Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Kaiovo WC

vzorák **Kai**, opravoval **Kai**

Pre jednoduchosť budeme špeciálnu kvapalinu v celom riešení označovať aj nazývať voda. Najprv sa skúsme zamyslieť, čo sa v tejto úlohe vlastne deje.

Žiarovka postupne zohrieva vzduch a kvapalinu v miestnosti. Toto prebieha tak, že aj vzduch aj kvapalina majú stále rovnakú (len čím ďalej vyššiu) teplotu[1], keďže aj medzi nimi dochádza k tepelnej výmene. Takže potrebujeme, aby aj vzduch, aj kvapalina mali 100 °C. Potom sa všetko zvyšné teplo bude konať na kvapaline a bude spôsobovať odparovanie. Máme teda tri rôzne javy, ktoré spotrebovávajú teplo:

- zohriatie vzduchu z 26 °C na 100 °C, označíme Q_{vz}
- zohriatie vody z 26 °C na 100 °C, označíme Q_{vo}
- vyparovanie vody, označíme Q_{vy}

Ďalej budeme potrebovať nejaké hodnoty konštánt:

- hustota vzduchu pri 20 °C (rozdiel oproti 26 °C je minimálny) $\rho_{\mathrm{vz}} = 1{,}276\ \mathrm{kg/m^3}$
- hustota vody $\rho_{\mathrm{vo}} = 998\ \mathrm{kg/m^3}$
- merná tepelná kapacita vzduchu pri 15 °C (rozdiel oproti 26 °C je minimálny) $c_{\mathrm{vz}} = 1{,}005\ \mathrm{kJ/(kgK)}$
- merná tepelná kapacita vody $c_{\mathrm{vo}} = 4{,}18\ \mathrm{kJ/(kgK)}$
- merné teplo vyparovania $l_{vy} = 2257\ \mathrm{kJ/kg}$

Konštanty máme z Matematických, fyzikálnych a chemických tabuliek pre stredné školy, rok vydania 1992.

V tomto momente treba poznamenať, že dané veličiny (najmä hustoty) sú závislé od teploty komplikovanými (často empirickými) vzťahmi a nie sú konštantné. Je to jedno z mnohých zanedbaní, ktoré v tejto úlohe robíme.

Ešte predtým, ako vypočítame jednotlivé teplá, by sa hodilo vyjadriť si hmotnosti vzduchu a vody

$$m_{\mathrm{vo}} = \rho_{\mathrm{vo}} V_{\mathrm{vo}} = 998\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}005\ \mathrm{m^3} \approx 5\ \mathrm{kg},$$

$$m_{\mathrm{vz}} = \rho_{\mathrm{vz}} V_{\mathrm{vz}} = 1{,}276\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 1\ \mathrm{m} \cdot 2\ \mathrm{m} \cdot 2{,}5\ \mathrm{m} \approx 6{,}4\ \mathrm{kg}.$$

Poďme teraz vypočítať jednotlivé teplá. Použijeme známy vzorec $Q = mc\Delta t$ a $Q_{vy} = ml_{vy}$. Ak ich nepoznáte, odporúčam vám prestať čítať a opýtať sa AI :D.

[1] Čo nie je striktne pravda kvôli nedokonalej tepelnej výmene.

Takže platí

$$Q_{\mathrm{vo}} = m_{\mathrm{vo}} c_{\mathrm{vo}} \Delta t \approx 5\ \mathrm{kg} \cdot 4180\ \mathrm{kJ/(kgK)} \cdot 74\ \mathrm{K} \approx 1{,}55\ \mathrm{MJ},$$

$$Q_{\mathrm{vz}} = m_{\mathrm{vz}} c_{\mathrm{vz}} \Delta t \approx 6{,}4\ \mathrm{kg} \cdot 1005\ \mathrm{kJ/(kgK)} \cdot 74\ \mathrm{K} \approx 0{,}46\ \mathrm{MJ}.$$

Pri teple potrebnom na vyparovanie berieme polovičnú hmotnosť vody,

$$Q_{vy} = l_{vy} \frac{m_{\mathrm{vo}}}{2} = 2\,257\,000\ \mathrm{kJ/kg} \cdot \frac{5\ \mathrm{kg}}{2} \approx 5{,}64\ \mathrm{MJ}.$$

Všimnime si, že teplá potrebné na zohrievanie vzduchu a vody sú oveľa nižšie ako tie, ktoré sú potrebné na vyparovanie. Pre celkové teplo Q platí

$$Q = Q_{\mathrm{vo}} + Q_{\mathrm{vz}} + Q_{vy} \approx 1{,}55\ \mathrm{MJ} + 0{,}46\ \mathrm{MJ} + 5{,}64\ \mathrm{MJ} = 7{,}65\ \mathrm{MJ}.$$

Zadanie sa teda vlastne pýta, ako dlho bude žiarovke s príkonom 60 W trvať, kým vyprodukuje teplo Q. Keďže sú steny dokonale odrazivé, všetok príkon žiarovky sa zmení na teplo.

Počítajme čas $t = \frac{Q}{P} \approx \frac{7{,}65\ \mathrm{MJ}}{60\ \mathrm{W}} \approx 35{,}4\ \mathrm{h}$. Čiže Kai sa musí vrátiť asi o deň a pol.

Poznámka o energii elektromagnetického poľa

Zamýšľali ste sa niekedy nad tým, akým mechanizmom sa voda v záchode zahrieva? Nie je to vedením, ani prúdením, ale žiarením. Voda by sa zohriala, aj keby v miestnosti bolo vákuum. To ale znamená, že potrebujeme niečo, čo túto energiu prenáša. A to niečo je elektromagnetické (EM) pole (svetlo, infračervené a ultrafialové žiarenie). Keď zažneme žiarovku, v miestnosti sa vytvorí EM pole a celý dodaný výkon sa vyžiari v podobe energie tohto poľa. Keďže steny miestnosti sú dokonale odrazivé, EM pole nemá ako uniknúť a pri interakcii s hmotou sa jeho energia využíva na jej zahrievanie.

Poďme odhadnúť, akú energiu má EM pole v miestnosti. Keďže väčšinu energie nakoniec absorbuje voda v záchode, pre jednoduchosť úvah vzduch teraz neuvažujme. Ak je príkon žiarovky 60 W, znamená to, že každú sekundu vyžiari do miestnosti energiu 60 J. Môžeme predpokladať, že energia je v miestnosti viac-menej rovnomerne rozložená. Za sekundu totiž fotón prejde vzdialenosť 300 000 km. Keďže rozmery miestnosti sú rádovo meter, za sekundu sa odrazí niekoľkostomiliónkrát, čo bohate stačí na to, aby bola hustota fotónov v celej miestnosti konštantná. Keď však fotón doputuje do záchodovej misy, okamžite zinteraguje s vodou, čím ju zahreje.

