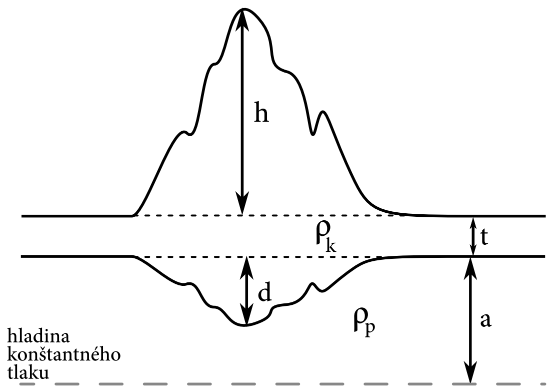
Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Modelový problém

vzorák **Jaro**, opravovala **Majka**

Začnime tým, že si vyjasníme, ako vyzerajú vrchné vrstvy zemského telesa. Najvrchnejšou vrstvou Zeme je litosféra, ktorá pozostáva z niekoľkých litosférických dosiek. Litosféra zahŕňa zemskú kôru a vrchnú časť plášťa. Jej priemerná hustota je ρ_k. Litosféra sa veľmi pomaly pohybuje po astenosfére, čo je čiastočne natavená vrstva plášťa s hustotou ρ_p.

To, čo nám zadanie hovorí bez toho, aby nám to povedalo priamo, je, že máme uvažovať Airyho model litosféry. Ten, ako bolo povedané, predpokladá, že od istej hĺbky v zemskom plášti je v nejakej pevne zvolenej hĺbke konštantný tlak nezávislý na geografickej polohe miesta nad týmto bodom.



Obrázok 1: *Airyho model litosféry*

Uvažujme litosférickú dosku hrúbky t. Zvoľme si hladinu konštantného tlaku, ktorá leží v hĺbke a pod rozhraním litosféra–astenosféra. To znamená, že v tejto hĺbke je tlak

$$p_{\text{rovina}} = t\rho_k g + a\rho_p g.$$

Teraz uvažujme, že časť litosférickej dosky je zvrásnená a vrchol pohoria siaha do výšky h nad zvyšok dosky. To ale znamená, že pohorie tlačí svojou tiažou, no a táto extra hmota vyvíja dodatočný tlak. Aby teda v uvažovanej hĺbke bol všade rovnaký tlak, musí byť niekde pod pohorím oblasť s menšou hustotou než na rovnakom mieste pod nezvrásnenou doskou. To je príčinou, prečo sa litosférická doska prehne do astenosféry.

Nech doska pod pohorím siaha do hĺbky d pod úroveň rozhrania litosféry a astenosféry mimo pohoria. Potom tlak v uvažovanej hĺbke pod pohorím je

$$p_{\text{pohorie}} = h\rho_k g + t\rho_k g + d\rho_k g + (a - d)\,\rho_p g.$$

Toto prirodzene platí pre každý bod pod pohorím, pričom h predstavuje výšku pohoria presne nad týmto bodom. Avšak nás zaujíma najväčšia hĺbka koreňa, no a tú doska dosahuje neprekvapivo pod najvyšším bodom, preto za h berieme výšku najvyššieho vrchu pohoria.

Teraz nám už nič nebráni v tom dať nájdené tlaky mimo pohoria a pod pohorím do rovnosti. Členy, ktoré sú v oboch výrazoch, vypadnú a my môžeme vyjadriť neznámu hĺbku "koreňa" pohoria

$$d = \frac{\rho_k}{\rho_p - \rho_k} h.$$

Pre zaujímavosť môžeme odhadnúť hĺbku „koreňa" Himalájí. Priemerná hustota zemskej kôry je približne $\rho_k = 2700\ \mathrm{kgm^{-3}}$ a hustota plášťa $\rho_p = 3500\ \mathrm{kgm^{-3}}$. Himaláje sú vysoké zhruba $h = 8\ \mathrm{km}$, čo dáva hĺbku „koreňa" $d = 27\ \mathrm{km}$. To je v súlade s tým, čo nás učili na hodinách geografie – kontinentálna kôra je hrubá zhruba 35 km, no pod pohoriami to môže byť až 70 km.

Komentár k riešeniam

Veľa z vás pristupovalo k úlohe z pohľadu síl. Vychádzali ste pritom z rovnosti vztlakovej a tiažovej sily. Napriek tomu, že tento prístup je správny, často ste sa dopracovali k nesprávnemu výsledku. V čom bol teda problém?

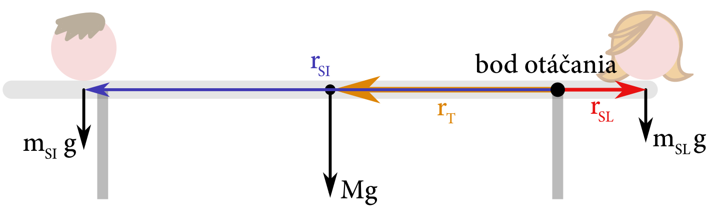
Uvažovali ste nasledovne. Keď sa „koreň" ponorí do plášťa, bude naň pôsobiť vztlaková sila $F_{\mathrm{vz}} = Sd\rho_p g$, ktorá kompenzuje tiaž pohoria $F_{\mathrm{G,hora}} = Sh\rho_k g$. Z rovnosti týchto dvoch síl ste dostali hĺbku „koreňa" $d = \frac{\rho_k}{\rho_p} h$, čo je nesprávne. Zabudli ste totiž, že aj samotný „koreň" má istú hmotnosť, preto aj naň pôsobí tiažová sila $F_{\mathrm{G,koreň}} = Sd\rho_k g$. Keď do rovnice pre rovnováhu síl pridáte aj tú, dostanete rovnaký výsledok, ako dáva prístup cez hydrostatický tlak $d = \frac{\rho_k}{\rho_p - \rho_k} h$.

Ešte poznamenajme, že rozdiel hustôt v menovateli nie je prekvapivý. Miesto, kde sa nachádza „koreň", pôvodne vypĺňal materiál plášťa, takže tam ubudla hmotnosť $Sd(\rho_p - \rho_k)$. Na druhej strane však pribudla hmotnosť pohoria $Sh\rho_k$. Aby sa tlak pod pohorím nezmenil oproti tlaku pod rovinou, nesmieme pridať ani odobrať žiadnu hmotnosť, preto musia byť tieto dve hmotnosti rovnaké, čo je úplne konzistentné s riešením.

