

Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Trpaslíci tlačíč a ťahač

vzorák Kai, opravovali Kai a Majka

Pozrime sa najprv na ťahanie lana cez kladku. Tretí Newtonov pohybový zákon (známy aj ako zákon akcie a reakcie) podľa Wikipédie znie:

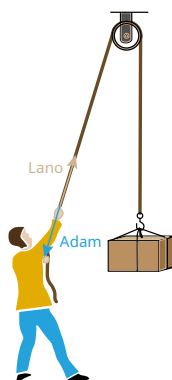
Dva hmotné body na seba pôsobia rovnako veľkými silami opačného smeru, ktoré súčasne vznikajú a súčasne zanikajú.

A ešte je doplnený:

Jedna zo síl sa nazýva sila akcie a druhá sa nazýva sila reakcie. Pritom účinky síl akcie a reakcie sa navzájom nerušia, pretože každá z týchto síl pôsobí na iné teleso.

Ak je pre teba tento zákon ťažko uchopiteľný, pozri nižšie na kapitolku **Tretí Newtonov zákon**.

Z toho vyplýva, že v momente ako Adam začne svojou rukou ťahať lano od jednoduchej kladky, bude lano rovnako veľkou silou ťahať aj Adama.



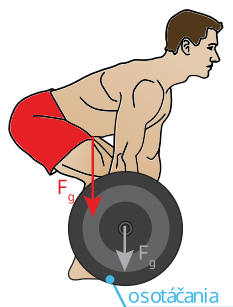
Obrázok 1.1.1: Adam ťahajúci za kladku

To znamená, že ak by za lano Adam potiahol silou väčšou ako je jeho vlastná tiaž, lano by ho vystrelilo hore. Preto teda Adam za lano nevie ťahať tak silno¹.

No a ako je to s tým vzpieračom? Existuje niečo, čo ho limituje? Keď vzpierač zdvíha činku, okrem jeho vlastnej tiaže naňho pôsobí ešte aj tiaž činky. Obe pôsobia smerom dole, takže tlaková sila podložky, ktorá

¹Ak ťa zaujíma, ktorá časť lana vlastne na toho Adama pôsobí a ako sa v tom lane tie sily správajú, pozri nižšie na kapitolku **Lano**.

ich bude kompenzovať, im bude skrátka rovná a bude pôsobiť smerom hore (pozor, tlaková sila podložky ale nie je reakčná k tiažovej, pozri kapitolku nižšie). Avšak to, na čo si vzpierač musí dať pozor je moment sily. Možno ste si všimli, že vzpierači zvyknú byť holeňou veľmi blízko pri činke a zadok majú od nej zas veľmi ďaleko. Je to preto, aby boli špičky ich nôh čo najbližšie k ťažisku činky a čo najďalej od ťažiska ich tela. Tak je väčšia šanca, že sa v dôsledku momentu sily „neotočia“ a nepadnú na nos.



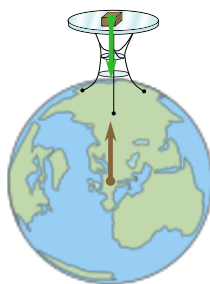
Obrázok 1.1.2: Vzpierač

Tretí Newtonov zákon

Tu sa pokúsime vysvetliť tretí Newtonov zákon trochu detailnejšie. Zoberme si kváder na stole. V tomto prípade máme určite prítomné aspoň dve dvojice akcií a reakcií - nazveme ich gravitačná dvojica síl a tlaková dvojica síl.

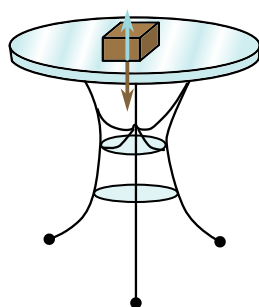
Kváder (prvý hmotný bod) je priťahovaný do stredu Zeme gravitačnou silou. Zem (druhý hmotný bod) je priťahovaná ku kváдру gravitačnou silou.

Schematicky môžeme túto dvojicu gravitačných síl zakresliť do obrázku takto:



Obrázok 1.1.3: Akcia a reakcia medzi kvádom a Zemou

Pre tlakové sily platí, že kváder (v dôsledku toho, že je priťahovaný gravitačnou silou k Zemi) pôsobí tlakovou silou na stôl. Stôl zas, na oplátku, pôsobí tlakovou silou na kváder:

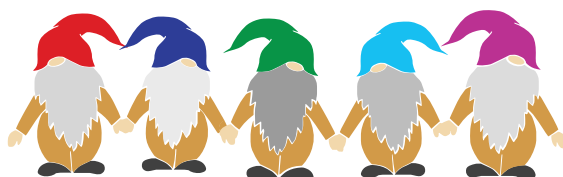


Obrázok 1.1.4: Akcia a reakcia medzi kvádom a stolom

Alternatívne vysvetlenie: Ak dávame niekomu facku, potom rovnako, ako toho niekoho bolí líce, bolí aj nás naša ruka. Lebo v momente nárazu nepôsobí len sila ruky na líce ale aj líce späť na ruku.] pre viac príkladov.

Lano

Inak, čo je vlastne to lano? Ako pôsobia sily v lane? Lano, to je vlastne veľa malých trpaslíkov, ktorí sa držia za ruky.



Obrázok 1.1.5: Trpaslíci v lane, ktorí netahajú

Takže, ak trošku potiahneme toho krajného, on potiahne toho vedľa seba, ten toho vedľa, a tak ďalej. To vlastne znamená, že ťahová sila v celom lane je všade rovnaká. A dokonca, podľa tretieho Newtonovho zákona pôsobí v každom bode do oboch smerov.



Obrázok 1.1.6: Trpaslíci v lane, ktorí ťahajú

1.2 Na kolesách

vzorák Jožura, opravovali Piškót a Ninka

Našou úlohou je zmerať, koľko energie sa disipuje, teda premení na inú formu, napríklad teplo, pri spustení sa z kopca na bicykli. Zamyslime sa najprv, aké energie má bicykel na vrchu kopca a na jeho spodku. Na vrchu má určite potenciálnu energiu. Tá sa mení na kinetickú tým, že naberať rýchlosť. Okrem toho máme rotačnú energiu kolies, tú si však dovoľíme zanedbať, keďže kinetická bicykla, na ktorom sedí človek je oveľa väčšia v porovnaní s ňou.