Pre jednoduchosť predpokladajme, že každý fotón, ktorý sa odrazí do vody, je ňou pohltený. To znamená, že fotóny sú jednak nepretržite do miestnosti dodávané žiarovkou, ako i pohlcované vodou. Rovnováha nastane, keď je za sekundu do miestnosti vyžiarené rovnaké množstvo fotónov aké je pohltené vodou. Vtedy sa množstvo energie EM poľa v miestnosti už nemení.

Nech je hustota energie EM poľa v miestnosti u a nech je povrch vody v mise, cez ktorý do nej vnikajú fotóny, S. Potom za krátky časový interval $\mathrm{d}t$ fotóny preniknú do objemu $Sc\,\mathrm{d}t$, a teda vo vode sa pohltí energia $uSc\,\mathrm{d}t$, kde c je rýchlosť svetla. V stave rovnováhy je za rovnaký čas žiarovkou dodané rovnaké množstvo energie $P\,\mathrm{d}t$. Na základe toho pre hustotu energie EM poľa v miestnosti dostávame

$$uSc\,\mathrm{d}t \stackrel{!}{=} P\,\mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad u = \frac{P}{Sc} \sim 10^{-6}\ \mathrm{J/m^3}.$$

Keďže objem miestnosti sú rádovo jednotky metrov kubických, energia v podobe EM poľa je v miestnosti zanedbateľná.[2] Toto množstvo energie sa žiarovkou vyžiari za zhruba 10^{-7} s. To je stále dosť času na to, aby sa fotón stihol poodrážať pred tým, než je pohltený, v priemere desiatkykrát. Fotóny budú preto v miestnosti naozaj pomerne dobre rozptýlené.

1.2 Tiborovo auto

vzorák **Jožura**, opravoval **Tibor**

Tibor má auto, ktoré na rovine počas bezvetria nadobúda najvyššiu rýchlosť 101 km/h. Našou úlohou je zistiť, ako rýchlo pôjde, ak chytí pod Tatrami čelný vietor s rýchlosťou 12 m/s, ak stále ide na plný výkon.

To, že auto ide konštantnou rýchlosťou, nám hovorí, že výslednica síl, ktoré naň pôsobia, je nulová. Pre jednoduchosť môžeme uvažovať len silu, ktorá tlačí auto dopredu F_{ah} a silu odporovú F_{odpor}. Tieto dve sily majú v ustálenom stave rovnakú veľkosť a opačný smer.

Vieme, že výkon motora je konštantný, teda práca za čas je stále rovnaká. Keď si to vhodne prepíšeme, dostaneme pre nás užitočnejší tvar

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v,$$

kde F je ťahová sila. Keďže je však rovnako veľká ako odporová sila, rovnaký výkon dostaneme aj pri nej. Ako odporovú silu uvažujme iba odpor vzduchu, keďže ten je pri vysokých rýchlostiach výraznejší ako ostatné sily. Vyjadriť ju vieme ako

$$F_{\mathrm{odpor}} = \frac{1}{2} C \rho S v_{\mathrm{vzduch}}^2,$$

kde C je konštanta odporu, ρ je hustota vzduchu, S je plocha auta spredu a v_{vzduch} je rýchlosť auta vzhľadom na vzduch. Pre jednoduchosť, môžeme ju zapísať aj ako

$$F_{\mathrm{odpor}} = k \cdot v_{vzduch}^2.$$

Z toho dostaneme, že výkon auta je

$$P = k \cdot v_{\mathrm{vzduch}}^2 \cdot v.$$

Pri bezvetrí je v — rýchlosť auta vzhľadom na cestu aj v_{vzduch} rovnaká, takže máme

[2] Poznamenajme, že celá táto úvaha má len charakter odhadu, a teda obdržaný výsledok je len rádovo správny. Napríklad nie je splnený predpoklad o homogénnosti EM poľa, pretože do miest za misou sa dostanú len odrazené fotóny, a teda ich tam bude určite menej ako pred misou, kam prichádzajú fotóny aj priamo. Rád výsledku to však nemôže podstatne ovplyvniť.

$$P = k \cdot v^3.$$

Teraz uvažujme, čo sa stane v druhej situácii. Začne fúkať čelný vietor rýchlosťou $w = 12$ m/s. Čo sa zmení oproti bezveternej situácii je, že rýchlosť v sile odporu vzduchu už nebude rovnaká ako rýchlosť auta vzhľadom na cestu. Ponovom to bude $v_{\mathrm{vzduch}} = u + w$, kde u je rýchlosť auta vzhľadom na cestu. Náš vzťah pre výkon sa zmení na

$$P = k \cdot v_{\mathrm{vzduch}}^2 \cdot u = k \cdot (u + w)^2 \cdot u.$$

Keďže výkon je rovnaký ako bol, môžeme dať túto rovnosť do rovnosti s výkonom auta za bezvetria a z toho vyjadriť u

$$P = k \cdot v^3 = k \cdot u \cdot (u + w)^2 = k \cdot u \cdot (u^2 + 2uw + w^2).$$

Vidíme, že konštanta k nám vypadne a teda

$$v^3 = u^3 + 2u^2 w + u w^2.$$

Dostali kubickú rovnicu, ktorej riešenie vôbec nie je pekné. Preto radšej použijeme výpočtový softvér, nech to urobí za nás, napríklad WolframAlpha. Po dosadení našich vstupných hodnôt dostaneme jediné reálne riešenie a to

$$u \approx 20{,}7 \text{ m/s} \approx 74{,}4 \text{ km/h}.$$

1.3 Jožkova mačka

vzorák **Kai**, opravovala **Lucka**

Na riešenie tejto úlohy využijeme zákon zachovania momentu hybnosti. Na jeho aplikáciu je potrebné poznať aj koncept momentu zotrvačnosti. Ak ste o ňom doteraz nepočuli, príklady na jeho použitie nájdete napríklad v tomto materiáli českej fyzikálnej olympiády.

