Zadania 1. kola zimnej časti

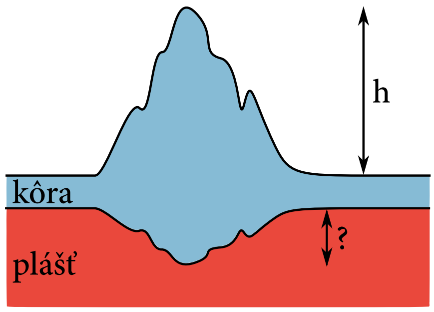
Termín odoslania 08. 10. 2018

1.1 Modelový problém

kategória **B0**

Peter, Pavel a Arthur objavili v babkinej pivnici celý balík plastelíny ešte z čias dávneho socializmu. Tak si z nej začali modelovať kadejaké veci. Všimli si, že rôzne sfarbenia plastelíny sú v rôznom štádiu rozkladu, a teda majú odlišné vlastnosti. Preto Pavel navrhol, že by si mohli vymodelovať zemeguľu na základe jedného z najjednoduchších fyzikálnych modelov zemského plášťa a kôry.

Ten predpokladá, že od istej hĺbky pod zemským povrchom tlak nezávisí od zemepisnej dĺžky ani šírky. Nakoľko chceli, aby ich model bol fyzikálne aj geograficky presný, povedali si, že vymodelujú aj pohoria. Dlho sa dohadovali na tom, ako hlboko by mal siahať „koreň“ (t. j. časť kôry pretŕčajúca do plášťa) hory výšky h, ak hustota plastelíny zvolenej pre kôru, respektíve plášť je ρ_k, ρ_p, $\rho_k < \rho_p$. Pokúste sa im s týmto problémom pomôcť.

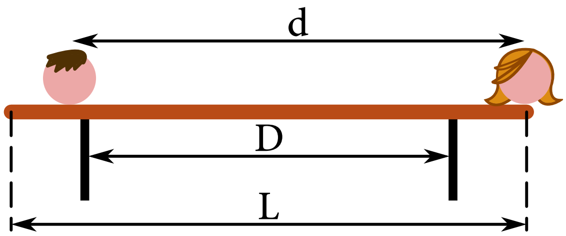


1.2 Romantický moment

kategória **B**

Simon si tak minule sedel na lavičke v parku, keď tu zrazu si k nemu prisadla veľmi atraktívna slečna. Chcel na ňu urobiť dojem veľmi známou baliacou fintou „vieš, že vzdialenosť odtiaľto sem je rovnaká ako odtiaľto sem¿, avšak nechcel ju svojím rýchlym postupom vyplašiť.

Preto sa k nej začal pomaly posúvať. Po istom čase sa však neprajná lavička prevážila na stranu a Simon aj so slečnou sa z nej zosypali. Kde na lavičke sa v tomto momente Simon hmotnosti m_{SI} nachádzal, ak si slečna s hmotnosťou m_{SL} sadla na opačný koniec lavičky? Lavička je osovo súmerná, má hmotnosť M, dĺžku L a rozostup oporných bodov D.



1.3 Keď gule nestačia
kategória **B**

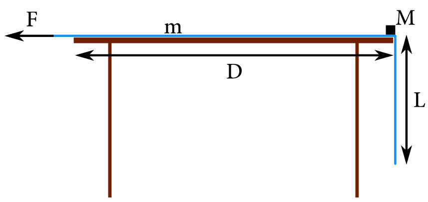
Fúzatý Kapitán Samašec sa rozhodol, že jeho loď nebudí dostatočný strach, ak dokáže strieľať iba delové gule. Veď to predsa vie hociktorá iná loď. Rozbehol preto odvážny projekt na výstavbu vertikálnej odpaľovacej rampy pre kozmické rakety. Aby kvôli novátorským vynálezom nedajbože neprišiel o svoju drahú loď, uistil sa, že vedenia projektu sa ujmú tí najlepší fyzici a technici z celého okolia. Fúzatý Kapitán Samašec má úlohu práve pre vás: Ako sa bude jeho loď hýbať počas štartu rakety?

1.4 Fun fact na dnes
kategórie **A** a **B**

Optika je síce fajn, ale časom začne nudiť snáď každého z nás. Určite to poznáte. Prinášame ale riešenie! Ako si obzvláštniť problematiku guľových zrkadiel? No predsa dáždnikom. Mokrý dáždnik sa totiž správa pre zvuk podobne ako guľové zrkadlo pre svetlo. Tento fakt vám určite spríjemnil dnešný deň, ale verím, že nik z vás sa neuspokojí bez jeho overenia. Zoberte si teda mokrý dáždnik a pokúste sa nájsť jeho ohnisko. Ak dáte do tohoto miesta ucho, mali by ste jasne počuť aj tichý zvuk.