Aby sme zistili koľko energie sa disipuje, odčítame energiu na konci od energie na začiatku, a rozdiel je práve energia, ktorá sa premenila na iné formy. Teda odčítame od seba potenciálnu energiu na vrchu kopca (potenciálnu vzhľadom na spodok kopca) a kinetickú na konci kopca

$$E_p - E_k = mgh - \frac{1}{2}mv^2 = m\left(gh - \frac{1}{2}v^2\right).$$

Aby sme toto vedeli vypočítať, potrebujeme vedieť hmotnosť m (bicykel + človek) – tú musíme zmerať, g – to je konštanta, prevýšenie h , to zmeráme a rýchlosť na konci kopca, ktorú tiež musíme zmerať.

Máme teda tri veličiny, ktoré máme zmerať, tak poďme na to. Začnime s prevýšením. Prevýšenie by sa dalo zmerať sklonom kopca a jeho dĺžkou, ale použijeme radšej inú metódu. Využijeme barometer. Nebudeme ho však meniť s miestnymi za informáciu o prevýšení, keďže svoj barometer máme radi, ale radšej zmeriame prevýšenie pomocou barometrickej rovnice

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g \Delta h}{p_0}},$$

kde p_0 je začiatočný tlak, ρ_0 je hustota vzduchu, Δh je rozdiel výšok a p je tlak. Z toho vyjadríme výšku

$$\Delta h = \frac{p_0}{\rho_0 g} \ln\left(\frac{p_0}{p}\right).$$

Hustotu vieme vďaka rovnici ideálneho plynu nahradiť $\rho_0 = \frac{p_0}{RT}$, kde R je univerzálna plynová konštanta a T je teplota (teplotný rozdiel zanedbávame), čím dostaneme

$$\Delta h = \frac{RT}{g} \ln\left(\frac{p_0}{p}\right).$$

Pri malých výškových rozdieloch, ako tu, je $\frac{RT}{g}$ konštanta (uvažujeme, že teplota sa nám pri malom prevýšení nemení), mení sa nám iba tlak. Naš barometer si zapamätá počiatočný tlak a každú sekundu nám vypíše aktuálnu výšku po dosadení aktuálneho tlaku do rovnice. Ako barometer použijeme BMP280 senzor napojený na esp32. Zariadenie sme zapli na spodku kopca, čím sme nastavili začiatočný tlak p_0 , potom sme vyšli do výšky, odkiaľ sa spúšťame, a nechali sme zariadenie merať 45 hodnôt. Priemerne nám vyšiel výškový rozdiel 16,34 m so smerodajnou odchýlkou 0,09 m.

To by sme mali výškový rozdiel, poďme na meranie rýchlosti. Na to použijeme bicykel s tachometrom. Vyjdeme na vrch kopca, vždy na to isté miesto, v tomto prípade sa orientujeme pomocou stĺpu na vrchu kopca. Zdvihneme nohy a ideme dolu. Keď prejdeme okolo stĺpu na konci kopca, za obchodom remeselník, pozrieme sa na tachometer, zapamätáme si hodnotu, zastavíme a zapíšeme. Spustíme sa takto 10 krát. Odchýlku merania pri vzdialenosti na začiatku a na konci si dovoľíme zanedbať, keďže rýchlosť na konci kopca je už vcelku ustálená a nemení sa veľmi výrazne. Tu sú naše namerané hodnoty v km/h.

Meranie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Priemer	Sm. odchýlka
Rýchlosť (km/h)	46,8	46	46,3	46,3	46	45,5	45,3	45	45	45,6	45,8	0,6

Prepočet do m/s dá $45,8 \text{ km/h} \pm 0,6 \text{ km/h} = 12,72 \text{ m/s} \pm 0,17 \text{ m/s}$.

Ostáva nám zmerať už iba hmotnosť. Tú zmeriame klasickými váhami, bicykel cez závesnú digitálnu váhu, to nám vyšlo $(26,46 \pm 0,01) \text{ kg}$. Váhu človeka zmeriame klasickou váhou, bolo to $(94,2 \pm 0,1) \text{ kg}$.

A máme všetky merania za nami, môžeme ísť rátať to, čo chceme – koľko energie sa disipovalo. To zistíme rozdielom potenciálnej energie na začiatku a kinetickej na konci. Takže tak, ako sme ukázali na začiatku, chceme vypočítať

$$E_p - E_k = m \left(gh - \frac{1}{2} v^2 \right).$$

Dosaďme naše čísla $m = (m_c + m_b) = (94,2 \text{ kg} + 26,46 \text{ kg})$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $h = 16,34 \text{ m}$, $v = 12,72 \text{ m/s}$. Vyjde nám

$$E_p - E_k = (94,2 \text{ kg} + 26,46 \text{ kg}) \left(9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 16,34 \text{ m} - \frac{(12,72 \text{ m/s})^2}{2} \right) = 9579,95 \text{ J}.$$

Takýto výsledok nám však nestačí, lebo nám nehovorí o riešení všetko, čo by sme chceli vedieť. Nevieme totižto presnosť riešenia, kludne to môže byť niečo medzi 4 kJ až 14 kJ alebo 9 kJ až 10 kJ, nevieme. Preto ešte musíme spracovať naše odchýlky pri meraní. Na to použijeme postup šírenia chýb, dočítať o ňom sa dá napríklad v [tomto](#) vzoráku.