Zákon zachovania momentu hybnosti má v tejto úlohe tvar

$$(I_{\mathrm{Zem}} + I_{\mathrm{LT}})\omega_0 = (I_{\mathrm{Zem}} + I_{\mathrm{ST}})\omega_1,$$

kde $I_m athrm Zem$ je moment zotrvačnosti Zeme, $I_m athrm LT$ je moment zotrvačnosti ležiacich tigrov a I_{ST} je moment zotrvačnosti stojacich tigrov. Uhlová rýchlosť ω_0 je pôvodná rýchlosť rotácie Zeme a ω_1 je nová uhlová rýchlosť po tom, čo sa tigre postavia.

Moment zotrvačnosti Zeme vypočítame zo známeho vzťahu pre moment zotrvačnosti homogénnej gule $I = \frac{2}{5}MR^2$. Takéto vzťahy pre známe telesá sa dajú bežne nájsť. Ich odvodenie si vyžaduje integrovanie, takže ho tu vynecháme.[3].

Ak dosadíme tabuľkové hodnoty:

- hmotnosť Zeme $M_{\text{Zem}} = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg,
- polomer Zeme $R_{\text{Zem}} = 6371\ \text{km} = 6{,}371 \cdot 10^6$ m,

dostaneme moment zotrvačnosti

$$I_{\text{Zem}} \approx 9{,}696 \cdot 10^{37}\ \text{kgm}^2.$$

Ležiacich aj stojacich tigrov aproximujeme ako hmotné body. Môžeme to urobiť preto, že ich rozmery sú v porovnaní s polomerom Zeme úplne zanedbateľné. Moment zotrvačnosti tigrov budeme počítať ako súčet momentov zotrvačností jednotlivých tigrov, ktorých je $N = 4 \cdot 10^9$. Ak h označíme vzdialenosť ťažiska tigra od povrchu Zeme, potom platí

$$I_{\text{T}} = NM_T(R_{\text{Zem}} + h)^2$$

Priemerný bengálsky tiger má dĺžku 2 m a hmotnosť $M_T = 200$ kg. Keď leží (s výškou tela zhruba 0,4 m), ťažisko má vo výške $h_L = 0{,}2$ m od povrchu Zeme. Keď sa postaví na zadné, ťažisko sa presunie do výšky asi $h_S = 1$ m.

Pre dané hodnoty dostávame obrovské čísla s minimálnym relatívnym rozdielom[4]

$$I_{\text{LT}} = 4 \cdot 10^9 \cdot 200 \cdot (6371000.2)^2 \approx 3.247 \cdot 3{,}247 \cdot 10^{25}\ \text{kgm}^2,$$

$$I_{\text{ST}} = 4 \cdot 10^9 \cdot 200 \cdot (6371001.0)^2 \approx 3.247 \cdot 3{,}247 \cdot 10^{25}\ \text{kgm}^2.$$

Môžeme si všimnúť, že rozdiel v momentoch zotrvačnosti je minimálny, a to obzvlášť oproti momentu zotrvačnosti samotnej Zeme (I_{Zem} je o viac ako 12 rádov väčšie). Ak by sme sa pokúsili dosadiť tieto čísla priamo do vyjadrenia pre ω_1, narazili by sme na problém s numerickou presnosťou. Bežné programovacie jazyky (napríklad Python) pri práci s *floating-point* číslami nedokážu zachytiť takto mikroskopický rozdiel dvoch gigantických čísel – výsledok by zaokrúhlili a povedali by nám, že rýchlosť Zeme sa vôbec nezmenila.

Fyzikálne sa však rýchlosť **zmení**. Aby sme presne zistili o koľko, vyjadríme si z rovnice priamo *zmenu* uhlovej rýchlosti, teda $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$,

$$\Delta\omega = \frac{(I_{\text{Zem}} + I_{LT})\omega_0}{I_{\text{Zem}} + I_{\text{ST}}} - \omega_0 = \omega_0 \frac{I_{\text{LT}} - I_{ST}}{I_{\text{Zem}} + I_{\text{ST}}}.$$

Keďže $I_{\text{Zem}} \gg I_{\text{ST}}$, menovateľ zlomku môžeme prakticky bez straty presnosti aproximovať na I_{Zem}. V čitateli si pomôžeme vzorcom $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$$I_{\text{LT}} - I_{\text{ST}} = NM_T\left[(R_{\text{Zem}} + h_L)^2 - (R_{\text{Zem}} + h_S)^2\right] \approx NM_T \cdot 2R_{\text{Zem}}(h_L - h_S).$$

[3] Zem v skutočnosti nie je dokonalá homogénna guľa, má hustejšie jadro a jej reálny moment zotrvačnosti je o niečo menší, približne $0{,}33MR^2$, no pre účely úloh tohto typu je aproximácia homogénnou guľou plne akceptovateľná

[4] čísla sú rádu 10^{25}, zatiaľ čo ich rozdiel je rádu 10^{18}

Vďaka tejto jednoduchej algebraickej úprave sa vyhneme strate presnosti a po dosadení do vzťahu pre zmenu uhlovej rýchlosti dostaneme

$$\Delta\omega \approx \omega_0 \frac{NM_T \cdot 2R_{\text{Zem}}(h_L - h_S)}{I_{\text{Zem}}}.$$

Pôvodná uhlová rýchlosť ω_0 pre dĺžku dňa $T_0 = 24\ \text{h} = 86\,400\ \text{s}$ je $\omega_0 = \frac{2\pi}{86400} \approx 7{,}272 \cdot 10^{-5}\ \text{rad/s}$. Môžeme dosadiť

$$\Delta\omega \approx -6{,}12 \cdot 10^{-24}\ \text{rad/s}.$$

Uhlová rýchlosť rotácie Zeme sa teda v momente, keď sa všetky tigre postavia, zmenší o $6{,}12 \cdot 10^{-24}$ rad/s.

Čo to znamená v praxi pre dĺžku dňa? Zmena doby rotácie ΔT sa dá vyjadriť ako

$$\Delta T \approx -T_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 7{,}27 \cdot 10^{-15}\ \text{s}.$$

Tigre spôsobili, že jeden deň na Zemi sa predĺžil približne o 7,27 femtosekúnd. Tento rozdiel je taký malý, že je hlboko pod limitom akejkoľvek meracej techniky a nezbadal by ho ani Python – avšak z fyzikálneho hľadiska mali Jožkove mačky jasný (aj keď mikroskopický) spomaľujúci dopad.

