strane rovnice je hybnosť pred zrážkou – hybnosť auta/vlaku a na pravej hybnosť po zrážke. Po úprave vyjadríme rýchlosť po zrážke

$$v_f = \frac{M}{M+m}v_i.$$

Poľahky už vypočítame rozdiel energií pred zrážkou a po zrážke, ktorá sa spotrebuje na rozbitie čelného skla alebo aj zlomenie rebier

$$\Delta E = \frac{1}{2}Mv_i^2 - \frac{1}{2}(M+m)v_f^2 = \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v_i^2.$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme pre vlak hodnotu $\Delta E_v = 4320\,\mathrm{J}$ a pre auto $\Delta E_a = 6310\,\mathrm{J}$. Teda horšie následky nesie chodec pri zrážke s autom idúcim päťdesiatkou než s vlakom idúcim štyridsiatkou. Avšak toto je v rozpore s našou intuíciou. Prečo je to tak?

Pri zrážke s autom najprv prichádza do styku dolná časť tela s nárazníkom a následne telo s kapotou a čelným sklom. Nárazník pri aute je konštruovaný tak, aby dokázal časť nárazu absorbovať. Pri vlaku zrážku nesie celé telo a je oveľa vyššia pravdepodobnosť, že sa chodec dostane pod kolesá. Tieto fakty zvyšujú nebezpečenstvo pri zrážke s vlakom, ktoré náš model vôbec nebral do úvahy.

Ešte podotkneme jednu dôležitú vec. Často sa pri porovnávaniach zrážky s vlakom a autom hovorí o veľkej hmotnosti vlaku, ktorá by mala zhoršovať následky zrážky. Avšak toto nie je úplne pravda pri zrážke s chodcom, ktorý je veľmi ľahký v porovnaní s dopravným prostriedkom. Vtedy je hmotnosť kľúčová len pri brzdnej dráhe. V čase medzi spozorovaním chodca šoférom/rušňovodičom je vyššia šanca, že auto stihne viac spomaliť a samotná zrážka prebehne pri nižšej rýchlosti.

Komentár k riešeniam

Prišlo veľa správnych riešení, ktoré sa líšili tým, čo všetko ste spočítali. Niektorí ste skončili pri zmene Jimiho hybnosti (resp. rýchlosti), niektorí ste počítali zmenu kinetickej energie dopravného prostriedku, niektorí zrýchlenie Jimiho… Taktiež sa vyskytli riešenia, kde ste navyše spočítali hmotnosť, kedy sa Jimimu viac oplatí skončiť pod autom.

2.2 V tieni obrov

vzorák **Kiko**, opravovala **Katka**

Začnime s tým, že si vyjasníme, čo to vlastne samotný tieň je. V bežnom ponímaní to je akési miesto, kam dopadne menej svetla ako do jeho okolia. Zo skúsenosti vieme, že ak položíme pred dráhu lúča nejaký predmet, lúč sa predmetom buď pohltí (čierne telesá), odrazí (zrkadlo) alebo prejde cez materiál (sklo). V prvých dvoch prípadoch nám svetlo na druhú stranu každopádne neprejde a za predmetom sa vytvorí tieň. S tým sa bežne stretávame v uzavretých miestnostiach s lampou alebo baterkou.

V prírode je zdrojom žiarenia samotné Slnko. Pri pohľade na oblohu počas dňa však nevidíme tmavý vesmír alebo vzdialené hviezdy. Vidíme oblohu modrej farby. Tá však nevzniká náhodou, ale rozptýlením slnečných lúčov v atmosfére. Svetlo ktoré k nám prichádza sa skladá z viacerých vlnových dĺžok (slnečného spektra). Pre viditeľné svetlo platí, že čím je daná vlnová dĺžka kratšia, tým viac sa na molekulách vzduchu rozptýli.

Modré svetlo sa teda rozptyľuje v atmosfére v atmosfére najviac, čo má za následok oblohu modrej farby počas dňa. Každý kúsok priestoru, kam dopadne žiarenie, si teda vieme predstaviť ako veľmi slabý zdroj, ktorý vysiela primárne modré žiarenie. Vzdialené objekty sa vďaka tomu javia viac namodralé, keďže medzi pozorovateľom a objektom je veľa priestoru na rozptýlenie modrého svetla.

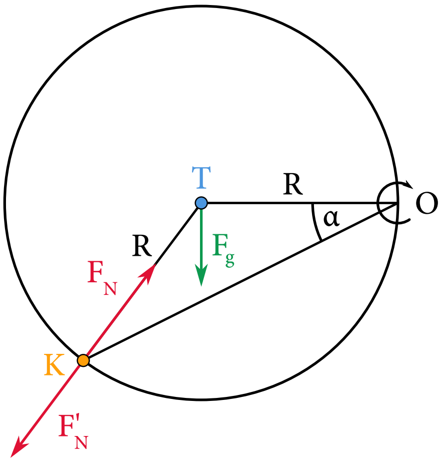
Podobne to teda funguje aj s tieňom. Pri pohľade naň sa taktiež pozeráme cez vrstvu vzduchu, kde sa nám môže rozptyľovať svetlo, ktorého intenzita je priamo úmerná priemamu žiareniu. Ak sa pozeráme na vlastný tieň, pozerám sa cez neožiarený vzduch kde prakticky žiadne priame žiarenie nieje. Pri pohľade na cudzí tieň však hľadíme cez vrstu vzduchu ktorá ožiarená je. Následkom toho dopadne na tieň a do nášho oka viac rozptýleného svetla ako pri pohľade na vlastný tieň. Čím ďalej sa tieň nachádza, tým väčší objem vzduchu je medzi našimi očami a tieňom. Vďaka tomu bude tieň svetlejší a svetlejší.

