

Riešenia 3. kola zimnej časti

3.1 Nebrzdené zabúdanie

vzorák <meno> a <meno>, opravoval  <meno>

3.2 Ponorené blúdenie

vzorák Mirko, opravoval  <meno>

Ako prvé by sme sa chceli ospravedlniť za chybnú formuláciu úlohy. Zadanie sa totiž pýta, akú dráhu Holanďan prešiel, teda sa pýta na dĺžku parabolickej dráhy. Aby sme ju zistili, bolo by treba použiť integrovanie. To samozrejme nebolo naším cieľom, miesto toho sme sa chceli spýtať len na vzdialenosť, ktorú Holanďan prejde, t. j. na jeho posunutie od začiatkovej pozície. Mnohí z vás úlohu riešili takto, a teda vám bola opravená, ako keby v zadaní bolo naozaj miesto slova „dráha“ slovo „vzdialenosť“. Tí z vás, ktorí ste sa pokúšali zrátať dĺžku parabolickej dráhy (integrálom) ste dostali 9 bodov, ak ste v postupe riešenia úlohy do začiatku integrovania nespravili žiadnu chybu, a teda ste správne zráтали celý zvyšok úlohy. Ak vám boli strhnuté body, boli strhnuté za chyby spravené v tej časti postupu, ktorý bolo treba spraviť bez ohľadu na to, či počítame dráhu alebo vzdialenosť. Ospravedľujeme sa za spôsobené neprijemnosti.

Podme už teraz na samotné riešenie úlohy. Aby sme zistili, o akú vzdialenosť sa Holanďan posunul, potrebujeme vedieť, akú vzdialenosť prešiel vo vertikálnom a akú vzdialenosť prešiel v horizontálnom smere. Vo vertikálnom je to jednoduché – kým sa sťažnosť nezačal vynárať, posunul sa o vzdialenosť h . No aby sme zistili, o koľko sa posunul v horizontálnom smere, potrebujeme vedieť okrem toho, akou rýchlosťou sa hýbal (to vieme, to je v_x) aj čas, ako dlho sa pohyboval.

Označme si tento čas t . Vieme, že sa hýbal presne tak dlho, ako dlhu mu trvalo, aby sa jeho sťažnosť začal vynárať. To, ako dlho mu to trvalo je samozrejme ovplyvňované tým, aká sila naňho pôsobí smerom nahor. Podme si teda túto silu vyrátať. Vieme, že smerom nadol na Holanďana pôsobí tiažová sila, zatiaľ čo smerom nahor naňho pôsobí vztlaková. Výsledná sila smerom nahor teda bude

$$F = F_{vz} - F_g.$$

Dosaďme si za obe sily hodnoty zo zadania, pričom si označme objem Holanďana, ktorý nepoznáme, V_T a jeho hmotnosť m_T . Potom máme

$$F = V_T \cdot \rho_v \cdot g - m_T \cdot g,$$

$$F = V_T \cdot \rho_v \cdot g - V_T \cdot \rho_T \cdot g,$$

$$F = V_T \cdot g \cdot (\rho_v - \rho_T).$$

Teraz nás zaujíma, aké zrýchlenie táto sila spôsobí. To určíme z druhého Newtonovho zákona ako $a = F/m$, čiže

$$a = \frac{F}{m_T},$$

$$a = \frac{V_T \cdot g \cdot (\rho_V - \rho_T)}{V_T \cdot \rho_T},$$

$$a = \frac{g \cdot (\rho_V - \rho_T)}{\rho_T}.$$

Je super, že sa nám vykrátil objem Holanďana, keďže ten ani nemáme zadany. Teraz už nám len stačí pomocou tohto zrýchlenia zistiť, ako dlho bude Holanďanovi trvať, než sa začne vynárať. Na to použijeme vzorec na rovnomerne zrýchlený pohyb (pamätajte, že sa teraz pozeráme len na vertikálny smer). Označme si čas, kým sa Holanďan začne vynárať t_1 , čo znamená, že

$$h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2,$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{a}},$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{\frac{g \cdot (\rho_V - \rho_T)}{\rho_T}}},$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot \rho_T}{g \cdot (\rho_V - \rho_T)}}.$$