1.2 Romantický moment

vzorák **Denda** a **Simon**, opravoval **Simon**

Pretransformujme zadanie do jazyka fyziky. Tiaž Simona, slečny, ale aj samotnej lavičky vytvára vzhľadom na pravý oporný bod nenulové momenty síl. Spomeňme si, že veľkosť momentu sily vypočítame ako súčin veľkosti pôsobiacej sily a ramena sily. Rameno je jednoducho kolmá vzdialenosť od pôsobiska sily k osi otáčania. Je teda zrejmé, že ak moment sily od slečny M_{SL}, usilujúci sa lavičku preväžiť, prekoná súčet momentov síl od Simona M_{SI} a lavičky[1] M_{T}, ktoré tejto snahe odporujú, lavička sa preváži. Takže chceme zistiť, pre akú vzdialenosť Simona od slečny d nastane rovnosť týchto momentov – pre akékoľvek menšie d sa už lavička preváži.



Obrázok 2: *Sily a ramená síl.*

Začnime teda s výpočtom:

$$M_{\mathrm{SL}} = M_{\mathrm{SI}} + M_{\mathrm{T}},$$

$$m_{\mathrm{SL}} g r_{\mathrm{SL}} = m_{\mathrm{SI}} g r_{\mathrm{SI}} + M g r_{\mathrm{T}}.$$

[1] Uvažujeme moment sily od jej ťažiska. Prečo to môžeme spraviť, zdôvodníme na konci riešenia.

Nakoľko lavička je osovo súmerná, horizontálna vzdialenosť ťažiska od osi rotácie je $r_\mathrm{T} = D/2$. Pre jednoduchosť uvažujme, že slečna sedí tak, že jej ťažisko je nad okrajom lavičky.[2] Dĺžka ramena je $\frac{L-D}{2}$, a teda $r_\mathrm{SL} = \frac{L-D}{2}$ a $r_\mathrm{SI} = d - \frac{L-D}{2}$. Zostáva už len dosadiť

$$m_\mathrm{SL} g \frac{L-D}{2} = m_\mathrm{SI} g \left(d - \frac{L-D}{2} \right) + Mg\frac{D}{2}$$

a vyjadriť d

$$d = \frac{\frac{L-D}{2} g \left(m_\mathrm{SL} + m_\mathrm{SI} \right) - Mg\frac{D}{2}}{m_\mathrm{SI} g} = \frac{L \left(m_\mathrm{SL} + m_\mathrm{SI} \right) - D \left(M + m_\mathrm{SL} + m_\mathrm{SI} \right)}{2 m_\mathrm{SI}} .$$

Takže v momente, keď Simon prekoná kritickú vzdialenosť

$$d = \frac{L \left(m_\mathrm{SL} + m_\mathrm{SI} \right) - D \left(M + m_\mathrm{SL} + m_\mathrm{SI} \right)}{2 m_\mathrm{SI}} ,$$

spolu so slečnou sa z lavičky zosypú.

Poznámka pre hĺbavé typy

Mnohí z vás pri riešení delili lavičku na časť naľavo od osi otáčania a napravo od osi otáčania a uvažovali momenty od oboch častí oddelene. Ak budete čítať ďalej, zistíte, prečo je v poriadku uvažovať moment sily od ťažiska, aj keď časť lavičky sa nachádza naľavo a časť napravo od osi rotácie. Celkový moment sily lavičky sa dá vypočítať tak, že rozdelíme lavičku na veľa maličkých častí s polohami x_i a hmotnosťami m_i[3] a celkový moment sily vypočítame ako súčet momentov sily od všetkých týchto častí. Takže ak poloha bodu otáčania je x_O, celkový moment sily bude

$$M_\mathrm{T} = \sum m_i g \left(x_i - x_\mathrm{O} \right) .$$

Keď si spomenieme na vzťah pre polohu ťažiska $x_T = \frac{\sum x_i m_i}{M}$, celkový moment sily môžeme upraviť na

$$M_\mathrm{T} = \sum m_i g \left(x_i - x_\mathrm{O} \right) = g \sum m_i x_i - g x_\mathrm{O} \sum m_i = Mg \frac{\sum x_i m_i}{M} - Mg x_\mathrm{O} = Mg \left(x_\mathrm{T} - x_\mathrm{O} \right) ,$$

čo nie je nič iné ako moment sily od ťažiska. Takže ak poznáme polohu ťažiska, celý výpočet si môžeme uľahčiť bez akéhokoľvek porušovania fyziky.

1.3 Keď gule nestačia

vzorák **MaťoB**, opravovala **Plyš**

Zamyslime sa najprv, čo sa stane s loďou, keď raketa bude už niekde na polceste do vesmíru. Na začiatku loď pláva aj so stojacou raketou na svojej palube, a teda na to, aby sa udržala na hladine, musí byť ponorená väčšia časť lode ako v prípade, keď si loď pláva spokojne sama. Ak je raketa už ďaleko nad vodou, loď sa musí pohnúť smerom nahor oproti stavu, keď raketa pred štartom stála na palube lode. Dôvod je skrytý v jednoduchej rovnováhe síl a Archimedovom zákone[4].

Je to teda všetko? Raketa odletí, loď sa odľahčí a pohne sa smerom nahor? Nie! Pozrime sa pozornejšie na počiatočnú fázu, kedy raketa štartuje. Aby to bolo jednoduchšie, na chvíľu si odmyslime loď a presuňme sa na pevnú súš. Aby sa raketa „odlepila“ od zeme, na ňu musí smerom nahor pôsobiť sila väčšia ako tiažová sila.

[2] Alebo že jej šírka je vzhľadom na dĺžku ramena zanedbateľná.

[3] i-ta časť má hmotnosť m_i a polohu x_i

[4] Dúfam, že to nemusím bližšie zdôvodňovať, a všetci vieme, že čím je teleso ťažšie, tak tým väčší objem musí byť z neho ponorený, aby zostalo plávať na hladine

Ako to raketa docieli? Predstavme si, že raketa každých Δt sekúnd zo seba vypustí palivo s hmotnosťou Δm rýchlosťou v. Vo vzťažnej sústave spojenej s raketou, teda raketa vypustí za čas Δt palivo s hybnosťou $p_{\text{palivo}} = v\Delta m$. Keďže platí zákon zachovania hybnosti, raketa získa rovnako veľkú hybnosť, ale v opačnom smere ako letí palivo. To znamená, že za čas Δt, raketa zmení svoju hybnosť o $\Delta p = p_{\text{palivo}} = v\Delta m$. Na raketu potom pôsobí „vzletová" sila F

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{v\Delta m}{\Delta t}.$$

Na to, aby raketa vzlietla, musí byť táto sila väčšia ako tiažová sila, teda nutne $F > m_{\text{raketa}} g$.