Pri pohľade na tiene štítov vidíme skokové rozdieli. Tie sú spôsobené ich vzdialenosťou od povrchu zeme. Nachádza sa teda medzi vrchmi a tieňmi väčší objem vzduchu a teda na tieň dopadá väčšie množstvolúčov. Niektorým týmto lúčom môže tieniť Lomnický štít, čo vysvetľuje ostré rozhranie odtieňov.

2.3 Špagetka vytáča

vzorák **Katka**, opravoval **Kiko**

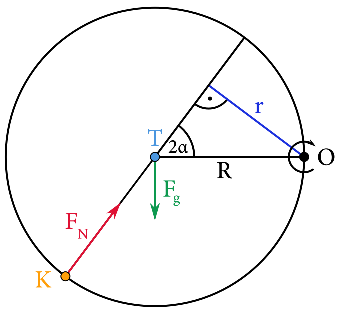
Keď už Špagetka toľko vymýšľa, našou úlohou je zistiť, kde máme klinček pod obruč pribiť tak, aby bola obruč stabilizovaná a klinček čo najmenej zaťažený. Vyznačme si teda s nadšením na obrázku sily pôsobiace na obruč a na klinček:



Obrázok 1: *Situácia so zakreslenými silami*

Na určenie optimálnej polohy klinčeka budeme hľadať nejaký uhol α, ktorý bude klinček zvierať s vodorovnou osou obruče prechádzajúcej jej osou otáčania. Ako vidíme z obrázka, jediná sila pôsobiaca na klinček je normálová sila F_N (ktorou taktiež klinček pôsobí na obruč, len v opačnom smere).

Aby bola obruč s polomerom R zaistená, musí byť výsledný moment sily okolo jej osi otáčania nulový. Vektor normálovej sily vyvolanej klinčekom vtedy bude smerovať do stredu obruče. Teda to bude vyzerať takto:



$$M_1 + M_2 = 0,$$

kde

$$M_1 = F_g \cdot R,$$

$$M_2 = F_N \cdot r.$$

Treba nám určiť rameno sily r. Z obrázka vidíme, že trojuholník OTK je rovnoramenný, uhol $\measuredangle OTK = 180° - 2\alpha$, a z toho vyplýva, že uhol $\measuredangle OTP = 2\alpha$.

Načo nám to je? Skvelá otázka. Vďaka tejto informácii už vieme pomocou goniometrických funkcií vyrátať rameno sily r veľmi jednoducho,

$$\sin(2\alpha) = \frac{r}{R},$$

a odtiaľ

$$r = R \sin(2\alpha)\,.$$

Vidíme, že tiažová sila a normálová sila pôsobiaca na obruč otáčajú obruč v opačných smeroch, preto by sa patrilo dať jednému z momentov opačné znamienko. Dostávame

$$M_1 = M_2,$$
$$mg = F_N \sin(2\alpha),$$
$$F_N = \frac{mg}{\sin(2\alpha)}.$$

Pripomeňme si, že chceme, aby bola sila F_N čo najmenšia. Hľadáme teda uhol, pri ktorom bude menovateľ nadobúdať čo najväčšiu hodnotu. Maximálna možná hodnota sínusu je 1 (alebo -1), preto možno napísať

$$\sin(2\alpha_1) = 1 \quad \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$
$$\sin(2\alpha_2) = -1 \quad \Rightarrow 2\alpha_2 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \quad \Rightarrow \alpha_2 = \frac{3\pi}{4} + \pi k.$$

Nás zaujímajú len hodnoty uhlov v intervale $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ (kde sa nachádza obruč), ktoré sú $\frac{\pi}{4} = 45°$ a $\frac{-\pi}{4} = -45°$.

Riešenie úlohy je teda nasledovné: klinček bude namáhaný najmenšou možnou silou práve vtedy, ak ho pribijeme pod obruč pod ťažiskom alebo nad ťažiskom obruče. Tak sa bude obruč bezpečne nehýbať a pomaly zapadať prachom.

2.4 Trubadúr

vzorák **Samašec**, opravoval **Krtko**

Gro tejto úlohy spočívalo v zistení výkonu pľúc. Aby sme mohli preukázať, že naše merania budú naozaj merať výkon, ktorý sme chceli namerať, musíme si určiť čo to je ten výkon pľúc. My si zvolíme maximálny výkon pľúc. budeme sa snažiť vydychovať čo najsilnejšie. Inak by sa nám stalo, že raz zmeriame raz malý výkon, raz veľký a nebudeme vedieť určiť chybu merania.

Na túto úlohu existuje veľa spôsobov, ako ju vyriešiť, predstavím vám dva spôsoby, sami sa presvedčíte, ktorý je lepší.

Prvý spôsob je:

1. zober slamku, ideálne takú tú hrubú, čo sa dáva do predražených smoothie
2. zisti objem,
3. fúkni do slamky ako len vieš a popritom si to natoč na kameru (viac `fps`, viac adidas),
4. pusti si video frame by frame (snímok po snímku) a zisti, koľko trvalo vode vytrysknúť zo slamky a dorátaj z toho čas trvania deju,
5. spočítaj kinetickú energiu vody a predeľ časom – máš výkon.

Teraz ešte raz a detailnejšie, najprv si zmeriam objem slamky (naplním ňou 2 dl pohár, zistím, koľko objemov slamky na to bolo potrebných a predelím 2 dl počtom naplnení), $V = 1{,}05$ ml. Natočím mobilom video so 120 fps, pozriem video https://youtu.be/d-IQZumof3Y, zistím, že 9 frameov trvalo vytrysknutie vody[1], čo zodpovedá $t = 0{,}075$ s, kinetická energia vody je $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 0{,}004$ J a výkon je potom $P = \frac{E_k}{t} = 0{,}06$ W.[2]

[1] Posledný frame bol ten, kde okolo vody bolo vidno unikajúci vzduch.