1.5 Crash course slušného stolovania
kategórie **A** a **B**

Pamätá si ešte niekto Vilomeniny? To bola taká tá relácia, na konci ktorej vždy vyťahovali obrus zo stola spod kopy rozložených tanierov a snažili sa rozbiť čo najmenej. Tak si teraz predstavme tanier zanedbateľných rozmerov sediaci na obruse sediacom na stole, prevísajúcom o dĺžku L. Hmotnosť obrusu je m, hmotnosť taniera M, súčiniteľ šmykového trenia medzi stolom a obrusom f_1, medzi obrusom a tanierom f_2 a medzi tanierom a stolom f_3. Akou najmenšou silou by musel súťažiaci ťahať za obrus, aby tanier zostal na stole, ak pôvodne sedel (tanier, nie súťažiaci) na samom okraji stola?



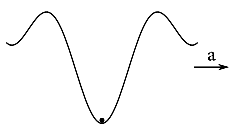
1.6 Útrapy mladých umelcov
kategória **A**

Justína sa v posledom čase cítila priam uchvátená majstrovskými kúskami antických hrnčiarov. Keďže umenie jej nie je cudzie, rozhodla sa, že vezme veci (a hlinu) do vlastných rúk a niečo si sama vyrobí. Chcelo to trochu cviku a trpezlivosti, ale nakoniec sa jej podarilo vyrobiť dokonalú nádobu, ktorej prierez sa dá popísať rovnicou

$$y = L + \frac{x^2}{20L} - L\cos\frac{x}{L},$$

kde $x \in \langle -6L; 6L \rangle$. Jej dielo ju tak tešilo, že si na dno uložila svoj obľúbený hmotný bod. Potom ale prišiel Kvík a potiahol nádobu vo vodorovnom smere so zrýchlením a, až sa hmotný bod z nádoby vysypal. Justína nebola nadšená a hneď začala Kvíkovi vysvetľovať, že musí ťahať zrýchlením takým a takým, aby jej drahý hmotný bod nevysypal. Pre aké hodnoty a to platí?

V tejto úlohe od vás nepožadujeme úplne presný (t. j. analytický) výsledok.



1.7 Dotkni sa hviezd

kategória **A**

Vladkovi prestalo stačiť fotografovanie nočnej oblohy pri dlhej expozícii. Chcel sa k nej priblížiť ešte viac a preto si len tak z pasie zostrojil malú raketu. Vladkove ambície siahajú vysoko – konkrétne do výšky h nad zemský povrch, do ktorej by chcel svoju raketu umiestniť na kruhovú dráhu. Vladko teraz dumá, aký celkový impulz bude potrebný v nasledujúcich situáciách:

1. Raketa najprv krátko zapne motory a naberie takú zvislú rýchlosť, aby zotrvačnosťou doletela práve do výšky h. Následne sa otočí vodorovne a ďalším impulzom zmení svoju dráhu na kruhovú.
2. Raketa najprv vyletí na kruhovú orbitu v zanedbateľnej výške. Potom krátkym impulzom zvýši svoju rýchlosť v smere letu tak, aby letela po elipse, ktorej apogeum (bod trajektórie najvzdialenejší od stredu Zeme) sa nachádza vo výške h. Po dosiahnutí apogea znovu krátko zapne motory, aby sa jej trajektória stala kružnicou s polomerom $h + R_{\oplus}$.
3. Raketa vyletí na čo najnižšiu kruhovú orbitu. Následne krátkym impulzom zvýši svoju rýchlosť tak, aby sa apogeum dostalo do veľmi veľkej vzdialenosti $H \gg R_{\oplus}$. Potom sladko zaspí a počká, až ju zotrvačnosť vynesie do apogea. Tam o máličko zrýchli, aby sa perigeum zdvihlo do požadovanej výšky h. Napokon opäť počká, až doletí do tohoto nového perigea, a prudko zabrzdí, aby sa jej orbita zmenila na kruhovú.

Samozrejme, Vladko by bol rád, keby bol celkový impulz čo najnižší. Vedeli by ste mu poradiť?

Kvôli jednoduchosti môžete výsledky vyjadrovať pomocou vzdialeností od stredu Zeme v ξ-násobkoch zemských polomerov, teda $h + R_{\oplus} = \xi R_{\oplus}$.