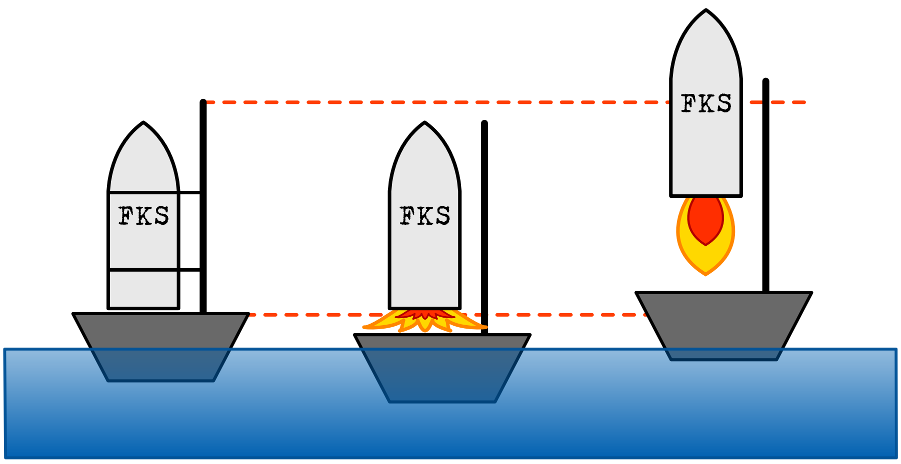
Pozrime sa na to, čo sa deje s prúdom horiacich plynov, ktorý letí od rakety smerom nadol rýchlosťou v a za každý kúsok Δt odnesie hybnosť $\Delta m \cdot v$. Pri štarte raketa stojí na mieste, a preto tesne po tom, ako sa zapnú motory rakety, začne tento prúd horiacich plynov tlačiť na podložku, na ktorej stojí raketa. Prúd horiacich plynov samozrejme cez podložku neprejde, preto musí zmeniť smer, ktorým prúdi, z vertikálneho na horizontálny. Keďže sa však zmení smer prúdu plynov, zmení sa aj jeho hybnosť. Zmenu hybnosti nemohol spôsobiť nik iný ako sama podložka, a teda na podložku musí podľa zákona akcie a reakcie tlačiť sila

$$F_{\text{podložka}} = \frac{v\Delta m}{\Delta t}.$$

Pozorný čitateľ si všimol, že sila $F_{\text{podložka}}$, ktorou prúd plynov tlačí na spodok odpaľovacej rampy, je rovnako veľká ako sila F, ktorá zabezpečuje vzlet rakety, a teda $F_{\text{podložka}} > m_{\text{raketa}} g$. To ale teda znamená, že tesne pri štarte tlačí raketa na loď väčšou silou ako len svojou tiažou! A teda tesne pri štarte sa musí loď pohnúť smerom nadol! Následne, kúsok potom ako sa odlepí od paluby lode raketa a prúd horiacich plynov neošľaháva palubu lode, sa celá loď pohne smerom nahor, a to tak, že nad hladinou lode bude jej väčšia časť ako na začiatku.

Ak mi neveríte, skúste sa doma postaviť na takú tú starú váhu a vyskočiť z nej. Uvidíte, že pri výskoku bude váha ukazovať väčšiu váhu, ako by zodpovedala vašej hmotnosti. Samozrejme, po tom ako pristanete vedľa uvidíte, že váha ukazuje nulu[5].

Celej predstave možno ešte pomôže obrázok, za ktorý ďakujem Plyšu :-)



Obrázok 3: *Štart rakety*

[5] V lepšom prípade niečo viac ako nulu a vy sa potešíte, že ste chudší, než ste si mysleli …

1.4 Fun fact na dnes

vzorák **Krtko**, opravoval **Krtko**

Pred tým ako začneme merať, vždy by sme sa mali zamyslieť nad tým, čo a akým spôsobom chceme merať. Takže najprv kúsok teórie. Guľové zrkadlo (náš mokrý dáždnik) sústreďuje v hrubom priblížení všetky rovnobežné lúče do ohniska. V našom prípade nemáme do činenia so svetelnými lúčmi, ale so zvukom. Bežné šošovky, zrkadlá, a podobne majú veľkosť rádovo väčšiu ako je vlnová dĺžka svetla, a to nám umožuje používať geometrickú optiku. Ak použijeme zvuk, dostávame sa do oblasti, kedy si už zahrá aj interferencia.

Navyše, vzhľadom na tvar dáždnika nebude ohniskom jeden bod, ale nejaká väčšia oblasť. Ako to však odmerať?

Teoretická metóda svetla

Pre svetlo je to jednoduchšie, to je jasne vidieť. Ak by sme mali dáždnik s hladkým povrchom, teoreticky by sa mal dať pokovovať. Zrazu by z neho bolo guľové zrkadlo aj pre svetlo a mohli by sme teda merať aj pomocou svetelných lúčov. Táto možnosť je však skôr teoretická ako praktická, keďže väčšina ľudí nemá doma nástroje na pokovovanie dáždnikov.

Realita so zvukom

Zvuk je zradný. Pred meraním si musíme uvedomiť, že rýchlosť zvuku je asi $v = 343\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ a teda ak budeme používať zvuk s frekvenciou, na ktorú je náš[6] mikrofón najviac citlivý $f = 1000\ \mathrm{Hz}$, vlnová dĺžka nášho zvuku bude

$$\lambda = \frac{343\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{1000\ \mathrm{Hz}} = 34{,}4\ \mathrm{cm}.$$

čo znamená, že pri meraní môžeme zaznamenať interferenciu jednotlivých vĺn. Preto sa oplatí merať viackrát s inou vzdialenosťou zdroja, aby sme mohli priemerom jednotlivých meraní odstrániť šum, ktorý nám takto vzniká.

Čím merať?

Dá sa použiť mobil, prípadne mikrofón pripojený k počítaču a ňom použiť Audacity. Vrelo však odporúčam použiť nejaký mikropočítač[7] a pripojiť naň malý mikrofón[8]. Túto možnosť som nakoniec zvolil aj ja. Nevýhoda je, že budete mať iba pomyselnú hodnotu od 0 po 1023 na Arduine[9], ktorá nie je nakalibrovaná na decibely. To nám však nevadí, pretože v ohnisku bude jednoducho väčšia hodnota.