[2] Predpokladali sme, že rýchlosť vody počas vytrysknutia bola konštantná, čo samozrejme pravda nebude. No ak si dopočítame maximálnu výšku dostreku, tak nám vyjde 0,43 m, čo je trochu menej ako realita.

Po začatí merania so slamkou som si uvedomil jednu vec, hocako si človek môže pripraviť experiment, niekedy zistí až počas merania jeho rôzne úskalia. Napríklad cez slamku sa ozaj zle vydychuje, keďže fúkam cez menšiu dieru, ako sú moje ústa. Skúsme namerať priamo vodu, ktorú vypľúvam z úst.

Experiment sa dá zostaviť takto:

1. zober si meter a prilep ho na miesto, ktoré nevadí, ak zamokríš,
2. daj si plavky, vpi definované množstvo vody a ľahni si do nuly na metri,
3. vypľuj vodu, ako len najvia vieš a opakuj,
4. pusti si video frame by frame (snímok po snímku) a zisti, koľko trvalo vode vytrysknúť zo úst a dorátaj z toho čas trvania deju,
5. predpokladaj konštantný objemový prietok, vypočítaj potenciálnu energiu, ktorá bola dodávaná nameraný čas - máš výkon.

Ako možno vidno z videa https://youtu.be/2P7_GIoXypI, 51 frameov trvala celá seansa, čo je $t = 0{,}425$ s. Vody som vždy vypil dva poháriky s objemom 0,4 dl a z videa možno odčítať priemernú dosiahnutú výšku približne $h = 1$ m. Potom výkon nám vychádza[3] $P = \frac{E_p}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = 1{,}8$ W.

Vidíme, že v našom druhom prípade sme namerali 30-krát väčší výkon, teda dobre vidíme, ako veľmi dôležité je zostaviť experiment takým spôsobom, aby sme merali ozaj to, čo chceme (v našom prípade maximálny výkon).

Čo sa týka zanedbaní, tie najsilnejšie[4] sa pohybujú na úrovni desatín výslednej hodnoty, výsledok je teda nesprávne písať na 8 desatinných miest presne, keď takú presnosť nevieme zaručiť.

2.5 Jarovo súpoistie

vzorák **Jaro**, opravoval **MaťoB**

Kvalitatívny rozbor

Uvažujme súpoistie pozostávajúce z $2n$ poistiek. Keďže jednotlivé poistky majú nejaký odpor R, celkový odpor R_n súpoistia je nenulový. Akonáhle pripojíme súpoistie k zdroju a napätie začneme pomaly zvyšovať, začne rásť prúd pretekajúci obvodom. Zo začiatku je závislosť prúdu na napätí pekná, lineárna, s konštantou úmernosti $\frac{1}{R_n}$. Nič nenasvedčuje tomu, že by sa to malo niekedy zmeniť. No potom sa to zrazu pokazí. Akonáhle napätie prekročí istú hodnotu, prúd pretekajúci cez nejakú poistku dosiahne jej limit a tá sa prepáli, čím sa efektívne zmení odpor súpoistia.

Zamyslime sa najskôr nad tým, v akom poradí sa budú poistky prepaľovať. To nie je až taký veľký problém zistiť. Stačí, keď si uvedomíme, ako bolo súpoistie skonštruované. Na každej úrovni totiž pozostáva z poistky s odporom R a o úroveň nižšieho súpoistia, ktoré je sériovo zapojené s ešte jednou poistkou.

Začnime odvnútra. Na prvej úrovni máme len dve paralelné poistky, ktorých výsledný odpor je $R_1 = \frac{R}{2}$. Na druhej úrovni sa k nim do série pridá jedna poistka, takže dostaneme zapojenie s odporom $\frac{3}{2}R$. Tento diel pripojíme paralelne k poistke s odporom R.

A teraz prichádza kľúčová myšlienka. Pri paralelnom zapojení sa prúd rozdelí medzi obe vetvy, takže keď k odporu pripojíme ľubovoľne veľký, ale konečný odpor, výsledný odpor sa zníži a bude menší než odpor ktorejkoľvek z vetiev obvodu. To znamená, že v našom prípade bude výsledný odpor na ľubovoľnej úrovni menší než R. No a keďže vždy máme jednu vetvu pozostávajúcu z práve jednej poistky, jej odpor je R, a druhú

[3] Fyzikálne sa situácia dá predstaviť, že výkon je práca za čas, ja som 0,425 s dodával vode energiu (pracoval som) a kebyže mám hore nejakú nádobku, ktorá mi zbiera vodu, tak by som efektívne vypľul vodu a meter vyššie

[4] Napríklad odčítanie z metra bolo presné na 0,1 m, množstvo vody som vedel povedať tiež nie presnejšie ako na 0,01 l

vetvu obsahujúcu blok s odporom menším než R sériovo pripojený k poistke s odporom R, výsledný odpor druhej vetvy bude z intervalu $(R; 2R)$. To znamená, že väčší prúd bude tiecť vždy cez vetvu s osamotenou poistkou. No a keďže táto sa prepáli už pri prúde I, súpoistie sa začne prepaľovať pekne od vonku.

Teraz si môžeme povedať, ako sa zmení prúd pretekajúci hlavnou vetvou obvodu, keď sa prepáli jedna poistka. Kľúčovou myšlienkou je, že ak je súpoistie dostatočne veľké a prepáli sa vonkajšia poistka, efektívne dostaneme o jedno menšie súpoistie, ktoré má ale takmer rovnaký odpor ako pôvodné, a k nemu je do série predradený ešte jeden dodatočný odpor R. To znamená, že výsledný odpor sa po prepálení poistky zvýši zhruba o R, čo má za následok, že prúd v obvode klesne.