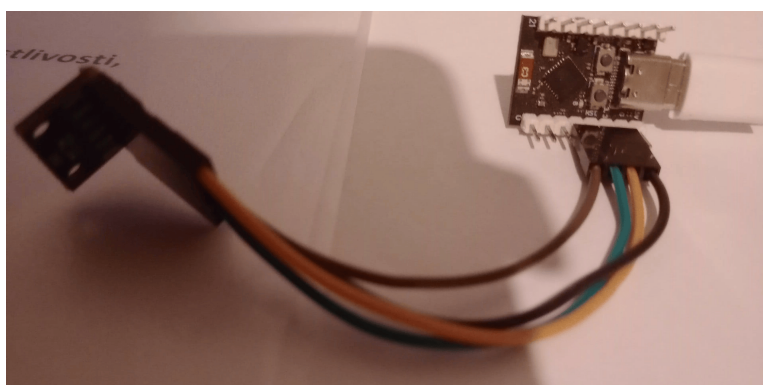
Podme na tie chyby postupne. Celková chyba pri súčte hmotností je súčet ich absolútnych chýb, teda $0,1 \text{ kg} + 0,01 \text{ kg} = 0,11 \text{ kg} \approx 0,1 \text{ kg}$. Keď máme rýchlosť na druhú, relatívna chyba (nie absolútna) sa násobí umocňovateľom, teda: $R_{err} = \frac{0,17}{12,72} \cdot 2 = 2,7 \%$ (to je chyba z $\frac{1}{2} v^2$). Teraz môžeme ísť na celé vnútro druhej zátvorky, tam sčítavame (resp. odčítavame) dve veličiny, pričom každá má určitú chybu, teda akurát sčítame ich absolútne odchýlky. Súčin hg má absolútnu odchýlku ako g -násobok absolútnej odchýlky prevýšenia, čiže $9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,09 \text{ m} = 0,88 \text{ m}^2/\text{s}^2$, absolútna odchýlka polovice rýchlosti na druhú je $0,027 \cdot \frac{1}{2} \cdot (12,72 \text{ m/s})^2 = 2,18 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ich súčet je $3,06 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Toto nám už iba stačí vynásobiť hmotnosťou, a máme to. Pri násobení chýb sčítavame relatívne odchýlky. Teda $\frac{0,1}{120,7} + \frac{3,06}{79,4} = 3,9 \%$. To je naša celková relatívna chyba. Keď chceme absolútnu, je to $0,039 \cdot 9579,95 \text{ J} = 377,1 \text{ J}$. Takže nám vyšiel výsledok $(9580,0 \pm 377,1) \text{ J}$.

Odchýlka nám vyšla na úrovni 3,9 % čo je akceptovateľné pri takomto meraní. Zistili sme, že pri jednom spustení sa stratí až 9 kJ energie, ktorá sa uvoľní vo forme tepla, kvôli pôsobeniu odporových síl. Celková potenciálna energia na vrchu kopca je $E_p = mgh = 116,4 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 16,34 \text{ m} \approx 19 \text{ kJ}$, takže sa stratí až polovica energie len kvôli nedokonalosti sveta. Patrílo by sa ešte spomenúť, kde sa táto energia disipuje. Disipuje sa vo forme tepla pri trení bicykla o zem, vnútorného trenia bicykla napríklad v ložiskách, alebo eko energia, ktorú prijme okolitý vzduch.

Takéto riešenie by však dostalo 0 bodov, chyba nám v ňom podstatná časť – obrázky, takže ešte prikladáme obrázky bicykla s tachometrom a zariadenia, ktoré meralo výšku.



Obrázok 1.2.1: Bicykel

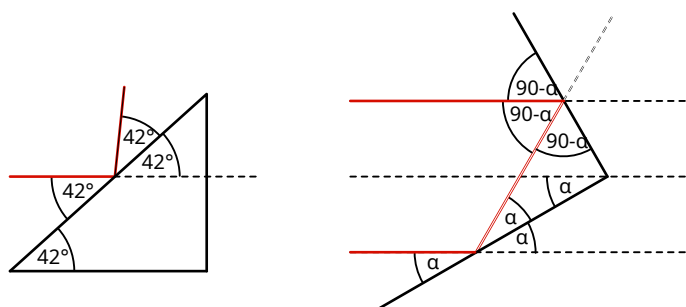


Obrázok 1.2.2: Meracie zariadenie

1.3 Úloha na rozptýlenie

vzorák MatusH, opravoval MatusH

Hneď pri prvom pohľade si uvedomíme, že pre terčiky 1), 2) a 3) vieme pomocou geometrie presne zrátať, kam sa guľôčky odrazia. Ak teraz uvažíme, že pre zrážku guľôčok platí rovnosť uhla dopadu a odrazu, dostaneme situáciu ako na obrázku 1.3.1. Z toho usúdime, že v prípade 1) guľôčka zmení smer o uhol $2 \cdot 42^\circ = 84^\circ$. V prípadoch 2) a 3) prvým odrazom zmení uhol o 2α a druhým o $2(90^\circ - \alpha)$. Teda v oboch prípadoch spolu o 180° . Preto prvé tri dvojice sú 1) – e, 2) – d, 3) – d.

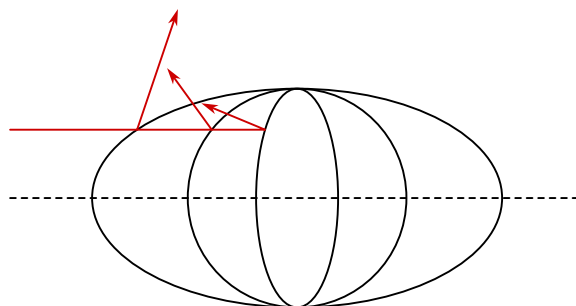


Obrázok 1.3.1: Geometria zrážok s terčikmi 1), 2) a 3)

Zvyšné tri prípady nevieme presne spočítať len pomocou stredoškolských znalostí fyziky, keďže guľôčky sa zrejme budú odrážať pod rôznymi uhlami, v závislosti od toho, kde do elipsy narazia². Pri všetkých troch možnostiach je zmysluplné očakávať, že nejaké guľôčky sa o terčík len tesne ošuchnú, a teda ich smer sa príliš nezmení. Tie skončia v priehradke s nízkym číslom. Rovnako ale očakávame, že guľôčka idúca takmer presne na stred terčíka sa odrazí naspäť. Takéto guľôčky naopak skončia v priehradkách s vysokým číslom 16, 17, 18. Prípady *d* a *e* môžeme teda spokojne vylúčiť. Tým ostávajú možnosti

- a* – viac sa odrazí pod väčším uhlom,
- b* – najviac sa odrazí do priehradky 5 a 6,
- c* – viac sa odrazí pod väčším uhlom ale strmšie,
- f* – odráža sa to symetricky a najviac pod uhlom približne 90° .