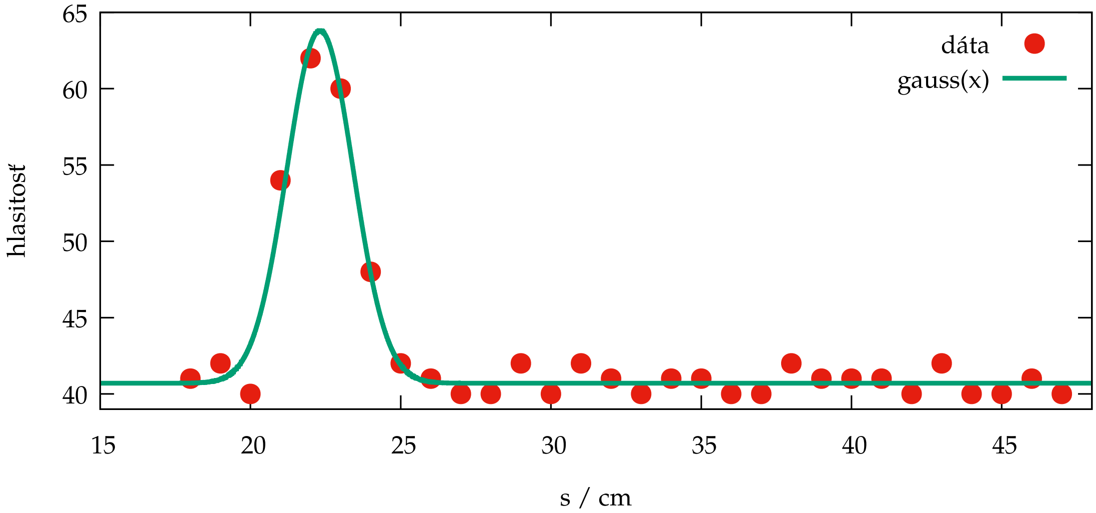
Rýchle meranie

Najväčším problémom tohoto merania je jeho rýchlosť. Mikrofón je totiž schopný zaznamenať celý priebeh vlny a nie iba maximum. Preto musíme počas každej periódy zrátať rozdiel medzi maximálnou a minimálnou nameranou hodnotou. Inak by nám mikrofón tvrdil, že hodnota neustále kolíše.

Postup

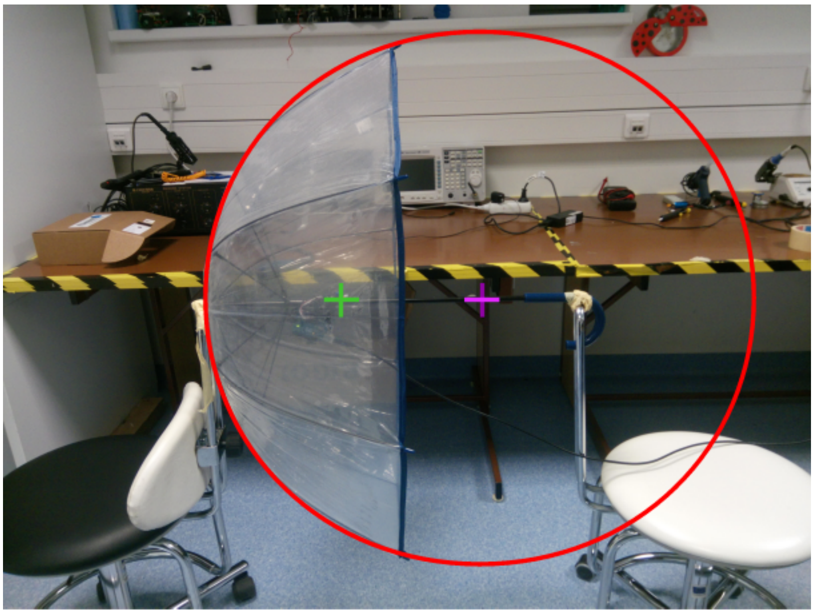
Ja som meral na každom centimetri dáždnika, väčšia presnosť je absolútne zbytočná, keďže aj samotný mikrofón má šírku 1 cm. Namerané dáta som vložil do grafu, a keďže hľadáme jedno maximum, môžeme dáta prekryť napríklad Gaussovou krivkou, ktorá nám odhalí vrchol. Ten sa nachádza okolo $22{,}3 \pm 1{,}1$ cm.

[6] teda môj
[7] napríklad Arduino alebo Nucleo, alebo čokoľvek iné
[8] ako ho zapojiť sa obvykle dozviete z datasheetu
[9] Prípadne od 0 po 4095 na nejakom STM.



Vizuálne overenie výsledku

Na záver by som doplnil ešte jeden spôsob, ako zistiť polohu ohniska dáždnika, a to geometricky. Je zrejmé, že ohnisko je niekde na osi. Ak si dáždnik odfotíme zboku a prekryjeme ho kružnicou[10], stred tejto kružnice (purpurový bod) ukazuje na stred krivosti a ohnisko (zelený bod) sa nachádza presne uprostred medzi ním a miestom, kde sa tyčka pripája k dáždniku[11]. Touto metódou nám vyšlo 21 cm, čo je taktiež veľmi slušný výsledok.



[10] Alebo parabolou, podľa jeho tvaru.
[11] To je zároveň bod, od ktorého rátame vzdialenosť.

1.5 Crash course slušného stolovania

vzorák **Jaro**, opravoval **MaťoB**

Nuž, aj vám sa zdala táto úloha akási jednoduchá? Veruže aj bola. Ak ste si uvedomili, čo sa v jednotlivých fázach pohybu deje, vystačili ste si s elementárnou mechanikou. Poďme teda na to.

Kľúčom k úspechu bolo rozdeliť si dej na dve etapy. V prvej fáze, kým sa obrus pohybuje pod tanierom, bude na tanier pôsobiť trecia sila konštantnej veľkosti od obrusu, ktorá ho urýchľuje. V momente, keď tanier opúšťa obrus, má už nejakú rýchlosť a začne naň pôsobiť trecia sila od stola, ktorá ho bude naopak spomaľovať.[12] Minimálnu potrebnú silu na vytiahnutie obrusa zrejme dostaneme, keď budeme uvažovať limitný prípad, v ktorom tanier zastane na opačnom konci stola. Keď už toto vieme, stačí nám nájsť príslušné zrýchlenia a dráhy, na ktorých prebiehajú jednotlivé fázy, a sme za vodou. Potom to už bude len o narábaní s rovničkami.

Uvažujme najskôr prvú fázu. Označme zrýchlenie obrusu a_1 a zrýchlenie taniera a_2. Na tanier pôsobí v horizontálnom smere len trecia sila od obrusu, preto

$$Ma_2 = f_2 Mg \quad \Rightarrow \quad a_2 = f_2 g.$$

Na obrus pôsobí okrem trecej sily od taniera ešte aj trecia sila od stola a sila, ktorou obrus ťaháme. Preto môžeme písať

$$ma_1 = F - f_2 Mg - f_1 \left(M + m\right) g \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{F}{m} - \left[f_2 \frac{M}{m} + f_1 \left(1 + \frac{M}{m}\right)\right] g.$$

Okamžite vidíme, že tak obrus ako i tanier sa pohybujú rovnomerne zrýchleným pohybom.