1.4 Šimonova telesná

vzorák **Jožura**, opravoval **Piškót**

Šimon má pingpongovú a volejbalovú loptičku. Pustí ich z výšky 1 m. Padajú dolu, volejbalová sa odrazí od zeme a narazí do pingpongovej, ktorú takto vystrelí dohora. Našou úlohou je zistiť, do akej najvyššej výšky sa môže odraziť pingpongová loptička. Vypočítajme preto rýchlosť po odraze a z nej potom dopočítame výšku.

Pozrime sa, akú situáciu máme tesne pred odrazom. Pingpongová loptička padá dolu rýchlosťou v, volejbalová sa odrazila od zeme a smeruje dohora rýchlosťou tiež v (lebo obe padajú z výšky jedného metra, teda majú aj rovnakú rýchlosť). Túto rýchlosť vieme vypočítať, keďže to je jednoducho voľný pád z výšky 1 m.

$$s = \frac{1}{2} g h^2 \implies t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg} \approx 4{,}43\ \text{m/s}.$$

Teraz vieme presne, akú situáciu máme. Volejbalová lopta ide rýchlosťou v smerom hore, pingpongová lopta rýchlosťou v smerom dole. Zo zadania vieme, že sa jedná o pružnú zrážku. To znamená, že sa zachováva aj energia aj hybnosť. Poďme pre ne zostaviť rovnice. Označme si m_v, m_p hmotnosti volejbalovej a pingpongovej loptičky. Zo zákonu zachovania energie dostávame, že kinetická energia pred zrážkou je rovnaká ako kinetická energia po zrážke. Potenciálna energia tu nevystupuje, nakoľko sa pozeráme na dva okamihy tesne pred a tesne po zrážke. Potenciálna energia v oboch prípadoch je rovnaká a nemusíme ju tam uvádzať.

$$\frac{1}{2}\left(m_\text{v} + m_\text{p}\right) v^2 = \frac{1}{2} m_\text{v} v_\text{v}^2 + \frac{1}{2} m_\text{p} v_\text{p}^2.$$

Rovnako si vieme napísať rovnosť hybností pred a po zrážke. Tu však musíme pamätať na to, že jedna rýchlosť smeruje hore a druhá dole. Nech je smer dohora kladný. Rýchlosť volejbalky je pred zrážkou v kladnom smere, rýchlosť pingpongovej loptičky v zápornom, čiže

$$\left(m_\mathrm{v}-m_\mathrm{p}\right)v=m_\mathrm{v}v_\mathrm{v}+m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}.$$

Máme dve rovnice o dvoch neznámych – rýchlostiach lôpt po zrážke. Tak poďme na to. Z rovnice pre hybnosť si vyjadríme v_v

$$v_\mathrm{v}=\frac{(m_\mathrm{v}-m_\mathrm{p})v-m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{m_\mathrm{v}}.$$

To teraz dosadíme do rovnice pre zachovanie energie,

$$\left(m_\mathrm{v}+m_\mathrm{p}\right)v^2=m_\mathrm{v}\left(\frac{(m_\mathrm{v}-m_\mathrm{p})v-m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{m_\mathrm{v}}\right)^2+m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}^2.$$

Tu nám ostala jediná neznáma v_p. Keďže je to kvadratická rovnica, vieme nájsť jej riešenia. Najprv si ju zapíšme do krajšieho tvaru, nech to naozaj vidíme:

$$v_\mathrm{p}^2\left(m_\mathrm{p}+\frac{m_\mathrm{p}^2}{m_\mathrm{v}}\right)-v_\mathrm{p}\left(2\frac{m_\mathrm{p}(m_\mathrm{v}-m_\mathrm{p})v}{m_\mathrm{v}}\right)+\frac{\left(m_\mathrm{v}-m_\mathrm{p}\right)^2v^2}{m_\mathrm{v}}-(m_\mathrm{v}+m_\mathrm{p})v^2=0.$$

Teraz vyjadríme v_p

$$v_\mathrm{p}=\frac{\left(2\frac{m_\mathrm{p}(m_\mathrm{v}-m_\mathrm{p})v}{m_\mathrm{v}}\right)\pm\sqrt{\left(-\frac{2m_\mathrm{p}(m_\mathrm{v}-m_\mathrm{p})v}{m_\mathrm{v}}\right)^2-4\left(m_\mathrm{p}+\frac{m_\mathrm{p}^2}{m_\mathrm{v}}\right)\left(\frac{(m_\mathrm{v}-m_\mathrm{p})^2v^2}{m_\mathrm{v}}-(m_\mathrm{v}+m_\mathrm{p})v^2\right)}}{2\left(m_\mathrm{p}+\frac{m_\mathrm{p}^2}{m_\mathrm{v}}\right)}.$$

Nevyzerá to bohvieako pekne, ale našťastie sú všetky veličiny známe. Po dosadení $v\approx 4{,}43\,\mathrm{m/s}$, $m_\mathrm{v}\approx 0{,}27\,\mathrm{kg}$, $m_\mathrm{p}\approx 0{,}0027\,\mathrm{kg}$ dostaneme $v_\mathrm{p}\approx 13{,}11\,\mathrm{m/s}$ ako jedno riešenie a druhé ako $v_\mathrm{p}=-v$. Druhé riešenie zjavne zodpovedá prípadu, keď lopty do seba nenarazia a pokračujú vo svojich letoch, zatiaľ, čo prvé riešenie opisuje situáciu po zrážke. Pingpongovú loptičku teda volejbalová vystrelí dohora rýchlosťou približne 13 m/s.

Teraz už len potrebujeme zistiť výšku, do akej vyletí. Na to nám stačí upraviť úvodný vzťah

$$v=\sqrt{2hg}\implies h=\frac{v^2}{2g}\approx 8{,}76\,\mathrm{m}.$$

Teda pingpongová loptička po zrážke s volejbalovou vyletí do výšky 8,76 m.

1.5 Krtkov obyvák

vzorák **Jaro**, opravovali **Lujza** a **Kubo**

Označme si rozmer Krtkovho obyváku a a svietivosť sviečky I_0. Keďže zadanie nič nehovorí o preferovanom smere svietenia, môžeme predpokladať, že sviečka svieti rovnomerne do všetkých smerov. To znamená, že celkový svetelný tok sviečky je

$$\Phi_0 = I_0 \cdot 4\pi \text{ sr} = 1 \text{ cd} \cdot 4\pi \text{ sr} = 4\pi \text{ lm}.$$

Toto je svetelná energia, ktorú vyžiari sviečka každú sekundu vo viditeľnom spektre, váhovaná citlivosťou oka na jednotlivé vlnové dĺžky. Intenzita osvetlenia na protiľahlej stene je rovná svetelnému toku dopadajúcemu na jednotkovú plochu. Na sfére vo vzdialenosti a od sviečky je intenzita osvetlenia[5] všade rovná[6]

$$E_0 = \frac{\Phi_0}{4\pi a^2} = \frac{I_0 \cdot 1 \text{ sr}}{a^2} = \frac{1 \text{ lm}}{4 \text{ m}^2} = 0{,}25 \text{ lx},$$

a teda toto je intenzita osvetlenia kolmo na protiľahlej stene.