Správanie obvodu bude teda nasledovné. Prúd bude najskôr lineárne rásť s napätím až do momentu, kedy sa prepáli prvá poistka. V tomto okamihu prúd skokovo poklesne. Pri ďalšom zvyšovaní napätia začne prúd opätovne rásť, až dosiahne približne hodnotu pred prepálením poistky a v tomto momente sa prepáli ďalšia poistka. Tento cyklus sa bude opakovať až dovtedy, kým bude počet zostávajúcich poistiek dostatočne veľký.

A čo sa bude diať, keď bude zostávajúce súpoistie malé? Vtedy už prestane platiť, že odpor sa zvýši zhruba o R, pretože zostávajúca časť sa na pôvodnú nebude veľmi podobať a prúd po prepálení poistky porastie na inú hodnotu. Čo znamená malé súpoistie, si povieme o chvíľku.

Poznamenajme ešte, že keď zostanú posledné dve paralelne zapojené poistky, tak každou z nich bude pretekať v kritickom prípade prúd I, takže horná z dvojice poistiek by sa mala prepáliť. V tomto momente však v hlavnej časti obvodu už bude tiecť prúd $2I$, takže sa môže prepáliť ľubovoľná poistka hlavnej vetvy, čiže v tomto momente je správanie sa obvodu nejednoznačné. Tento variant je na grafe zaznačený čiarkovanou čiarou.

Kvantitatívny rozbor

Začnime tým, že si nájdeme odpor neporušeného súpoistia. Ak poznáme odpor R_{n-1} predchádzajúcej úrovne, odpor R_n dostaneme z rovnice

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_{n-1} + R} + \frac{1}{R}.$$

Povedali sme, že ak je n dostatočne veľké, tak $R_n \approx R_{n-1} \overset{\text{ozn.}}{=} R_\infty$. Keď to dosadíme do uvedenej rovnice, dostaneme kvadratickú rovnicu pre R_∞

$$R_\infty^2 + R \cdot R_\infty - R^2 = 0,$$

ktorej riešením je

$$R_\infty = \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{2} R.$$

Kladný koreň dostaneme len pre znamienko „+“, takže

$$R_\infty = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R \doteq 0{,}618 R.$$

Tomu zodpovedá prúd

$$I_\infty = \frac{U}{R_\infty} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \frac{U}{R} \doteq 1{,}618 \frac{U}{R}.$$

No nie je to božské?![5]

Striktne vzaté sa nám podarilo nájsť odpor nekonečne veľkého súpoistia. Nájdime teraz aj odpor konečne veľkého. Budeme pritom vychádzať z rekurentného vzťahu

$$R_{n+1} = \frac{R_n + R}{R_n + 2R} R.$$

Skúsme si do tohto výrazu dosadiť vyjadrenie odporu R_n pomocou odporu R_{n-1}. Dostaneme

$$R_{n+1} = \frac{\frac{R_{n-1}+R}{R_{n-1}+2R} R + R}{\frac{R_{n-1}+R}{R_{n-1}+2R} R + 2R} R = \frac{2R_{n-1} + 3R}{3R_{n-1} + 5R} R.$$

Ak by sme tak urobili znovu, dostali by sme

$$R_{n+1} = \frac{5R_{n-2} + 8R}{8R_{n-2} + 13R} R.$$

Už ste si v tom všimli istú pravidelnosť? Opakované vnáranie rekurentného vzťahu vedie k tomu, že v čitateli aj v menovateli sa budú vyskytovať stále väčšie a väčšie Fibonacciho čísla.[6]

Môžeme sa pokúsiť formalizovať to. Označme a_n n-té Fibonacciho číslo. Platí $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Potom možno písať

$$R_{n+1} = \frac{a_1 R_n + a_2 R}{a_2 R_n + a_3 R} R = \frac{a_3 R_{n-1} + a_4 R}{a_4 R_{n-1} + a_5 R} R = \frac{a_5 R_{n-2} + a_6 R}{a_6 R_{n-2} + a_7 R} R,$$

čo sa dá zovšeobecniť ako

$$R_{n+1} = \frac{a_{2l+1} R_{n-l} + a_{2l+2} R}{a_{2l+2} R_{n-l} + a_{2l+3} R} R.$$

Ak teraz použijeme $l = n - 1$, dostaneme

$$R_{n+1} = \frac{a_{2n-1} R_1 + a_{2n} R}{a_{2n} R_1 + a_{2n+1} R} R.$$

Vieme pritom, že $R_1 = \frac{R}{2}$, preto

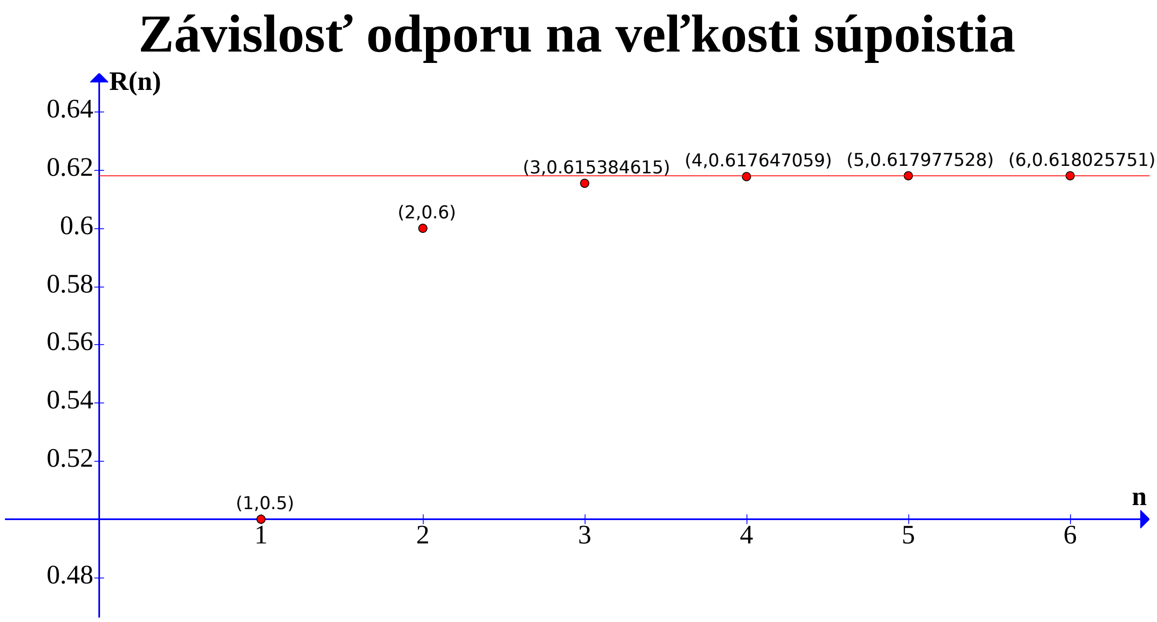
$$R_{n+1} = \frac{a_{2n-1} + 2a_{2n}}{a_{2n} + 2a_{2n+1}} R, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Využijúc rekurentný vzťah Fibonacciho postupnosti $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ možno tento výraz ešte zjednodušiť:

$$R_{n+1} = \frac{a_{2n-1} + 2a_{2n}}{a_{2n} + 2a_{2n+1}} R = \frac{a_{2n+1} + a_{2n}}{a_{2n+2} + a_{2n+1}} R = \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+3}} R.$$

[5] Ale je! Číslo, ktoré sme dostali, má vlastné meno. Označuje sa gréckym písmenom φ a nazýva sa zlatý rez alebo niekedy aj božský pomer. Okrem iného je rovný limite pomeru dvoch po sebe nasledujúcich Fibonacciho čísel. To nie je náhoda, ako uvidíme neskôr.

[6] Na tomto mieste nebudeme matematicky rigorózni a dôkaz neuvedieme.



Obrázok 2: *Závislosť odporu súpoistia od jeho veľkosti*

Našli sme vyjadrenie odporu konečne veľkého súpoistia pomocou Fibonacciho čísel. Teraz si môžeme vyčísliť niekoľko prvých odporov, aby sme zistili, aké veľké musí byť súpoistie, aby sa jeho odpor ďalším zväčšovaním už veľmi nemenil. Z grafu okamžite vidíme, že počnúc R_4 sa odpor veľmi nemení a že odpor naozaj konverguje k R_∞.. To je však z vyjadrenia $R_n = \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}R$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ zrejmé, keďže

$$R_\infty = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}R = \frac{1}{\varphi}R\Big|_{\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R.$$

Teraz nám už nič nebráni vyjadriť hľadaný prúd ako

$$I_n = \frac{U}{R_n} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\frac{U}{R}, \ n = 1, 2, 3, \dots$$

To je prúd, ktorý tečie obvodom do momentu, než sa prepáli prvá poistka.

Poďme ďalej skúmať, ako sa zmenia pomery v obvode po prepálení poistiek. Už sme si vysvetlili, v akom poradí sa budú poistky prepaľovať. Nájdime, aký bude odpor súpoistia po prepálení k poistiek. Označme si tento odpor R_n^k. V tomto momente bude obvod pozostávať z k poistiek zapojených v sérii a k nim sériovo pripojeného súpoistia $(n-k)$-tej úrovne, preto celkový odpor bude

$$R_n^k = kR + R_{n-k}^0 = \left(k + \frac{a_{2n-2k}}{a_{2n-2k+1}}\right)R.$$

Nájdime, pri akom prúde sa prepáli k-ta poistka. Označme si tento prúd $\hat{I}_n^k$. Cez vetvu s jedinou poistkou musí v tomto momente tiecť prúd I. Nech druhou vetvou tečie prúd $\tilde{I}_n^k$. Podľa prvého Kirchhoffovho zákona platí, žu súčet prúdov vtekajúcich do uzla je rovný súčtu prúdov vytekajúcich z tohto uzla, teda

$$\hat{I}_n^k = I + \tilde{I}_n^k.$$

Zároveň podľa druhého Kirchhoffovho zákona má byť v oboch vetvách rovnaký úbytok napätia, teda