Nech tanier prejde dráhu $x = \frac{1}{2} a_2 t_1^2$ do momentu, kedy opustí obrus. Ľubovoľný bod obrusu musí za ten istý čas t_1 prejsť dráhu $L + x$, aby sa celý obrus dostal spod taniera. To znamená, že platí

$$L + \frac{1}{2} a_2 t_1^2 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2,$$

odkiaľ

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a_1 - a_2}}.$$

Vylúčením času z vyjadrenia dráhy dostaneme

$$x = \frac{a_2 L}{a_1 - a_2}$$

a pre rýchlosť taniera v momente opustenia obrusu platí

$$v = a_2 t_1 = a_2 \sqrt{\frac{2L}{a_1 - a_2}}.$$

[12] Predpokladáme, že tanier po obruse prešmykuje, čo znamená, že budeme narábať so šmykovým (dynamickým) trením. Keby tanier neprešmykoval, tak by sa vzhľadom na obrus nepohyboval a určite by skončil spolu s ním na podlahe.

Poďme teraz na druhú fázu pohybu. Tá je o poznanie jednoduchšia, lebo žiaden obrus v nej už nefiguruje. Na tanier pôsobí jedine trecia sila od stola proti smeru pohybu, ktorá ho spomaľuje. Možno teda písať[13]

$$Ma_3 = f_3 Mg \quad \Rightarrow \quad a_3 = f_3 g.$$

Tanieru zostáva do konca stola prešmýkať sa vzdialenosť $D - x$. Vzhľadom na to, že spomaľuje z rýchlosti v a na konci stola musí zastať, tak možno písať súbor rovníc

$$0 = v - a_3 t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{v}{a_3};$$

$$D - x = vt_2 - \frac{1}{2}a_3 t_2^2 = \frac{v^2}{2a_3}.$$

Vylúčením neznámych zrýchlení a dráhy x postupnými úpravami dostávame

$$D - \frac{a_2 L}{a_1 - a_2} = \frac{1}{2a_3} a_2^2 \frac{2L}{a_1 - a_2};$$

$$a_1 = a_2 \left(1 + \frac{L}{D} + \frac{a_2}{a_3}\frac{L}{D}\right) = f_2 g \left(1 + \frac{L}{D} + \frac{f_2}{f_3}\frac{L}{D}\right);$$

$$F = \left\{ f_1 (M + m) + f_2 \left[M + \left(1 + \frac{L}{D} + \frac{f_2}{f_3}\frac{L}{D}\right) m \right] \right\} g.$$

1.6 Útrapy mladých umelcov

vzorák **Dušan**, opravoval **Dušan**

Začnime najprv technikalitami. Keďže je nádoba symetrická, stačí sa obmedziť iba na pohyb do jedného smeru a skúmať, aké hodnoty môže nadobúdať veľkosť zrýchlenia. Minimálne zrýchlenie je úplne jasné, jeho hodnota je $a_{\min} = 0$. Stačí nám preto nájsť hodnotu maximálneho zrýchlenia $a_{\max}$, pri ktorom ešte hmotný bod z nádoby nevyletí.

K samotnému riešeniu možno pristupovať dvoma spôsobmi. Prvý, ťažký prístup, by bolo riešiť úlohu cez sily. V každom bode funkcie, ktorá popisuje nádobu, by sme museli vypočítať výslednicu gravitačnej a normálovej sily pôsobiacej na hmotný bod a následne hľadať podmienky stability… jednoducho fuj! Druhý, v tomto prípade stráviteľnejší prístup, vedie cez energie. Aj keď teraz to má malý háčik. Na prvý pohľad nevieme, akú energiu má zrýchľujúci hmotný bod. No keď sa na problém pozrieme (doslova) z iného uhla, môžeme si všimnúť, že zrýchľovanie vo vodorovnom smere spôsobuje pre hmotný bod efektívne gravitačné zrýchlenie veľkosti

$$g_{\text{eff}} = \sqrt{g^2 + a^2},$$

natočené pod uhlom

$$\alpha = \arctan \frac{a}{g}$$

oproti pôvodnému smeru.

[13] Za kladný smer sme si tentokrát zvolili opačný než v predošlom prípade, aby sme dostali kladné spomalenie taniera, čo nám umožní písať kinematické rovnice rovnomerne spomaleného pohybu v zaužívanej konvencii so znamienkom mínus a kladným spomalením.

Toto pozorovanie spolu s poznatkom, že všetky systémy minimalizujú svoju energiu, nás vedú k odpovedi na otázku, aká je hodnota $a_{\max}$. No je presne taká, že v natočenej súradnicovej sústave o uhol α prestáva pre hmotný bod existovať potenciálova jama v nádobe, ktorá by ho zadržala. Inak povedané, bude to vtedy, keď sa v natočenej sústave stane pôvodný bod $[0;0]$ tým „najvyšším“ bodom nádoby.[14]

Ako to teraz vypočítať? Keďže zadanie od nás nechce presný analytický výsledok, ukážeme si dva spôsoby, pri ktorých si pomôžeme múdrymi programami. Prvý spôsob je úplne bežný a druhý je pre fajnšmekrov, ktorí už majú isté skúsenost s deriváciami.

Binárne vyhľadávanie v grafickom programe

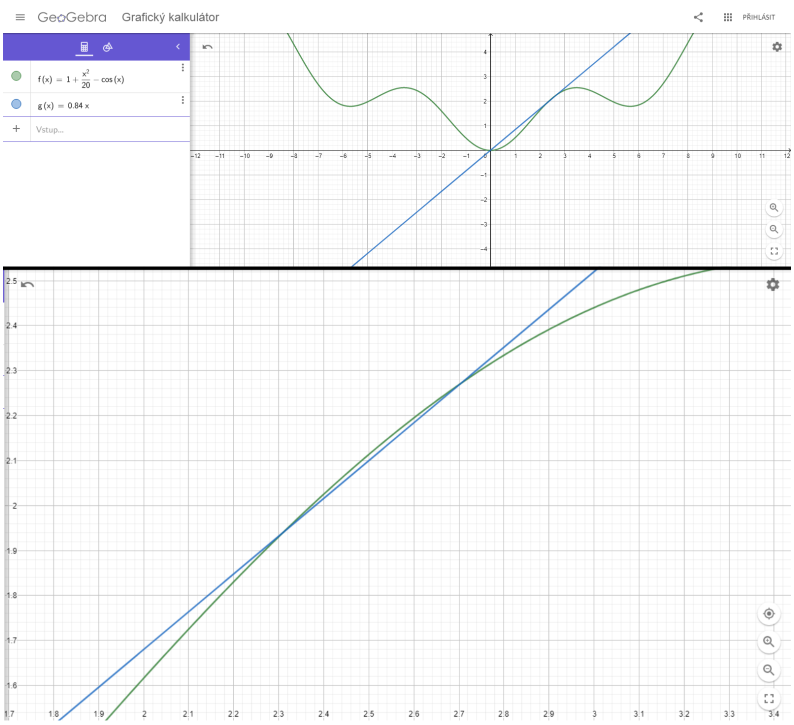
Z toho, čo bolo povedané, by malo byť jasné, že v pôvodnej súradnicovej sústave vieme hladinu nulovej energie zrýchľujúceho bodu popísať priamkou $\frac{a_{\max}}{g}x$. Teraz nám stačí nájsť iný ako nulový priesečník s krivkou popisúcou nádobu. Teda riešime rovnicu