Keď sa zamyslíme nad rozdielom medzi terčikmi 4), 5) a 6) dôjdeme k záveru, že sú vlastne úplne rovnaké, až na ich sploštenie. Pre veľmi sploštený terčík 5) je teda menšia šanca, že guľôčka radikálne zmení svoj smer, než v prípade zvyšných dvoch terčíkov. Naopak, najväčšiu šancu odraziť guľôčku naspäť má terčík 6), lebo má najväčšiu plochu pripomínajúcu rovnú stenu. Pre terčík 4) môžeme povedať akurát toľko, že jeho výsledok bude na polceste medzi výsledkami pre 5) a 6). Tieto myšlienky sú zhrnuté v obrázku nižšie.



Obrázok 1.3.2: Kvalitatívne porovnanie rozptylu na terčíkoch 4), 5) a 6)

²Kružnica je len špeciálny prípad elipsy.

Na základe týchto úvah vieme určiť dvojice **4) – a, 5) – b a 6) – c**. Výsledok f teda nepatrí ani jednému terčíku. To sme mohli tušiť skôr, nakoľko výsledok f má symetriu, no žiadny terčík danú symetriu nemá.

1.4 Divná pružina

vzorák Šimon, opravoval Šimon

Periódou hmotného bodu na bežnej pružinke s nulovou pokojovou dĺžkou je

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Zo zadania vieme, že pružinka v tejto úlohe sa správa rovnako, ako bežná pružinka, práve vtedy, keď veľkosť jej výchylky je väčšia alebo rovná d . Pre veľkosť výchylky menšiu ako d pružina nepôsobí žiadnou silou.

To znamená, že po vychýlení na $x = D$ vieme pohyb počas jednej periódy rozdeliť na tri časti. Konkrétne na tri nasledujúce intervaly:

1. $x \in \langle d, D \rangle$ – závažie zrýchľuje v dôsledku sily $F = -k(x - d)$.
2. $x \in (-d, d)$ – na hmotný pod nepôsobí žiadna sila, takže sa celý čas pohybuje rovnakou rýchlosťou.
3. $x \in \langle -D, -d \rangle$ – závažie zrýchľuje³ v dôsledku sily $F = -k(x + d)$.

Keďže na prvom a treťom intervale sa pružinka správa rovnako, ako bežná pružinka s nulovou pokojovou dĺžkou, periódou kmitania na týchto dvoch intervaloch bude rovnaká, ako T_1 , ktoré už bolo spomenuté vyššie.

Na druhom intervale sa ale závažie pohybuje rovnomernou rýchlosťou, čo znamená, že k T_1 musíme ešte pripočítať čas, ktorý bude závažiu trvať dostať sa z $x = d$ do $x = -d$ a naspäť (periódou je pohyb tam aj späť). Skúsme teda vypočítať rýchlosť, ktorou závažie na tomto úseku pôjde. To spravíme jednoducho pomocou zákona zachovania energie. V $x = D$ má závažie nulovú rýchlosť, takže aj nulovú kinetickú energiu. Preto celková energia pre $x = D$ bude len potenciálna energia pružinky

$$E_D = \frac{1}{2}k(D - d)^2.$$

Naopak, v bode $x = d$ má závažie maximálnu rýchlosť, teda maximálnu kinetickú energiu, ale pružina nulovú potenciálnu energiu. Celková energia v bode $x = d$ teda bude

$$E_d = \frac{1}{2}mv^2.$$

Zo zákona zachovania energie dostaneme

$$E_D = E_d \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}k(D - d)^2 = \frac{1}{2}mv^2,$$

odkiaľ vieme vyjadriť v_0 ako

$$v = (D - d)\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

³Spomaľovanie je len zrýchľovanie so záporným zrýchlením.

Teraz zostáva už len vypočítať čas t , za ktorý sa závažie dostane z $x = d$ do $x = -d$, čo spravíme jednoducho ako

$$t = \frac{2d}{D-d} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

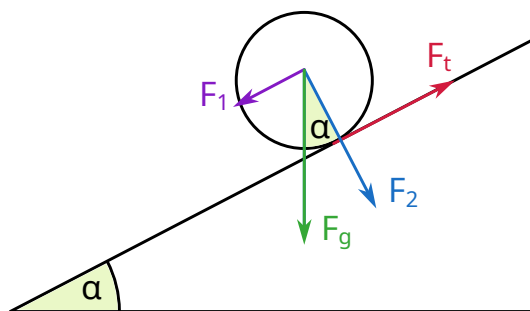
Závažie však za jednu periódu prejde túto vzdialenosť $2d$ dvakrát, takže celková perióda bude

$$T = T_1 + 2t = \sqrt{\frac{m}{k}} \left(2\pi + \frac{4d}{D-d} \right).$$

1.5 Valivé možnosti

vzorák Šimon, opravovala Soňa

Začnime tým, že si zakreslíme všetky sily pôsobiace na valec do obrázka. Tiažovú silu F_g rozložíme na $F_1 = F_g \sin \alpha$ a $F_2 = F_g \cos \alpha$.



Obrázok 1.5.1: Sily pôsobiace na valec

Ako prvý prípad uvažujme situáciu, keď je trenie nulové, t. j. $F_t = 0$ N. Potom pohybová rovnica v smere pohybu (dole po naklonenej rovine) je

$$ma = mg \sin \alpha.$$

V takejto situácii na valec nepôsobí žiadna sila, ktorá by spôsobovala jeho rotáciu (mala nenulový moment), a teda sa valec len šmýka smerom dole so zrýchlením $a = g \sin \alpha$.