Čo sa stane, keď Krtko nainštaluje na zvislé steny svojho obyváku rovinné zrkadlá? Dve veci. Po prvé, zrkadlo na stene tesne pri sviečke spôsobí, že svetelný tok, ktorý pôvodne dopadal na stenu a bol ňou pohltený, sa teraz odráža, a teda efektívna svietivosť sviečky do vnútra obyváku je teraz

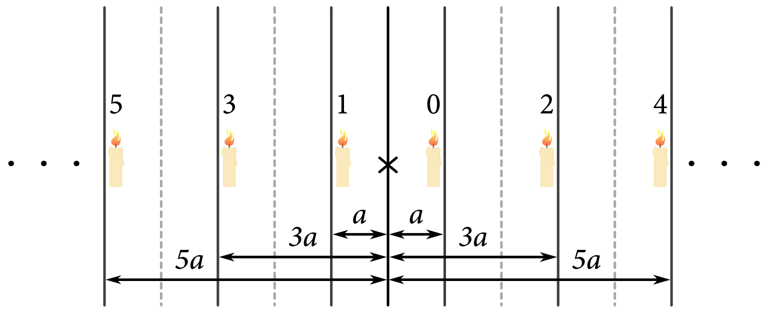
$$I = \frac{\Phi_0}{2\pi \text{ sr}} = 2I_0.$$

A po druhé, sviečka sa odráža od vzdialenejšieho zrkadla, jej odraz vo vzdialenejšom zrkadle sa odráža od bližšieho zrkadla, odraz v bližšom zrkadle odrazu vo vzdialenejšom zrkadle sa odráža opäť od vzdialenejšieho zrkadla, a tak ďalej… a každý tento odraz možno považovať za nový zdroj svetla so svietivosťou I, pričom každý ďalší odraz je v čoraz väčšej vzdialenosti.

Poďme si spočítať intenzitu osvetlenia od tohto nekonečného množstva zdrojov. Po nakreslení prvých pár odrazov si rýchlo všimneme istý pattern (viď obrázok). Skutočná sviečka a jej priamy odraz sú vo vzdialenosti $d_0 = d_1 = a$ od miesta, kde nás intenzita osvetlenia zaujíma. Odraz odrazu a odraz odrazu odrazu (ďalej len druhý a tretí odraz) sú vo vzdialenosti $d_2 = d_3 = 3a$. Štvrtý a piaty odraz sa objavia vo vzdialenosti $5a$. Vidíme teda, že dvojice odrazov sú vždy v každom nepárnom násobku rozmeru Krtkovho obyváku.

[5] Z didaktických dôvodov píšeme explicitne pri priestorovom uhle aj jeho jednotku, hoci je bezrozmerný. Ak by sme tak neurobili, dostali by sme výraz $E_0 = \frac{I_0}{a^2}$, ktorý má jednotku kandela na meter štvorcový, čo by nesedelo, pretože intenzita osvetlenia je definovaná ako svetelný tok na jednotkovú plochu, preto by mal mať jednotku lumen na meter štvorcový. Obe jednotky však majú rovnaký rozmer, pretože lumen má rozmer kandely (líšia sa len steradiánom, ktorý je bezrozmerný).

[6] Pozorný čitateľ si určite všimne, že niekedy pri 4π píšeme sr a niekedy nie. Prečo? Tam, kde to píšeme, ide naozaj o priestorový uhol. V menovateli sa však 4π vyskytuje ako súčasť výrazu $4\pi a^2$, čo je vyjadrenie plochy, preto jednotkou tohto výrazu je meter štvorcový. Ak by sme veľmi chceli, mohli by sme 4π považovať za priestorový uhol a písať pri ňom sr; v takom prípade by sme ale nesmeli a^2 považovať za druhú mocninu vzdialenosti, ale za výraz definovaný ako $\frac{S}{\Omega}$, teda výraz, ktorý nám hovorí, aká bude plocha výseku sféry vymedzeného priestorovým uhlom Ω,resp. ako sa zmení táto plocha, ak zmením priestorový uhol, a teda jeho jednotkou bude meter štvorcový na steradián.



Obrázok 1.5.1: *Pattern odrazov sviečky.*

Ako prispieva n-tý odraz vo vzdialenosti d_n k intenzite osvetlenia v mieste, ktoré nás zaujíma? Jednoducho – intenzita osvetlenia od tohto odrazu je[7]

$$E_n = \frac{2I_0 \cdot \delta\Omega}{\delta\Omega \cdot d_n^2} = \frac{2I_0 \cdot 1\,\mathrm{sr}}{d_n^2}.$$

Teraz nám už zostáva len sčítať príspevky od všetkých odrazov (vrátane nultého) a dostaneme celkovú intenzitu osvetlenia

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2I_0 \cdot 1\,\mathrm{sr}}{d_n^2}.$$

Keďže pre $n = 2k$ a $n = 2k + 1$ je $d_{2k} = d_{2k+1} = (2k + 1)a$, možno tento výraz prepísať ako

$$E = 2I_0 \cdot 1\,\mathrm{sr} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[(2k+1)a]^2} = \frac{2I_0 \cdot 1\,\mathrm{sr}}{a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Zadanie nám našepkáva, že sa nám môže zísť súčet radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

My však potrebujeme sčítať iba nepárne členy tohto radu. Rozbime si preto tento rad na dva:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}.$$

Prvá suma je nami hľadaný súčet – označme ho S. Druhú sumu možno ľahko vyčísliť s pomocou hintu zo zadania:

[7] Ak je plôška, na ktorej nás osvetlenie zaujíma, veľká δS, tak ju vo vzdialenosti d_n vidíme pod priestorovým uhlom $\delta\Omega = \frac{\delta S}{d_n^2} \cdot 1\,\mathrm{sr}$, a teda svetelný tok dopadajúci na túto plôšku je $I \cdot \delta\Omega$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Keď to všetko dáme dokopy, dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = S + \frac{\pi^2}{24} \overset{!}{=} \frac{\pi^2}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad S = \frac{\pi^2}{8}.$$

Intenzita osvetlenia pri protiľahlej stene kolmo oproti sviečke je teda

$$E = \frac{2I_0 \cdot 1\,\mathrm{sr}}{a^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2 I_0 \cdot 1\,\mathrm{sr}}{4a^2} = \frac{\pi^2 \cdot 1\,\mathrm{cd} \cdot 1\,\mathrm{sr}}{4 \cdot 4\,\mathrm{m}^2} = \frac{\pi^2}{16}\mathrm{lx},$$

čo je $\frac{\pi^2}{4} \doteq 2{,}5$-krát väčšia intenzita osvetlenia než pred pridaním zrkadiel.