$$L + \frac{x^2}{20L} - L\cos\frac{x}{L} = \frac{a_{\max}}{g}x$$

pre zrýchlenie $a_{\max}$.

Je to však rovnica o dvoch neznámych x a $a_{\max}$. Nezostáva nám nič iné, iba vykresliť si obe krivky v nejakom grafickom programe, napríklad GeoGebre, a meniť parameter $a_{\max}$, až po kým sa krivky nebudú dotýkať iba v jednom bode. Samozrejme, nejde to robiť inak ako formou pokus–omyl, prípadne binárnym vyhľadávaním medzi hodnotami, kde sa krivky pretínajú v dvoch bodoch alebo sa nepretínajú vôbec.

Postupným iterovaním dostaneme hodnotu $a_{\max} \doteq 0{,}845\,g$. A tým je úloha vyriešená.



Obrázok 4: *Takto pekne to vyzerá v GeoGebre. Hodnota x je v násobkoch L a $a_{\max}$ zas v násobkoch g. Vidíme, že pre hodnotu $a_{\max} = 0{,}84\,g$ sa krivky stále pretínajú v dvoch bodoch, ale je to blízko hľadanej hodnoty.*

[14] Samozrejme to je myslené iba v jednej polrovine.

Hľadanie lokálneho maxima

Na úlohu sa možno pozrieť aj tak, že bod, v ktorom sa krivky dotýkajú, má byť lokálnym maximom v otočenej sústave, respektíve má byť maximom vzhľadom na priamku $\frac{a_{\max}}{g}x$. To znamenená, že budeme derivovať a hľadať maximum, no treba si dať pozor na to, ako do toho zakomponovať podmienku s priamkou. To je však pomerne jednoduché, ten dotýkajúci sa bod musí byť maximom, aj keď od pôvodnej funkcie odčítame funkciu priamky. Máme teda dve rovnice o dvoch neznámych

$$L + \frac{x^2}{20L} - L\cos\frac{x}{L} - \frac{a_{\max}}{g}x = 0,$$

$$\frac{x}{10L} + \sin\frac{x}{L} - \frac{a_{\max}}{g} = 0.$$

To analyticky nespočítame, tak to dáme do nejakého múdreho programu, napríklad Wolframu Alpha alebo Mathematicy a dostaneme výsledok $a_{\max} \doteq 0{,}845\,46\,g$, čo je v zhode s tým predchádzajúcim.

1.7 Dotkni sa hviezd

vzorák **Kvík**, opravoval **Vladko**

Podľa neoficiálnych vyjadrení viacerých riešiteľov táto úloha vyzerala naskutku hrozivo. Úlohou vzoráku bude teda nielen vysvetliť, ako sa dala vyriešiť, ale aj presvedčiť vás, že až taká hrozná nebola. Na všetky tri prípady stačilo použiť zákon zachovania energie a zákon zachovania momentu hybnosti. Namiesto energie budeme hovoriť o špecifickej energii, teda energii na jednotku hmotnosti. Pre teleso s konštantnou hmotnosťou to v rovniciach nespraví žiadnu zmenu, akurát sa zbavíme jedného písmena m.

No ale moment. Raketa predsa z definície nie je telesom s konštatnou hmotnosťou, časť hmoty predsa zahadzuje za seba a tým sa urýchľuje vpred. Nás však tento mechanizmus zaujímať nebude, pretože impulzy pokladáme za veľmi krátke a naše rovnice budú hovoriť iba o tom, čo sa deje, keď sa raketa hýbe iba zotrvačnosťou. Navyše pre okamžité impulzy nebudeme ani musieť riešiť zložité diferenciálne rovnice – rýchlosť rakety sa bude meniť skokovo a nám ostane iba sčítať veľkosti týchto impulzov. Pre dostatočne krátke impulzy by sa úplné riešenie od nášho ani veľmi nelíšilo.

Zákon zachovania orbitálnej energie

Odvodíme si všeobecný vzťah medzi polohou, rýchlosťou a dráhou. Úloha sa dá dobre vyriešiť aj bez neho, ale s ním to ide trochu elegantnejšie. Ak motory práve nepracujú, špecifická energia telesa sa musí zachovávať. Nech sa teda pozrieme na ľubovoľné dva body na dráhe, energia musí byť rovnaká. Špecifická energia obiehajúceho telesa je vždy

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{kin}} + \varepsilon_{\mathrm{pot}} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}, \tag{1}$$

Ak to platí kdekoľvek, tak to platí aj v apogeu a v perigeu (ktoré si označíme ako Q a q), takže

$$\frac{v_q^2}{2} - \frac{GM}{q} = \varepsilon = \frac{v_Q^2}{2} - \frac{GM}{Q}.$$

Po preskupení výrazov za potenciálnu a za kinetickú energiu dostaneme

$$\frac{v_q^2}{2} - \frac{v_Q^2}{2} = \frac{GM}{q} - \frac{GM}{Q}. \tag{2}$$

Rýchlosti v_q a v_Q ale nie sú nezávislé, pretože moment hybnosti sa zachováva. Tu využijeme príjemný fakt, že v extrémoch dráhy sa teleso pohybuje kolmo na spojnicu so Zemou. Moment hybnosti je potom daný priamo súčinom vzdialenosti a rýchlosti. Platí teda

$$qv_q = Qv_Q,$$

odkiaľ vyjadríme napríklad

$$v_q = \frac{Q}{q} v_Q$$

a dosadíme do rovnice 2. Po úpravách dostaneme

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Q^2 - q^2}{q^2}\right) v_Q^2 = \frac{GM}{q} - \frac{GM}{Q}$$

a odtiaľ po zjednodušení vyjadríme energiu v apogeu

$$\frac{v_Q^2}{2} = GM\frac{q}{Q\,(q+Q)}.$$

Súčet vzdialeností $q + Q$ ale zodpovedá dĺžke celej hlavnej osi, čiže $2a$:

$$\frac{v_Q^2}{2} = GM\frac{2a - Q}{2aQ} = GM\left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{2a}\right).$$

Celková špecifická orbitálna energia v apogeu (a teda aj kdekoľvek inde) bude

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = \frac{v_Q^2}{2} - \frac{GM}{Q} = -\frac{GM}{2a}.$$

Ostáva nám toto dosadiť do všeobecného vyjadrenia 1 a dostaneme **rovnicu vis-viva**, čiže vzťah medzi okamžitou rýchlosťou v, vzdialenosťou od stredu r a hlavnou polosou a:

$$-\frac{GM}{2a} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{3}$$

Samozrejme, rovnica sa dá nájsť na internete a odvádzať ste si ju nemuseli. Odvodenie však nie je náročné.