Uvažujme ďalej treciu silu F_t , ktorá pôsobí proti pohybu. Veľkosť tejto sily je

$$F_t = f N,$$

kde N je normálová sila od naklonenej roviny a jej veľkosť je $N = F_2 = mg \cos \alpha$, takže

$$F_t = f mg \cos \alpha.$$

Pohybová rovnica v smere naklonenej roviny preto bude

$$ma = F_1 - F_t = mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad a = g \sin \alpha - f g \cos \alpha.$$

V tomto prípade ale na valec už pôsobí trecia sila vo vzdialenosti R od jeho osi otáčania, čoho dôsledok je moment sily $\tau = F_t R \sin \beta = f mg \cos \alpha$, kde β je uhol medzi polomerom a silou F_t . Keďže sú na seba kolmé

($\beta = 90^\circ$), tak $\tau = F_t R$. Momentová pohybová rovnica teda bude

$$I\varepsilon = \tau = fmgR \cos \alpha,$$

kde $I = mR^2$ je moment zotrvačnosti dutého valca a ε je uhlové zrýchlenie. Po dosadení a vyjadrení ε dostaneme

$$\varepsilon = \frac{f g \cos \alpha}{R}.$$

Zatiaľ sme vyriešili len situáciu bez trenia – vtedy sa valec len šmýka smerom dole a nekotúľa sa. Akonáhle však uvažujeme aj trenie, valec okrem šmýkania už aj rotuje. Nás zaujíma, kedy sa prestane šmýkať úplne, teda kedy sa jeho translačný a rotačný pohyb zladia tak, že bod valca, ktorý sa dotýka podložky, má nulovú rýchlosť (resp. nebude prešmykovať). Táto situácia nastane vtedy, keď sa veľkosť translačnej rýchlosti rovná veľkosti obvodovej rýchlosti, teda keď $v = \omega R$. Skúsme teda vypočítať, pre aký koeficient trenia f bude táto podmienka splnená.

Keďže aj zrýchlenie a aj uhlové zrýchlenie ε sú konštanty, rýchlosť a uhlovú rýchlosť dostaneme jednoducho tak, že zrýchlenia vynásobíme časom. Tieto rýchlosti potom sú

$$v = at = gt \sin \alpha - fgt \cos \alpha,$$

a

$$\omega = \varepsilon t = \frac{f g \cos \alpha}{R} t.$$

Z podmienky pre čisto rotačný pohyb $v = \omega R$ dostaneme

$$gt \sin \alpha - fgt \cos \alpha = fgt \cos \alpha.$$

A po úprave

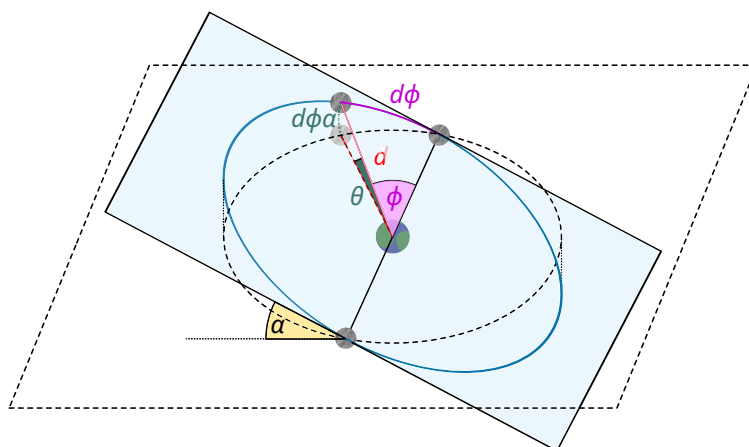
$$f_1 = \frac{1}{2} \tan \alpha \approx 0,289.$$

Pokiaľ je $f = 0$, valec sa po položení na naklonenú rovinu začne šmýkať dole. Ak $0 < f < f_1$, valec sa začne šmýkať, ale zároveň aj roztáčať, ale nikdy nedosiahne také hodnoty v a ω , aby sa len kotúľal. Ak je $f \geq f_1$, valec sa nebude vôbec šmýkať, bude sa už len kotúľať.

1.6 Dark times comin'

vzorák Jaro, opravovala Lucka

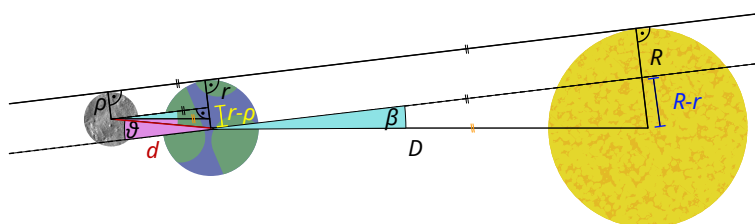
Uvažujme, že Mesiace obieha okolo Zeme po kruhovej orbite vo vzdialenosti $d \approx 3,84 \cdot 10^5$ km, ktorá je voči ekliptike sklonená pod uhlom $\alpha \approx 5^\circ$. K zatmeniu Slnka a Mesiaca môže dochádzať len v prípadoch, keď všetky tri telesá ležia na jednej priamke, alebo nanajvýš vychýlené od nej o nejaký malý uhol. Uvážiac naklonenosť orbity Mesiaca, je zrejmé, že k zatmeniam možno dochádzať len v miestach, kde orbita Mesiaca pretína ekliptiku, resp. v blízkosti týchto miest. Tieto body sú dva a nazývajú sa uzly. Ich spojnicou je uzlová priamka.



Obrázok 1.6.1: *Orbita Mesiaca voči ekliptike*

K zatmeniu Mesiaca dochádza, keď celý Mesiac vojde do tieňa Zeme. K zatmeniu Slnka na nejakom mieste Zeme dochádza vtedy, keď Mesiac prejde popred Slnko a vrhne svoj tieň na toto miesto na Zemi. Úlohu teda možno transformovať na to, o aký najväčší uhol od uzlovej priamky sa môže Mesiac vzdialiť, aby sa ešte mohol celý dostať do tieňa Zeme, resp. aby mohol vrhnúť svoj tieň niekam na povrch Zeme.

Označme si uhol meraný od uzlovej priamky v rovine orbity Mesiaca ϕ . Očakávame, že k zatmeniam bude dochádzať len v blízkosti uzlovej priamky, preto tento uhol bude malý. Rovnako malý je aj sklon orbity Mesiaca voči ekliptike, preto nám nič nebude brániť používať priblíženia $\sin \chi \approx \tan \chi \approx \chi$ a $\cos \chi \approx 1$. Ak je Mesiac vzdialený od uzlovej priamky o uhol ϕ , od uzla je potom vzdialený $d\phi$ a leží vo výške približne $d\phi\alpha$ nad rovinou ekliptiky. Uhol medzi ekliptikou a sprievodičom Mesiaca je vtedy približne $\vartheta \approx \frac{d\phi\alpha}{d} = \phi\alpha$.