$$IR = \tilde{I}_n^k \left(R + R_{n-k}^0\right).$$

Vylúčením nezaujímavého $\tilde{I}_n^k$ dostávame

$$\hat{I}_n^k = \left(1 + \frac{R}{R + R_{n-k}^0}\right) I,$$

čo možno opäť vyjadriť pomocou Fibonacciho čísel ako

$$\hat{I}_n^k = \frac{2a_{2n-2k+1} + a_{2n-2k}}{a_{2n-2k+1} + a_{2n-2k}} I.$$

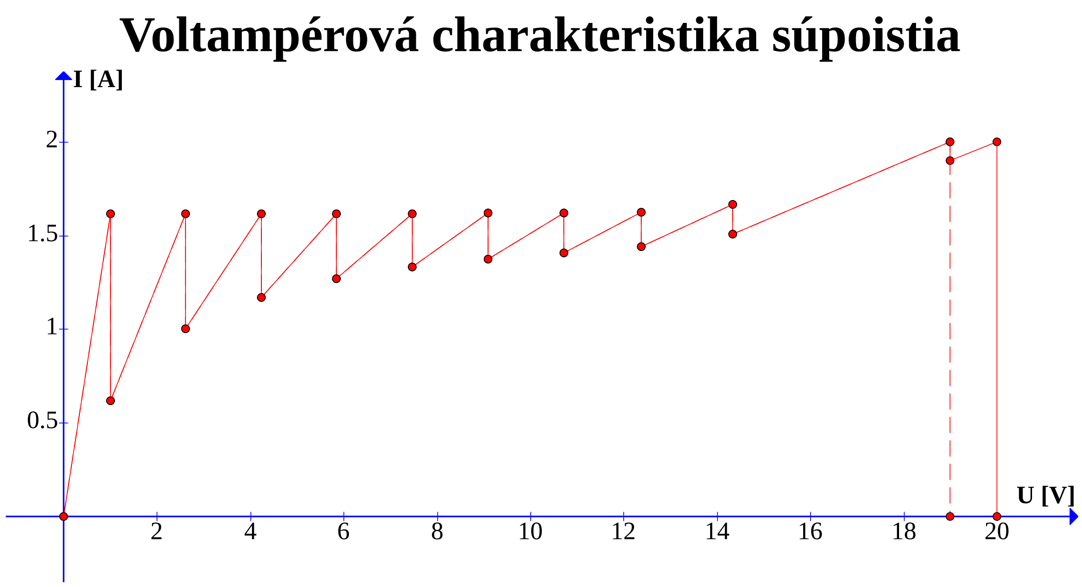
Tomuto prúdu zodpovedá napätie

$$U_n^k = R_n^{k-1}\hat{I}_n^k = \left(k - 1 + \frac{a_{2n-2k+2}}{a_{2n-2k+3}}\right) \frac{2a_{2n-2k+1} + a_{2n-2k}}{a_{2n-2k+1} + a_{2n-2k}} RI.$$

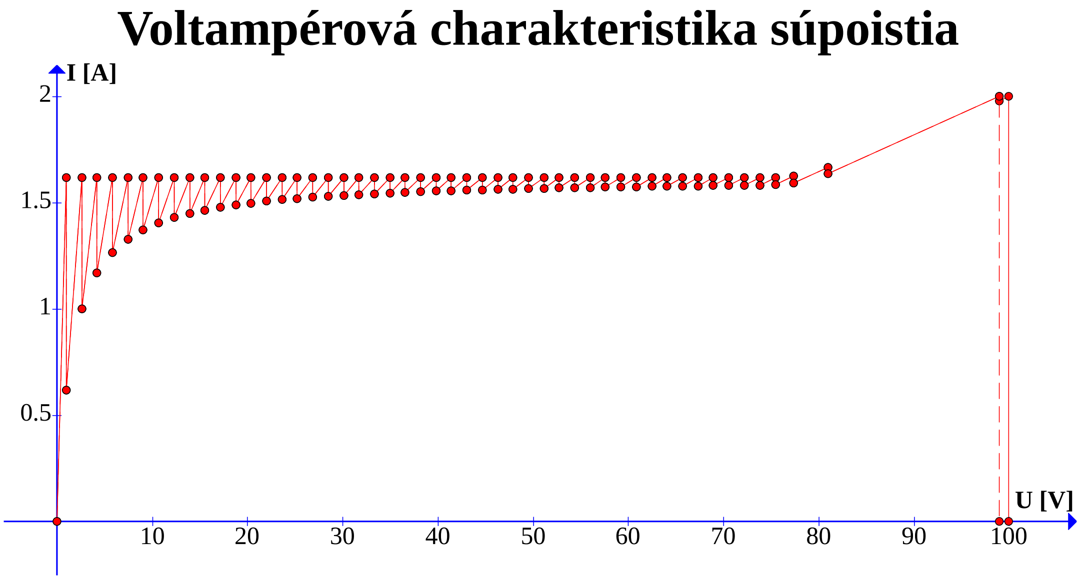
Na záver ešte nájdeme prúd $\bar{I}_n^k$, ktorý tečie obvodom tesne po prepálení k-tej poistky

$$\bar{I}_n^k = \frac{U_n^k}{R_n^k} = \frac{R_n^{k-1}}{R_n^k}\hat{I}_n^k = \frac{k - 1 + \frac{a_{2n-2k+2}}{a_{2n-2k+3}}}{k + \frac{a_{2n-2k}}{a_{2n-2k+1}}} \frac{2a_{2n-2k+1} + a_{2n-2k}}{a_{2n-2k+1} + a_{2n-2k}} I.$$

Na záver si vykreslime nájdenú voltampérovú charakteristiku. Tu uvedieme VA charakteristiky pre súpoistia s $n = 10$ a $n = 50$.



Obrázok 3: *Voltampérová charakteristika súpoistia $n = 10$*



Obrázok 4: *Voltampérová charakteristika súpoistia* $n = 50$

A čo z toho ste mali urobiť? V prvom rade ste si mali uvedomiť, v akom poradí sa budú poistky prepaľovať a ako sa to prejaví na odpore súpoistia, resp. pretekajúcom prúde. Následne ste mohli načrtnúť, ako vyzerá voltampérová charakteristika súpoistia. Čo sa týka nájdenia význačných hodnôt, nemuseli ste nájsť napätia a prúdy pre všeobecné počty použitých poistiek. Stačilo si zvoliť nejaké n a úlohu riešiť numericky.