Pomôcka: prvá kozmická rýchlosť

Vo všetkých prípadoch budeme potrebovať poznať rýchlosť, potrebnú na udržanie sa na orbite v tvare kružnice s polomerom r. Štandardným riešením je stotožniť dostredivú silu s gravitačnou, čo môžeme zapísať ako

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \tag{4}$$

Alternatívne môžeme použiť všeobecnejšiu rovnicu 3, kde dosadíme $r = a$ a dostaneme ten istý výsledok. Špeciálnym prípadom, ktorý neskôr viackrát využijeme, je prvá kozmická rýchlosť pre $r = R_\oplus$,

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_\oplus}} \doteq 7908\,\mathrm{m\,s^{-1}}. \tag{5}$$

Prvý prípad: zvislý štart a cirkularizácia orbity

Čo so zvislým štartom? Jednou možnosťou je použiť všeobecný zákon zachovania energie: na začiatku máme známu polohu a neznámu rýchlosť, na konci poznáme aj polohu, aj rýchlosť, ktorá musí byť zo zadania nulová. Druhou možnosťou je, ako inak, použiť našu známu rovnicu 3.

Jednou z jej zaujímavých vlastností je to, že nehovorí nič o smere pohybu – inak povedané, dĺžka hlavnej polosi nezávisí od uhla medzi vektorom rýchlosti a polohy. Teda hneď vieme povedať, že ak vyštartujeme z určitého bodu danou rýchlosťou, dĺžka hlavnej polosi bude rovnaká, nezávisle od smeru letu.[15] Pre štart zvislo nahor do vzdialenosti $\xi R_\oplus$ môžeme dosadiť $r = R_\oplus$, a hlavná os bude mať dĺžku $a = \frac{\xi R_\oplus}{2}$. Z rovnice 3 platí

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{R_\oplus} - \frac{1}{\frac{\xi R_\oplus}{2}}\right).$$

Pôvodná rýchlosť je nulová, takže impulz je rovný práve rýchlosti v:

$$\Delta v_{\mathrm{Ia}} = v = \sqrt{\frac{GM}{R_\oplus}\left(2 - \frac{2}{\xi}\right)}.$$

V momente, keď raketa zastane v najvyššom bode svojej dráhy, jej udelíme ďalší impulz – taký, aby výsledná dráha mala opäť tvar kružnice, čiže

$$\Delta v_{\mathrm{Ib}} = \sqrt{\frac{GM}{\xi R_\oplus}}.$$

Sčítaním dostávame celkový výsledok

$$\Delta v_{\mathrm{I}} = \Delta v_{\mathrm{Ia}} + \Delta v_{\mathrm{Ib}} = \left(\sqrt{2 - \frac{2}{\xi}} + \sqrt{\frac{1}{\xi}}\right) v_1.$$

Druhý prípad: Hohmannov transfer

Výpočet tu bude podobný, iba o trochu komplikovanejší. Rovnica 3 ale opäť spraví väčšinu práce za nás. Uvedomíme si, že prvé dva impulzy v zadaní vieme zlúčiť do jedného a vyletieť priamo na eliptickú orbitu. Táto prechodná dráha bude mať perigeum vo výške 0, čiže vo vzdialenosti $R_\oplus$, a apogeum vo výške h, čiže vo vzdialenosti $\xi R_\oplus$. Dĺžka hlavnej polosi bude – ako vždy – polovicou súčtu vzdialeností v apogeu a perigeu, čiže $a = \frac{Q+q}{2} = \frac{\xi+1}{2} R_\oplus$. Toto dosadíme do rovnice 3 a zistíme, že potrebná rýchlosť je

$$\Delta v_{\mathrm{IIab}} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R_\oplus} - \frac{2}{(\xi+1)\,R_\oplus}\right)} = \sqrt{\frac{2\xi}{\xi+1}}v_1.$$

V apogeu opäť zapneme motory, aby sme dosiahli „kružnicovú" rýchlosť $\sqrt{\frac{GM}{\xi R_\oplus}}$. Rýchlosť rakety tentokrát už nebude nulová, vieme ju však vypočítať – ako inak, než pomocou známej rovnice 3, do ktorej dosadíme rovnakú hlavnú polos a a novú vzdialenosť $r = \xi R_\oplus$. Odtiaľ

$$v_{\mathrm{II_Q}} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{\xi R_\oplus} - \frac{2}{(\xi+1)\,R_\oplus}\right)} = \sqrt{\frac{2}{\xi\,(\xi+1)}}v_1.$$

[15] Samozrejme len za predpokladu, že nepretneme povrch planéty. Potom budeme mať iné starosti.

Potrebný impulz je daný rozdielom „kružnicovej“ a skutočnej rýchlosti, čiže

$$\Delta v_{\mathrm{IIc}} = \sqrt{\frac{GM}{\xi R_\oplus}} - \sqrt{\frac{2}{\xi\left(\xi+1\right)}}\sqrt{\frac{GM}{R_\oplus}} = \left(\sqrt{\frac{1}{\xi}} - \sqrt{\frac{2}{\xi\left(\xi+1\right)}}\right)v_1.$$

Celkový impulz teda bude

$$\Delta v_{\mathrm{II}} = \Delta v_{\mathrm{IIab}} + \Delta v_{\mathrm{IIc}} = \left(\sqrt{\frac{2\xi}{\xi+1}} + \sqrt{\frac{1}{\xi}} - \sqrt{\frac{2}{\xi\left(\xi+1\right)}}\right)v_1.$$

Tretí prípad: bieliptický transfer

Táto metóda je najkomplikovanejšia, avšak ako uvidíme, za určitých okolností môže byť najlepšou. Prvou časťou sa nebudeme zdržiavať, pretože je podobná, ako v druhom prípade. Opäť môžeme štart a urýchlenie na vysokú orbitu zlúčiť do jediného impulzu. Rozdiel bude v tom, že keďže H je veľmi veľké, potrebný impulz bude takmer rovný druhej kozmickej rýchlosti, teda rýchlosti, ktorá raketu vynesie na parabolickú únikovú dráhu. Potrebnú rýchlosť môžeme spočítať buď cez energie, alebo opäť zo starej známej rovnice 3 a dostaneme

$$\Delta v_{\mathrm{IIIab}} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R_\oplus} - \frac{1}{H}\right)} \xrightarrow{H\to\infty} \sqrt{\frac{2GM}{R_\oplus}}.$$

Následne po veľmi dlhom čase raketa priletí do vzdialeného apogea a prakticky zastane, keďže pre $H \to \infty$ sa jej rýchlosť v apogeu limitne blíži k nule.