Obrázok 1.6.2: *Zatmenie Mesiaca pri najväčšom možnom odklone φ*

Nech φ je maximálny uhol, pri ktorom môže dôjsť k zatmeniu Mesiaca, a nech tomuto uhlu zodpovedá uhol θ . V tejto situácii majú Slnko, Zem a Mesiac spoločnú dotyčnicu, ktorá je voči ekliptike sklonená pod uhlom β . Označme polomery Mesiaca, Zeme a Slnka postupne ρ , r a R a vzdialenosť Zeme od Slnka D . Potom z

geometrie situácie zobrazenej na obrázku možno písať

$$\sin(\beta + \theta) = \frac{r - \rho}{d};$$

$$\sin \beta = \frac{R - r}{D}.$$

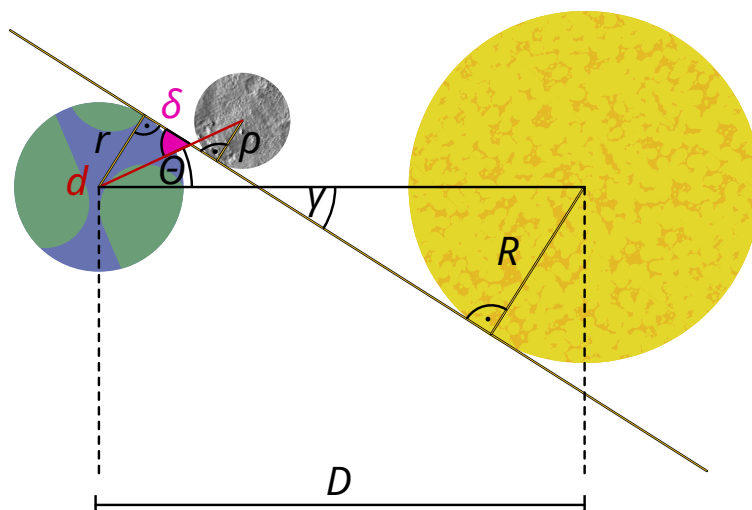
V priblížení malých uhlov

$$\beta + \theta \approx \frac{r - \rho}{d};$$

$$\beta \approx \frac{R - r}{D},$$

odkiaľ

$$\theta \approx \frac{r - \rho}{d} - \frac{R - r}{D}.$$



Obrázok 1.6.3: Najmenší odklon Φ , pri ktorom už nemôže dôjsť k zatmeniu Slnka

Teraz nech Φ je maximálny uhol, pri ktorom môže dôjsť k zatmeniu Slnka, a nech tomuto uhlu zodpovedá uhol Θ . Aj v tejto situácii majú Slnko, Zem a Mesiac spoločnú dotyčnicu, no rozdiel je v usporiadaní telies (Mesiac je uprostred) a v tom, že Zem leží na opačnej strane tejto dotyčnice než zvyšné dve telesá. Nech sklon dotyčnice voči ekliptike je γ a nech pretína sprievodič Mesiaca pod uhlom δ . Potom z geometrie situácie zobrazenej na obrázku možno písať

$$\begin{aligned} \frac{R}{\sin \gamma} + \frac{r}{\sin \gamma} &= D; & \Rightarrow & \sin \gamma = \frac{R + r}{D}; \\ \frac{r}{\sin \delta} + \frac{\rho}{\sin \delta} &= d, & \sin \delta &= \frac{r + \rho}{d}. \end{aligned}$$

Potom pre hľadaný uhol Θ platí

$$\Theta = (\pi - \gamma) - (\pi - \delta) = \delta - \gamma = \arcsin \frac{r + \rho}{d} - \arcsin \frac{R + r}{D} \approx \frac{r + \rho}{d} - \frac{R + r}{D}.$$

K zatmeniu Mesiaca môže dôjsť len vtedy, keď je Mesiac vychýlený nanajvýš o uhol φ od niektorého z uzlových bodov, teda len v časti $\frac{4\varphi}{2\pi}$ jeho orbity. Analogicky k zatmeniu Slnka môže dôjsť iba v časti $\frac{4\Phi}{2\pi}$ orbity Mesiaca. Keďže Mesiac sa po orbite pohybuje konštantnou uhlovou rýchlosťou a Slnko môže s rovnakou pravdepodobnosťou svietiť z ľubovoľného smeru v rovine ekliptiky, pomer početností zatmení Slnka a Mesiaca bude rovný pomeru veľkostí častí orbity Mesiaca, na ktorých môže dôjsť k týmto zatmeniam, teda

$$p = \frac{\Phi}{\varphi} \approx \frac{\alpha\Theta}{\alpha\theta} \approx \frac{\frac{r+\rho}{d} - \frac{R+r}{D}}{\frac{r-\rho}{d} - \frac{R-r}{D}} = \frac{D(r+\rho) - d(R+r)}{D(r-\rho) - d(R-r)}.$$

Pre $D \approx 1,5 \cdot 10^8$ km, $d \approx 3,84 \cdot 10^5$ km, $R \approx 7 \cdot 10^5$ km, $r \approx 6,4 \cdot 10^3$ km a $\rho \approx 1,74 \cdot 10^3$ km dostávame, že k zatmeniu Slnka (úplnému alebo prstencovému) dochádza na Zemi v priemere $p \approx 2,2$ -krát častejšie než k úplnému zatmeniu Mesiaca.

1.7 Adaptácia predátora

vzorák Marek, opravoval Marek

Čo pozoruje predátor?

Gazela si pokojne stojí pri napájadle a nerušene popíja vodu. Okrem toho vykonáva mnoho iných činností, napr. odráža svetlo zo Slnka alebo aj sama vyžaruje tepelné žiarenie. Budeme predpokladať, že sa išla napiť v noci (aby sme nemuseli uvažovať o vplyve slnečného svetla). Nič netušiaci gazela je z diaľky pozorovaná predátorom. Ako je možné, že ju vidí? Ako je zrejmé zo zadania, gazela emituje tepelné, teda infračervené žiarenie. Predátor má oko prispôbené na jeho detekciu a keď ho zachytí, znamená to, že vidí potenciálnu korisť. Ak chcete vedieť, aké je zastúpenie jednotlivých vlnových dĺžok v žiarení gazely, veľmi dobrý je model žiarenia čierneho telesa, o ktorom toho na internete nájdete veľmi veľa.