2.6 Na druhej koľaji

vzorák **Dušan**, opravoval **Dušan**

Na prvý pohľad sa mohla zdať táto úloha náročná, keďže v nej vystupujú fotometrické veličiny. V skutočnosti to tak vôbec nie je, uvidíme to, keď sa pozrieme na tieto veličiny trochu bližšie. V jednoduchosti sa dá povedať, že fotometrické veličiny ako svetelný tok alebo osvetlenie vyjadrujú rádiometrické veličiny (tie štandardné, nezávislé na ľudskom vnímaní) preškálované normovanou citlivosťou oka na jednotlivé vlnové dĺžky. To však znamená, že rovnaké vzťahy, ako platia pri rádiometrických veličinách, budú platiť aj pre fotometrické. Vieme, že vzťah medzi žiarivým výkonom/tokom Φ_e a intenzitou ožiarenia/ožiarením I_e je

$$I_e = \frac{\Phi_e}{S} \cos\alpha,$$

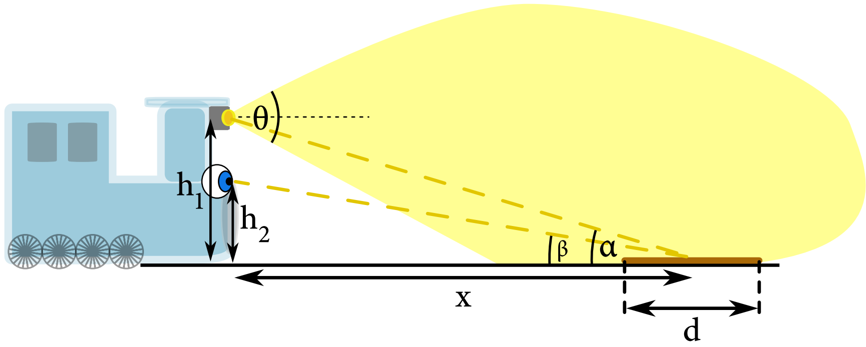
kde S je plocha, na ktorú dopadá žiarenie, a α je uhol, ktorý zviera dopadajúce žiarenie s normálou ožiarenej plochy S. Ako bolo povedané, analogický vzťah platí pre svetelný tok Φ a osvetlenie E

$$E = \frac{\Phi}{S} \cos\alpha.$$

A teraz prejdime k samotnej úlohe. Svetlo z reflektora bude vo vzdialenosti r dopadať na plochu guľového vrchlíka s obsahom $2\pi r^2 \left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)$, kde θ je vrcholový uhol kužeľa, v našom prípade 15°. Keďže počítame s tým, že plocha prekážky je naozaj malá a prekážka je ďaleko od reflektora, dopadne na ňu iba zlomok svetelného toku, pričom bude závislosť od vzdialenosti zanedbáme. To znamená, že na prekážku dopadne svetelný tok

$$\Phi_2 = \Phi_1 \frac{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \sin\alpha}{2\pi r^2\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)} \approx \Phi_1 \frac{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \frac{h_1}{x}}{2\pi\left(h_1^2 + x^2\right)\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)},$$

kde sme si označili celkový svetelný tok z reflektora $\Phi_1 = 50\,000$ lm, priemer prekážky $d = 1$ m, výšku reflektora nad zemou $h_1 = 3$ m, horizontálnu vzdialenosť prekážky od Tomáša x, ktorú hľadáme, a uhol, ktorý zviera dopadajúce svetlo s horizontálou $\alpha \approx \sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{h_1}{x}$.



Obrázok 5: *Tomáš a prekážka, na ktorú si svieti.*

Časť tohoto dopadajúceho svetla (konkrétne 10%) prekážka odráža. Zo zadania vieme, že ju odráža rovnomerne do všetkých prípustných smerov (Táto informácia mohla byť pochopená dvoma spôsobmi, a za nepresné zadanie sa teda ospravedlňujeme. Prvá možnosť je, že svietivosť prekážky po odraze je konštantná, a teda nezávislá od uhla, pod ktorým prekážku pozorujeme. Inak povedané prekážka sa správa ako bodový zdroj. S takýmto predpokladom pokračujeme aj vo vzoráku, keďže väčšina riešiteľov to takto pochopila. Druhá možnosť bola pokladať prekážku naozaj za fyzakálne správne matné teleso. Vtedy je konštantná luminancia/jas a predpokladáme lambertovský rozptyl.), čiže do priestorového uhla 2π sr zodpovedajúceho polpriestoru. Teraz už triviálne určíme osvetlenie vo vzdialenosti očí od prekážky ako

$$E = \frac{0{,}1\Phi_2 \cos\beta}{2\pi(h_2^2 + x^2)} \approx 0{,}1\Phi_1 \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \frac{h_1}{x}}{4\pi(h_1^2 + x^2)(h_2^2 + x^2)\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)},$$

kde sme označili výšku Tomášových očí od zeme $h_2 = 2$ m, a uhol medzi dopadajúcim svetlom do očí a normálou k očiam β. Uhol β je veľmi malý, preto sme spravili aproximáciu $\cos\beta = 1$.

Teraz máme rovnicu piateho rádu pre x. Máme dve možnosti. Buď priamo dosadíme do rovnice a dáme ju vyriešiť nejakému múdremu programu, napríklad Wolframu, a dostaneme $x \doteq 128{,}37$ m, alebo si povieme, že $x \gg h_1, h_2$ a tieto príspevky v súčtoch s x zandbáme. Potom možno výsledok vyjadriť ako

$$x = \left(\frac{0{,}1\Phi_1}{E} \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 h_1}{4\pi\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)} \right)^{1/5} \doteq 128{,}39 \text{ m.}$$

Ako môžeme vidieť, táto aproximácia výsledok prakticky nezmenila a bola teda oprávnená. Zostáva nám ešte overiť, či takáto situácia môže nastať, a či naozaj reflektor v takejto vzdialenosti osvetlí prekážku. Keďže však platí, že $\arctan\frac{h_1}{x} < \frac{\theta}{2}$, žiadna patológia nenastane a výsledok je správny.

Väčšina z vás počítala, že prekážka je kolmá smerom k zemi. To spôsobí iba jedinú vec, faktor $\sin\alpha \approx \frac{h_1}{x}$ sa zmení na $\cos\alpha \approx 1$, takže bude treba riešiť rovnicu

$$E = \frac{0{,}1\Phi_2 \cos\beta}{2\pi(h_2^2 + x^2)} \approx 0{,}1\Phi_1 \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2}{4\pi(h_1^2 + x^2)(h_2^2 + x^2)\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)}.$$

2.7 Miesič pod tlakom

vzorák **Simon**, opravoval **Simon**

Pre analýzu pohybu činky na mojom hrudníku možno zvoliť niekoľko rôznych prístupov. Jedným z nich je využitie zákona zachovania energie. Energetický prístup sa v tomto príklade ukáže ako drasticky najjednoduchší, preto tu bude prezentovaný práve ten.