Čo s impulzom, ktorý potrebujeme v apogeu? Nuž, tu na nás číha drobná zrada. Aby sme zvýšili perigeum do výšky $\xi R_\oplus$, musíme zvýšiť rýchlosť natoľko, aby sa hlavná os $2a$ predĺžila na hodnotu $2R_\oplus + H + h$. Lenže naše H je obrovské, takže stačí aj veľmi malá zmena rýchlosti a výška perigea prudko porastie – kto neverí, môže si požadované hodnoty opäť skúsiť dosadiť do rovnice 3. Pre $H \to \infty$ bude teda tento impulz mať zanedbateľnú veľkosť

$$\Delta v_{\mathrm{IIIc}} \to 0.$$

Po ďalšom dlhom čakaní raketa dosiahne svoje perigeum. Zem ju ale bude priťahovať, takže jej rýchlosť bude opätovne narastať. Celková energia je v tomto prípade z definície nulová,[16] takže okamžitá rýchlosť bude vždy rovná únikovej. Aby raketa opäť neuletela do nekonečna, v okamihu prechodu perigeom sa musí otočiť proti smeru letu a intenzívne zabrzdiť. Veľkosť únikovej aj kruhovej rýchlosti vo výške $\xi R_\oplus$ sme už spočítali, a preto vieme povedať, že posledný potrebný impulz bude

$$\Delta v_{\mathrm{IIId}} = \sqrt{\frac{2GM}{\xi R_\oplus}} - \sqrt{\frac{GM}{\xi R_\oplus}} = \left(\sqrt{\frac{2}{\xi}} - \sqrt{\frac{1}{\xi}}\right)v_1$$

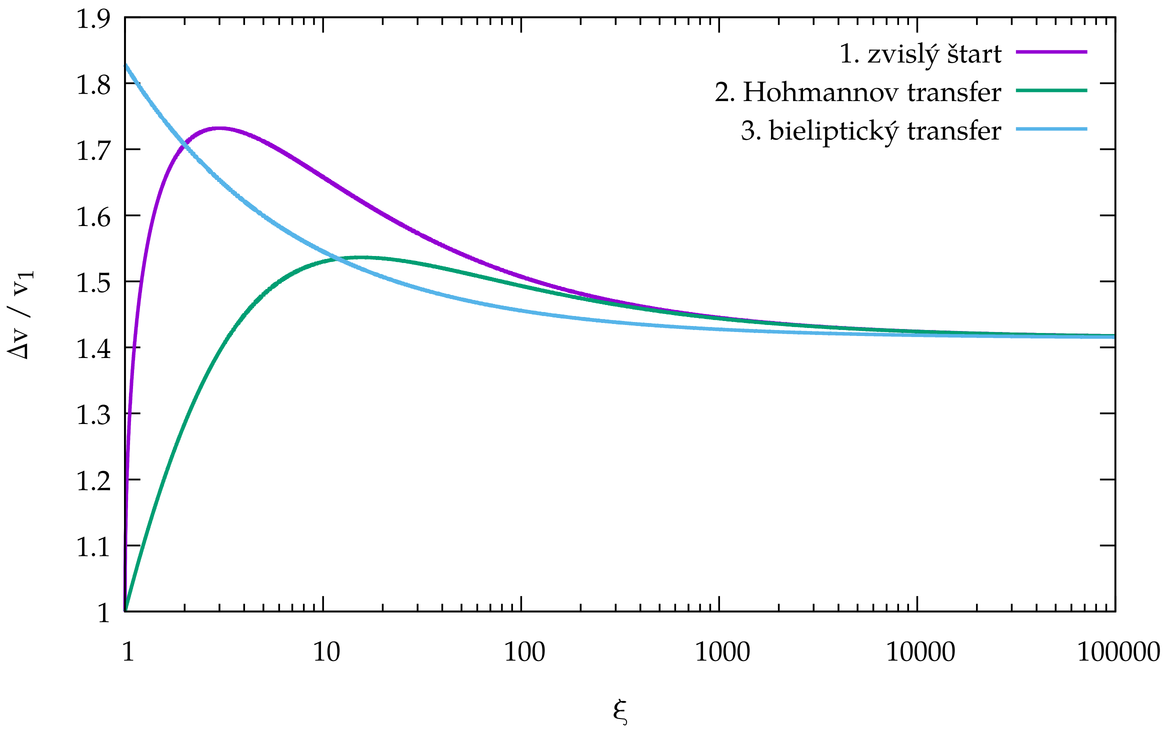
a teda celková potrebná zmena rýchlosti je

$$\Delta v_{\mathrm{II}} = \Delta v_{\mathrm{IIIab}} + \Delta v_{\mathrm{IIIc}} + \Delta v_{\mathrm{IIId}} = \left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{2}{\xi}} - \sqrt{\frac{1}{\xi}}\right)v_1.$$

[16] V nekonečnej vzdialenosti, teda „mimo“ gravitačného poľa, mala nulovú rýchlosť.

Záver

Uff. Nakoniec už len potrebujeme rozhodnúť, ktorá z našich metód je najlepšia. Nemalo by nás prekvapiť, že to môže závisieť od konkrétnej hodnoty $\xi \in [1; \infty]$. To vykonáme graficky, čiže si všetky tri funkcie nakreslíme – presnejšie povedané, ich bezrozmerné časti.



Hneď vidíme, že prvý prístup optimálny nebude nikdy, a výber medzi druhým a tretím závisí od požadovaného ξ. Ostáva nám vyriešiť hnusnú nerovnicu. Ak nie sme práve masochisti, necháme to nejakému programu, ktorý nám ochotne poradí, že medznou hodnotou je $\xi_0 \doteq 11{,}939$. Odpoveďou Vladkovi teda bude, že

- pre $h < 10{,}939 R_\oplus$ by mal použiť druhú metódu, čiže Hohmannov transfer,
- pre $h \geq 10{,}939 R_\oplus$ bude lepšou metódou tretia, zvaná bieliptický transfer.