Kde sa vzala energia na tento nárast intenzity osvetlenia? Pridaním zrkadiel sme predsa žiadnu energiu nedodali.[8] Kľúč k rozlúsknutiu tejto záhady spočíva v uvedomení si, čo sa dialo s energiou pred pridaním zrkadiel. Keď svetlo dopadlo na steny obyváku, bolo nimi pohltené, čím steny mierne zahrialo, a toto teplo sa odviedlo ďalej do pôdy. Keď sme pridali zrkadlá, zamedzili sme tomu. Miesto toho sa fotóny odrážajú od zrkadiel. Fotónom letiacim priamo zo sviečky trvá presne $\frac{a}{c}$ sekúnd, kým dosiahnu protiľahlú stenu obyváku. Odrazeným fotónom to ale trvá viac, pretože musia uraziť väčšiu vzdialenosť. To znamená, že zatiaľ čo v prípade bez zrkadiel je intenzita osvetlenia dosiahnutá len s prispením „rovnako starých" fotónov, v prípade so zrkadlami sú za nárast intenzity zodpovedné fotóny pochádzajúce z väčšej minulosti, ktoré sú uviaznuté medzi zrkadlami, a len postupne sa z obyváku vytrácajú cez podlahu, strop alebo cez otvorené bočné konce. Zákon zachovania energie preto nie je porušený a celkové množstvo svetelnej energie vyprodukovanej sviečkou je v oboch prípadoch rovnaké – len v prípade so zrkadlami jej dlhšie trvá, kým z obyváku unikne, a preto v každom čase je jej v obyváku viac, a teda je väčšia intenzita osvetlenia.

1.6 Jarovo kúrenie

vzorák **Pat**, opravovala **Pat**

Musíme si najprv fyzikálne vysvetliť, čo sa s chatou Prietos deje. Majme teda chatku, do ktorej ohrievač pridáva tepelnú energiu. Nakoľko chatka nie je dokonale izolovaná, časť tepla konštantne uniká von.

Ľahké by bolo zostaviť riešenie, kde by sme počítali, že únik tepla je po celý čas konštantný. Ale napriek tomu, že riešenie takéhoto modelu je veľmi blízko reálnemu riešeniu, tak veľa bodov sa zaň dostať nedá.

Poďme si to ale správne vyriešiť, a to tak, že vieme, že únik tepla sa lineárne zväčšuje s narastajúcou teplotou, inak nazývané **Newtonov zákon ochladzovania**.

[8] Ak teda neuvažujeme energiu podľa $E = mc^2$, ktorá sa tu však na svetlo nepremieňa, takže neprispieva k nárastu svetelnej energie.

V každom okamihu platí, že dodaný výkon ohrievača P sa delí na výkon, ktorý zvyšuje vnútornú energiu chaty, a výkon, ktorý uniká do okolia. Rovnica teda vyzerá takto:

$$P = \text{výkon ohrevu} = \text{výkon spotrebovaný na ohrev} + \text{výkon stratený únikom} = C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + k(T - T_{\text{out}}),$$

kde k reprezentuje koeficient strát (tepelná vodivosť sústavy). Pre menej náročných je to konštanta, ktorá určuje, ako veľmi je chata „deravá“.

1. Výpočet koeficientu strát

Tento koeficient vieme spočítať cez vzťah pre výkon strát v okamihu, keď sa teplota v chate ustáli na maximálnej hodnote $T_{\max} = 23$ °C. Vtedy sa už chata neohrieva ($\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0$) a všetok výkon ohrievača len kompenzuje úniky

$$P = k(T_{\max} - T_{\text{out}}).$$

Takže keď dosadíme známe hodnoty

Parameter	Hodnota
Výkon (P)	1000 W
$T_{\max}$	23 °C
T_{out}	0 °C

dozvieme sa, že

$$1000\ \text{W} = k(23\ \text{°C} - 0\ \text{°C}) \qquad \Rightarrow \qquad k \approx 41{,}478\ \text{W/K}. \tag{1.6.1}$$

2. Výpočet tepelnej kapacity

Vychádzame zo vzťahu

$$P = C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + k(T - T_{\text{out}}). \tag{1.6.2}$$

Po úprave (a využití $T_{\max} = T_{\text{out}} + \frac{P}{k}$) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{C}(T - T_{\max}). \tag{1.6.3}$$

Táto rovnica nám hovorí, ako rýchlo sa v čase mení teplota. Podobne nám rýchlosť hovorí ako rýchlo sa v čase mení poloha. O rýchlosti vieme, že pre ňu platí $\Delta x = v\,\Delta t$. Respektíve slovami povedané, že ak ideme čas Δt rýchlosťou v, tak poloha sa zmení o Δx. Čo ak ale nejdeme cceý čas rovnakou rýchlosťou? Vtedy už v nie je len číslo, ale nejaká funkcia času. Ak sa ale pozrieme na veľmi malý časový interval δt, na túto nepríjemnosť môžeme zabudnúť, lebo rýchlosť sa na tomto intervale zmení len nepatrne a môžeme znova využiť pekný vzťah $\delta x = v\,\delta t$.

Nás ale zaujíma daná veličina po nejakom veľkom čase Δt. Ako to teda obísť? Jednoducho. Vieme, že nemôžeme urobiť jeden veľký časový krok (ako sme vysvetlili v predchádzajúcom odseku). Nič nám ale nebráni urobiť veľa menších.

Ak teda máme počiatočnú teplotu T_{out}, o maličký čas δt budeme mať vnútri novú teplotu

$$T = T_{\text{out}} + \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\,\delta t,$$

pričom vzťah pre deriváciu poznáme. Vystupuje v ňom však samotná teplota T, za ktorú pri výpočte musíme niečo dosadiť. Čo ale? Veď práve T je to, čo sa v čase mení. Ako sme ale spomenuli, na takomto krátkom intervale sa mení zanedbatelne málo. Pre výpočet derivácie teda za T môžeme dosadiť napríklad teplotu chaty na začiatku tohto krátkeho intervalu a teda T_{out}.