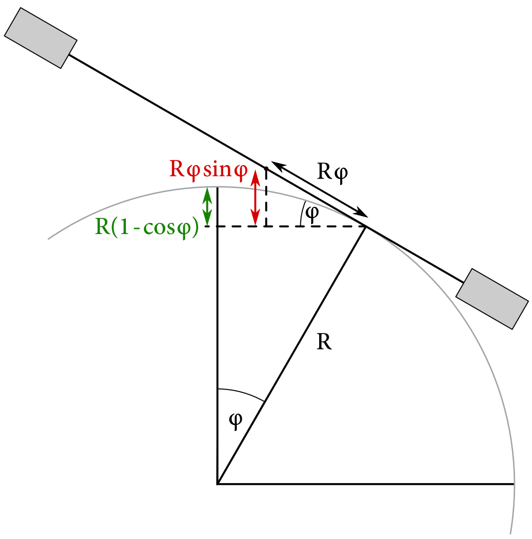
Energetický prístup

Ak sa nám podarí vyjadriť celkovú energiu nášho objektu v tvare

$$E = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{2}\beta \dot{x}^2,$$

kde x je nejaká súradnica a $\dot{x}$ je rýchlosť vzhľadom na túto súradnicu, vieme, že objekt vykonáva kmitavý pohyb s periódou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$



Obrázok 6: *Simonov hrudník so zakreslenými pôsobiacimi silami*

Jednoduché, však? Stačí vyjadriť tú energiu. S tým nám pomôže obrázok. Uhol medzi vertikálou a bodom dotyku činky s hrudníkom sme nazvali φ. Ťažisko činky je v jej strede a z obrázka ihneď vidno, že potenciálna energia je

$$U = 2mg(R\varphi \sin\varphi - R(1 - \cos\varphi)).$$

A teraz kinetická. Tu využijeme vedomosť starých materí, že kinetická energia sa dá vyjadriť viacerými možnými spôsobmi, ktoré sú ekvivalentné a všetky vedú k správnemu výsledku. Napríklad sa vieme pozerať na dve závažia na činke ako dva hmotné body a brať len posuvnú energiu. Alebo ju môžme vyjadriť ako rotačnú energiu okolo ťažiska + posuvná energia ťažiska.

Tretím spôsobom je vyjadriť energiu ako čistú rotáciu okolo okamžitej osi otáčania. Tieto tri spôsoby vždy povedú k správnemu výsledku a líšia sa len jednoduchosťou použitia pre tú-ktorú konkrétnu situáciu.[7] V tomto prípade je najľahší spôsob číslo tri. Okamžitá os otáčania je taká os, ktorá má v danom momente nulovú

[7] Preto si skúste ako cvičenie vyjadriť energiu pomocou všetkých troch spôsobov, aby ste videli, že naozaj dajú rovnaký výsledok!

rýchlosť. V našom prípade je to bod dotyku činky s hrudníkom. A keďže uhol φ medzi týmto bodom a vertikálou je rovnaký, ako uhol činky s horizontálou, sú rovnaké aj ich uhlové rýchlosti $\dot{\varphi}$. Preto je kinetická energia

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{L}{2} + R\varphi\right)^2 + \left(\frac{L}{2} - R\varphi\right)^2\right)\dot{\varphi}^2 = m\left(\frac{L^2}{4} + R^2\varphi^2\right)\dot{\varphi}^2.$$

No a čo teraz? Energia je v tvare aký by sme chceli neni. Sú tam nadbytočné sínusy a kosínusy a tiež je tam člen $R^2\varphi^2\dot{\varphi}^2$. Sínusov a kosínusov sa zbavíme ľahko, keďže ich pre malé kmity môžeme aproximovať ako $\sin\varphi \approx \varphi$ a $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$. Ale čo tamten škaredý člen, ako sa ho zbaviť? Môžeme jednoducho povedať, že je neni? Odpoveď je áno. Prečo?

Vieme, že pri kmitavom pohybe sa periodicky energia telesa premieňa z potenciálnej na kinetickú. V maximálnej výchylke má teleso len potenciálnu a pri prechode cez rovnovážnu polohu rovnaké množstvo kinetickej. Pokiaľ sa obmedzíme len na malé výchylky, znamená to, že aj potenciálna energia v maximálnej výchylke je malá a preto je malá aj maximálna možná hodnota kinetickej energie a teda aj rýchlosti! Takže člen rádu $\varphi^2\dot{\varphi}^2$ je skutočne zanedbateľný oproti členom rádu φ^2 alebo $\dot{\varphi}^2$. Ak teda využijeme spomenuté aproximácie, pre celkovú energiu dostávame

$$E \approx mgR\varphi^2 + m\frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2$$

a perióda je

$$T = \pi\frac{L}{\sqrt{gR}}.$$

Poznámka k energetickému prístupu

Prečo to tak funguje? Pre toto: ak napíšeme energiu do tvaru

$$E = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{2}\beta\dot{x}^2$$

a zderivujeme podľa času obe strany rovnice, na ľavej strane zostane nula, keďže energia je v čase konštantná. A na pravej strane

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\alpha x^2 = \alpha x\dot{x}, \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\beta\dot{x}^2 = \beta\dot{x}\ddot{x}.$$

Teraz $\dot{x}$ vypadne a dostávame rovnicu harmonických kmitov

$$\alpha x + \beta\ddot{x} = 0,$$

ktorých perióda je samozrejme $2\pi\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$.