Ako popísať svetlo?

Svetlo v tejto úlohe budeme považovať za vlny šíriace sa voľným priestorom rýchlosťou $c \approx 300\,000$ km/s. Budeme predpokladať, že touto rýchlosťou sa šíri aj vo vzduchu (jeho absolútny index lomu je dostatočne blízky 1). Rôzne farby popíšeme rôznymi frekvenciami f , resp. vlnovými dĺžkami λ . Svetelnú vlnu si teda predstavíme tak, že ak spojíme priamkou zdroj (gazelu) a predátora, bude sa pozdĺž nej šíriť svetlo ako sínusoida daná predpisom $\sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)$, kde x je vzdialenosť od gazely a t čas, ako dlho sa vlna už šíri. Ako čelo vlny označme množinu bodov, kde táto funkcia nadobúda maximum. Rýchlosť svetla je rovnaká vo všetkých smeroch, čiže sa od gazely šíria sférické vlnoplochy. Mimochodom, čo to znamená, že svetlo sa pozdĺž priamky spojenej so zdrojom šíri ako sínusoida? V skutočnosti je možné v každom bode priestoru (a preto aj na priamke) zdefinovať vektor intenzity elektrického poľa. A práve tento vektor sa mení tak, ako keby opisoval sínus. Spolu s ním žije aj vektor magnetickej indukcie, ktorý je naň kolmý a správa sa podobne.

Vieme, že platí

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

teda že vlnová dĺžka je rovná vzdialenosti, ktorú svetlo s rýchlosťou c prejde za čas $T = \frac{1}{f}$, pričom tento čas voláme perióda. Riešenie uvádzame pomocou vlnových dĺžok a veríme, že prepočet na frekvencie zvládnete, ak sa Vám s nimi počíta lepšie.

Klasický Dopplerov jav

Vysvetlenie Dopplerovho javu nájdete napr. na [tomto odkaze](#) (ide síce o šírenie zvuku, no rovnice vyzerajú úplne rovnako). Tento jav pozorujeme tak, že frekvencia, resp. vlnová dĺžka, ktoré sa medzi sebou dajú ľahko prepočítať, je iná pre pohybujúceho sa a stojaceho (vzhľadom na zdroj) pozorovateľa. V uvedenom riešení sa od stojaceho pozorovateľa pohybuje zdroj, teraz to bude naopak. Dá sa ukázať (dôkaz je triviálny a nechávame ho ako cvičenie čitateľovi), že v takom prípade bude pre vlnové dĺžky platiť

$$\lambda_P = \lambda_G \frac{c - v}{c},$$

kde (a všade ďalej) dolný index P označuje veličinu pozorovanú predátorom (teraz vlnovú dĺžku, ktorú vidí) a G gazelou.

Infračervené žiarenie má vlnovú dĺžku od 700 nm do 1 mm (v niektorých učebniciach nájdete iné rozsahy, čo môže byť spôsobené tým, že autori ich neskôr použijú na niečo, kde im taký rozsah vyhovuje). Zelené svetlo má vlnové dĺžky 495 nm až 570 nm. Pretože vlnové dĺžky infračerveného žiarenia sú väčšie, môžeme povedať, že 570 nm je už zelená a 700 nm je ešte infračervená. Rozmyslite si, že keby sme ich posunuli ďalej od seba, bude potrebná väčšia rýchlosť predátora, aby sa vlnová dĺžka dostatočne zmenila.

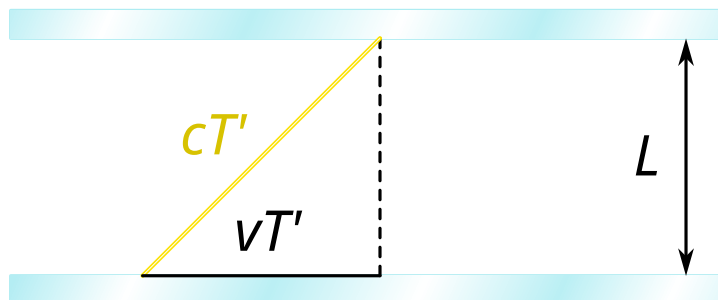
Zo vzťahu pre Dopplerov jav vyjadríme rýchlosť ako

$$v = \left(1 - \frac{\lambda_P}{\lambda_G}\right)c$$

a po dosadení zistíme, že $v \approx 55\,700$ km/s. Súč šťastní z pekného výsledku, dvakrát ho podčiarkneme a so spokojnosťou ho vyhlásime za rýchlosť predátora. Možno nám napadne, že táto rýchlosť je veľmi veľká, no pri menších nepozorujeme, že by predmety menili farbu, keď sa pohybujeme, tak dáva zmysel, že výsledok je veľmi veľký.

Zamyslime sa ešte raz. Aká rýchlosť nám vyšla? $v \approx 0,186c$, teda viac ako 18 % rýchlosti svetla! A to sa môže počítať pri takýchto rýchlostiach bez špeciálnej teórie relativity? Odpoveď získame, až keď to poriadne spočítame aj s ňou, hoci už teraz sa javí byť zvláštne, že nám vychádza relativistická rýchlosť z nerelativistického výpočtu.

Dilatácia času



Obrázok 1.7.1: Svetelné hodiny

V špeciálnej teórii relativity platí dôležitý predpoklad: rýchlosť svetla je rovnaká pre každého pozorovateľa. Inými slovami, ktokoľvek sa na svetlo pozerá, musí uznať, že sa pohybuje rýchlosťou c .