Uvedomme si, že týmto jednoduchým výpočtom sme sa v čase posunuli o kúsok. Aby sme sa posunuli o viac, musíme akurát výpočet zopakovať veľakrát. Zakaždým pritom musíme vypočítať novú deriváciu, lebo tá závisí od vnútornej teploty a tá sa mení v čase.

Keďže by toho počítania bolo veľa, môžeme ho nechať na počítač. Skôr ako to spravíme, musíme však vyriešiť ešte jednu vec. Akú hodnotu zvoliť pre δt? Má to byť 1 min alebo 1 ms? Z našich úvah je jasné, že čím menší časový interval zvolíme, tým by sme mali dostať presnejší výsledok, lebo teplota na ňom je konštantnejšia. Avšak čím menšie δt, tým viac krokov musíme spraviť, aby sme dostali teplotu po nejakom veľkom časovom intervale ΔT, a teda výpočet trvá dlhšie. Štandardne sa ho preto snažíme nastaviť tak, aby bol čo najväčší, no zároveň sa výsledok dostatočne zhodoval s výsledkom pre menší časový interval.

Keď už máme aj nastavené δt, vieme nechať počítač vypočítať teplotu po dvoch hodinách pre konkrétnu hodnotu C. Vieme teda skúšaním hľadať vhodnú hodnotu C, aby bola teplota po dvoch hodinách práve 16 °C. Po chvíľke hľadania dôjdeme k záveru, že $C \approx 263\ \mathrm{kJ/K}$.

3. Alternatívny prístup

Alternatívne vieme úlohu vyriešiť tým, že analyticky nájdeme riešenie diferenciálnej rovnice 1.6.3. Vieme odhadnúť, že riešením takejto rovnice je exponenciálna funkcia tvaru[9]

$$T(t) = T_{\max} + Ae^{-\frac{k}{C}t}.$$

Určenie konštanty z podmienok

Máme dve známe podmienky:

- v čase $t = 0$ je $T(0) = T_{\text{out}}$,
- v čase $t \to \infty$ je $T(t) \to T_{\max}$.

Dosadením prvej podmienky dostávame

$$T_{\text{out}} = T_{\max} + A \qquad \Rightarrow \qquad A = T_{\text{out}} - T_{\max}.$$

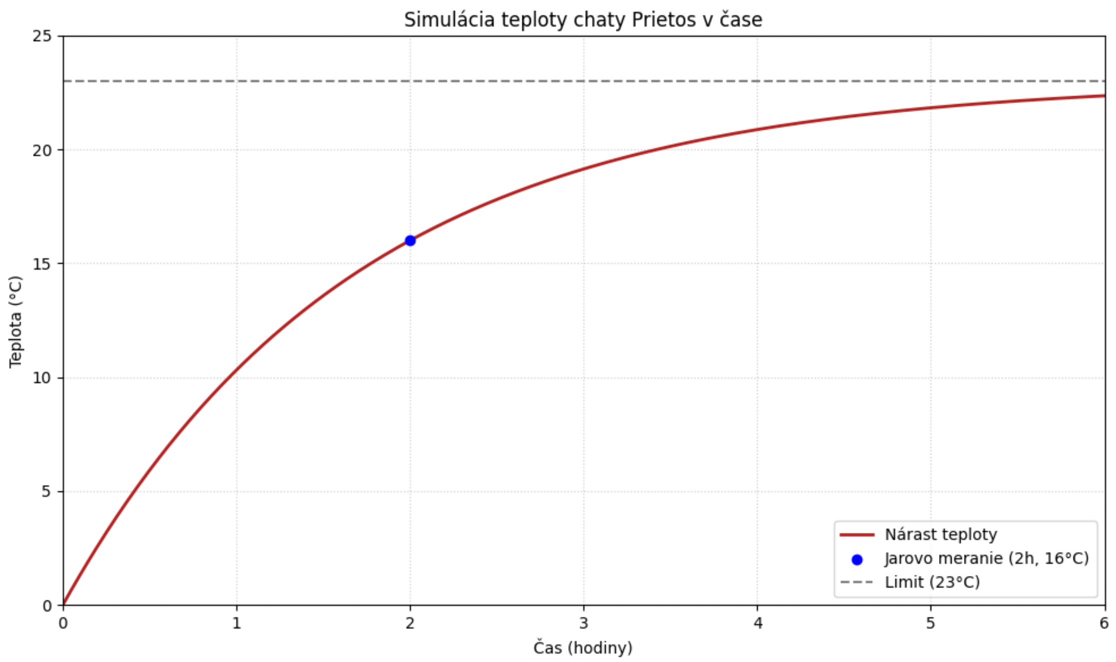
[9] Takéto riešenie zďaleka presahuje učivo strednej školy. Je to súčasť pokročilej vysokoškolskej matematiky, a preto obsahuje veľa komplexných a zložitých myšlienok. V tomto vzoráku sa preto zameriame len na technický aspekt a poriadne vysvetlenie postupu necháme na vysokoškolskú prednášku.

Druhá podmienka je automaticky splnená tvarom, v akom riešenie hľadáme. Finálny vzťah teda dostaneme v tvare

$$T(t) = T_{\max} + (T_{\text{out}} - T_{\max})e^{-\frac{k}{C}t} = T_{out} + (T_{\max} - T_{\text{out}})\left(1 - e^{-\frac{k}{C}t}\right).$$

Tepelná kapacita C je stále neznáma, no teraz môžeme dosadiť Jarove meranie po 2 hodinách (t = 7200 s), kedy nameral teplotu 16 °C. V takom prípade vieme z predchádzajúcej rovnice vyjadriť C, čo je jediná neznáma. Dostávame preto priamo výpočtom C = 263,149 kJ/K.

Pre vizualizáciu prikladáme nasimulovaný graf, ako teplota v chate narastá v čase:

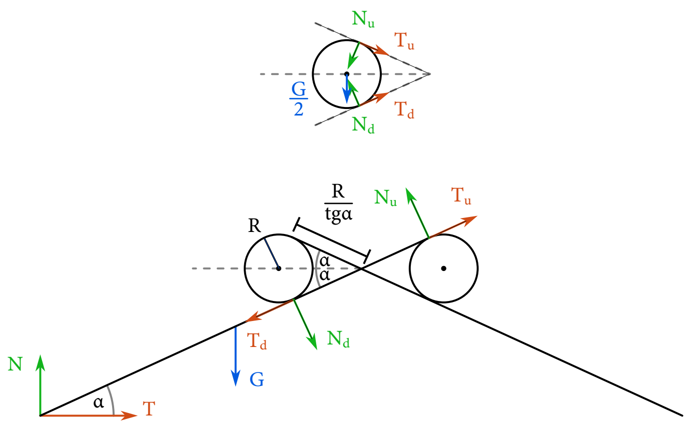


1.7 Tomášov most

vzorák **MatusH**, opravoval **MatusH**

Úloha od nás žiada nájdenie statického riešenia (ak existuje). Budeme preto postupovať, ako keby riešenie existovalo, a ak sa v procese vyskytne problém, tak vieme, že tento predpoklad bol nepravdivý. Aby išlo naozaj o statickú situáciu, musia byť výslednice všetkých síl a momentov síl na jednotlivé brvná nulové. Brvien máme dohromady síce šesť, no vďaka symetrii sú sily pôsobiace na dve horizontálne (modré a fialové) rovnaké, len odzrkadlené cez vertikálnu rovinu rovnobežnú s týmito brvnami. Preto nám stačí rátať sily len pre jedno z nich. Rovnako to vieme povedať o zvyšných štyroch.

Keď už vieme, čo ideme rátať, začneme náčrtom so zakreslenými silami. Ten bude vyzerať ako na obrázku. Hrúbku vertikálneho brvna $2R$ sme zanedbali, nakoľko $L \gg R$. Červené šípky značia sily pôsobiace na horizontálne brvno a zelené na vertikálne brvno (vo vertikálnej rovine). Nie je dôležité, či sme smery trecích síl určili dobre, lebo ak náhodou nie, tak nám akurát na konci výjde daná sila záporná. Dôležité však je, že trecia sila pôsobiaca na horizontálne brvno v dôsledku kontaktu s vertikálnym má opačný smer, ako trecia sila pôsobiaca na vertikálne brvno v dôsledku rovnakého kontaktu.



Obrázok 1.7.1: *Náčrt mosta a síl pôsobiacich na brvná. Červenou sú znázornené sily pôsobiace na horizontálne brvno a zelenou na vertikálne.*

Po určení všetkých síl môžeme napísať všetky relevantné rovnice:

- horizontálny smer, horizontálne brvno
$$(T_u + T_d)\cos\alpha - (N_u + N_d)\sin\alpha = 0, \tag{1.7.1}$$
- vertikálny smer, horizontálne brvno
$$(N_d - N_u)\cos\alpha + (T_d - T_u)\sin\alpha - G/2 = 0, \tag{1.7.2}$$
- rotácia, horizontálne brvno
$$T_u R - T_d R = 0, \tag{1.7.3}$$
- horizontálny smer, vertikálne brvno
$$T + (T_u - T_d)\cos\alpha + (N_d - N_u)\sin\alpha = 0, \tag{1.7.4}$$
- vertikálny smer, vertikálne brvno
$$N - G + (N_u - N_d)\cos\alpha + (T_u - T_d)\sin\alpha = 0, \tag{1.7.5}$$
- rotácia, vertikálne brvno
$$-\frac{L}{2}G\cos\alpha - \left(L - \frac{2R}{\tan\alpha}\right)N_d + LN_u = 0, \tag{1.7.6}$$
kde $G = Mg$. Bod, okolo ktorého sme počítali momenty síl, sme zvolili ležiaci na osi brvna pre horizontálne brvno a bod dotyku so zemou pre vertikálne brvno.

Toto je sústava šiestich rovníc o šiestich neznámych N, T, T_u, T_d, N_u, N_d. Riešenie samotnej sústavy tu nebudeme predvádzať, nakoľko nejde o fyzikálne zaujímavú vec a dá sa poprípade spraviť aj za pomoci online nástrojov.

Možno sa divíte, prečo sme nenapísali rovno $T_u = f N_u$. Je to preto, lebo pre treciu silu vo všeobecnosti neplatí rovnosť, ale nerovnosť $T \leq f N$. To znamená, že aj keď $T_u = T_d$ z 1.7.3, tak nemusí platiť $N_u = N_d$, čo by sme dostali ak by sme napísali rovnosť. Inými slovami, mali by sme šesť rovníc so štyrmi neznámymi a taká sústava vo všeobecnosti nemusí mať riešenie. V tomto prípade by ho naozaj nemala.

Vyriešením sústavy dostaneme

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{3G}{2},\\
T &= -\frac{G}{2}\tan\alpha,\\
N_d &= -\frac{aGl\tan\alpha\sec\alpha - GL\sin\alpha - GL\tan\alpha\sec\alpha}{4R},\\
T_d &= -\frac{Gl\tan^2\alpha\sec\alpha - GL\sin\alpha\tan\alpha - GL\tan^2\alpha\sec\alpha + GR\tan\alpha\sec\alpha}{4R},\\
N_u &= -\frac{Gl\tan\alpha\sec\alpha - GL\sin\alpha - GL\tan\alpha\sec\alpha + 2GR\sec\alpha}{4R},\\
T_u &= -\frac{Gl\tan^2\alpha\sec\alpha - GL\sin\alpha\tan\alpha - GL\tan^2\alpha\sec\alpha + GR\tan\alpha\sec\alpha}{4R}.
\end{aligned}
$$

Pomery T/N, T_d/N_d a T_u/N_u dávajú dolné ohraničenie na koeficient trenia f ako funkciu uhla α, pričom uhol zo zadania je 2α. Aby most držal, musí teda platiť $f > \max\{T/N, T_d/N_d, T_u/N_u\}$. Tým by sme mohli úlohu považovať za vyriešenú, nakoľko všetky sily poznáme (ako funkcie uhla), akonáhle nám niekto zadá M, L a R. Stačilo by nám teda len vygrafovať maximum týchto pomerov ako funkciu uhla a nájsť, pre ktorý uhol sa hodnota grafu rovná f.

V praxi by nás ešte mohlo zaujímať, ktorý z týchto pomerov je reálne ten limitujúci (maximálny). Ak si necháme vykresliť tieto pomery a hráme sa s parametrami brvien, dôjdeme k záveru, že pre „realistické“ brvná je to pomer T_u/N_u. Preto ak by sme brvná chceli nejako spájať/opracovávať, tak toto je očividne miesto, ktorým by sme mali začať.