Predstavme si, že na chodník položíme vedľa seba niekoľko rôznych typov hodín, napr. slnečné, digitálne, ručičkové... Ak ich považujeme za presné a dobre nastavené, zhodneme sa, že všetky ukazujú rovnaký čas, čiže akýkoľvek typ hodín použijeme, mali by čas merať rovnako dobre (ako hodiny môžeme použiť ľubovoľný pravidelný jav). Takže fungovať budú aj tzv. svetelné hodiny. Vyzerajú ako dve rovnobežné zrkadlá (predstavte si, že jedno leží na zemi) umiestnené vo vzájomnej vzdialenosti L , medzi ktorými sa kolmo odráža svetlo. Pri každom „dotyku svetla“ so zrkadlom hodiny pípnu a pomocou týchto pípnutí môžeme merať čas, lebo sú pravidelné.

Teraz si predstavme veľmi rýchleho trpaslíka, ktorý sa vezie konštantnou rýchlosťou v električkou popri chodníku s hodinami. Čo vidí? Vidí, ako sa svetlo odráža hore a dolu. Lenže on sa hýbe, takže sa mu zdá, že svetlo nejde kolmo na zem, ale že je jeho dráha medzi pípnutiami sklonená (napr. keby na okno električky nakreslil štvorcovú mriežku a zakresľoval do nej polohu svetla, nech už to znamená čokoľvek, pohybovalo by sa nie len hore a dolu, ale aj opačným smerom ako električka).

Povedzme, že medzi dvomi pípnutiami hodín meranými z chodníka uplynie čas T , t. j. $L = cT$. Trpaslík z električky nameria T' . Rovnajú sa tieto časy? Nezabúdajme, že rýchlosť svetla sa nezmení tým, že nastúpime do dopravného prostriedku.

Z Pytagorovej vety dostaneme

$$cT' = \sqrt{(vT')^2 + L^2} = \sqrt{(vT')^2 + (cT)^2}.$$

Po pár úpravách máme

$$T'^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = T^2,$$

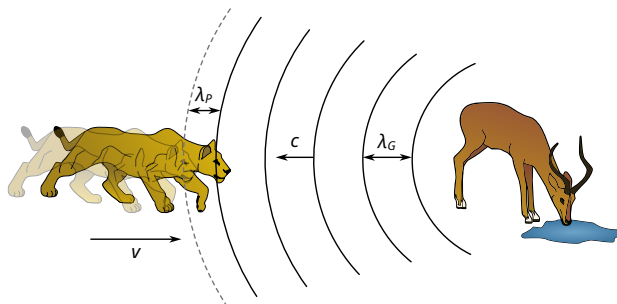
z čoho vidíme, že

$$T' = T \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma T.$$

Číslo v menovateli je menšie ako 1, teda faktor $\gamma > 1$, preto $T' > T$.

Čo sme to dostali? Trpaslík pohybujúci sa vzhľadom na hodiny tvrdí, že časový interval odmeraný v pokoji je z jeho pohľadu dlhší, takže čas mu v električke (alebo v sústave spojennej s električkou) plynie pomalšie. A to sme dostali z predpokladu, že rýchlosť svetla je všade rovnaká, takže sa s týmto zvláštnym výsledkom musíme zmieriť.

Relativistický Dopplerov jav



Obrázok 1.7.2: Odvodenie Dopplerovho javu

Odvodenie bude urobené vo vzťažnej sústave gazely, ktorá, pijúc čerstvú vodu, prehlási, že emituje žiarenie s vlnovou dĺžkou $\lambda_G = cT_G$.

Čo na to predátor? Ak by stál na mieste, s gazelou by súhlasil, avšak on sa k nej približuje, preto tvrdí, že medzi dvomi čelami vln bola iná vzdialenosť, konkrétne

$$\lambda_P = cT_P - vT_P = (c - v)T_P.$$

Poznamenajme, že T_P je čas meraný predátorom (má so sebou hodinky a pozerá sa na ne). My už vieme, že plynie pomalšie, než čas gazely (ak gazela nameria na svojich hodinkách čas 1 s, predátor medzi tiknutiami jej hodín nameria viac). Počítame

$$\lambda_P = (c - v)\gamma T_G = (c - v)\gamma \frac{\lambda_G}{c} = \lambda_G \frac{c - v}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda_G \frac{c - v}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Použijúc známy vzťah pre rozdiel dvoch druhých mocnín máme

$$\lambda_P = \lambda_G \frac{c - v}{\sqrt{(c - v)(c + v)}} = \lambda_G \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}.$$

Tento vzťah môžeme z estetických dôvodov upraviť na

$$\lambda_P = \lambda_G \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Číslo v menovateli je väčšie ako 1 a v čitateli menšie ako 1, takže to vyzerá, že naša snaha bola úspešná (dostali sme správania, aké sme čakali). Keby $v = 0$, výraz pod odmocninou bude rovný 1, takže vlnové dĺžky sa nezmenia, čo sme opäť čakali. Ešte konštatujeme, že po pár úpravách prenechaných čitateľovi zistíme, že

$$v = c \frac{1 - \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_G}\right)^2}{1 + \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_G}\right)^2}$$

a po dosadení $v \approx 61000$ km/s, čo je asi 20 % rýchlosti svetla. Už len poznamenajme, že ako sme aj uviedli vyššie, toto je minimálna rýchlosť, ktorou sa predátor musí pohybovať, aby bola šanca, že aspoň nejaké infračervené žiarenie uvidí ako zelené. Je tiež zrejmé, že tento výsledok sa nezanedbateľne líši od predchádzajúceho nerelativistického výpočtu, čo je dôvod, prečo ho nemôžeme považovať za správny.

Wienov posunovací zákon

Ako doplňujúcu informáciu uvádzame, že odhad vlnovej dĺžky nebol ideálny. Síce bude v spektre zastúpená s nenulovou pravdepodobnosťou, ale nebude veľmi výrazná. Ak chceme určiť vlnovú dĺžku žiarenia vyžarovaného s najväčšou spektrálnou hustotou, môžeme použiť Wienov zákon

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

kde $b = 2,898$ mmK je Wienova konštanta a T termodynamická teplota, ktorú vieme odhadnúť na 310 K, teda $\lambda_{\max} \approx 9$ μm , z čoho vyplýva, že predátor by sa musel pohybovať rýchlosťou väčšou než 99 % rýchlosti svetla, aby videl maximum posunuté do zelenej časti spektra. Wienov zákon hovorí o tom, ktorá vlnová dĺžka je najviac zastúpená v spektre absolútne čierneho telesa s teplotou T .