Keď už poznáme čas, vieme si určiť, ako dlho sa Holanďan pohyboval v horizontálnom smere. Vzdialenosť s_x bude proste $s_x = v_x \cdot t$, teda

$$s_x = v_x \cdot t_1,$$

$$s_x = v_x \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot \rho_T}{g \cdot (\rho_V - \rho_T)}}.$$

Teraz už máme vyjadrenú vzdialenosť aj vo vertikálnom smere (h), aj v horizontálnom (s_x). Celkovú vzdialenosť, o ktorú sa Holanďan posunie si teraz vieme vypočítať pomocou Pytagorovej vety ako preponu v trojuholníku so stranami h a s_x . Označme si túto vzdialenosť d , ktorá je rovná

$$d = \sqrt{h^2 + s_x^2},$$

$$d = \sqrt{h^2 + \left(v_x \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot \rho_T}{g \cdot (\rho_V - \rho_T)}} \right)^2},$$

$$d = \sqrt{h^2 + v_x^2 \cdot \frac{2 \cdot h \cdot \rho_T}{g \cdot (\rho_V - \rho_T)}}.$$

To je teda vzdialenosť, o ktorú sa Holanďan posunie.

Dodatok: Podme si ešte doplniť aj to, ako by riešenie vyzeralo, keby sa pýtame na dráhu. Vtedy by sme si najprv potrebovali vyjadriť rýchlosť, ktorou sa Holanďan hýbe v každom momente. V horizontálnom smere sa Holanďan hýbe rýchlosťou v_x , vo vertikálnom si jeho rýchlosť v akomkoľvek čase t vieme vyjadriť ako $v_y = a \cdot t$. Jeho celkovú rýchlosť v čase t teda vyrátame pomocou Pytagorovej vety ako

$$v = \sqrt{v_x^2 + (at)^2},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + a^2 \cdot t^2}.$$

Teraz už len stačí zintegrovať túto rýchlosť podľa času od začiatku pohybu Holanďa až do času t_1

$$s = \int_0^{t_1} \sqrt{v_x^2 + a^2 \cdot t^2} dt.$$

Zintegrovanie tohto výrazu (čím by bolo treba zakončiť riešenie, keby sme počítali dráhu) nie je tak úplne krátky proces, preto ho v záujme dĺžky tohto vzoráku necháme na čitateľovi.

3.3 Tepelné krúženie

vzorák MatusH, opravoval MatusH

Pri riešení budeme potrebovať stavovú rovnicu ideálneho plynu. V tomto prípade nás nebudú zaujímať číselné výsledky, ale len kvalitatívne. Preto pre zjednodušenie budeme robiť úvahy s plynom, pre ktorý platí $Nk_B = 1$. Stavová rovnica bude mať tvar

$$pV = Nk_B T = T. \quad (3.3.1)$$

Ako druhé budeme potrebovať nejako zapísať, že ide o kruhový dej. Ak si zoberieme napríklad kruhový dej v p - V diagrame, tak všetky body, cez ktoré bude prechádzať, musia mať rovnakú vzdialenosť od nejakého vybraného bodu (stredu kružnice). Tento fakt vieme matematicky zapísať ako rovnicu kružnice

$$(p - p_0)^2 + (V - V_0)^2 = R^2, \quad (3.3.2)$$

kde bod (p_0, V_0) je stred kružnice a R je jej polomer. Tento výraz sa nám ako fyzikom nemusí pozdávať, lebo vyzerá, že sčítavame tlak s objemom a dostaneme niečo bezrozmerné, čo až kričí rozmerovým problémom. V tomto prípade to ale nie je problém, lebo v tejto rovnici chápeme p a V čisto matematicky ako súradnice.¹

Ako prekreslíme dej, ktorého body spĺňajú rovnicu 3.3.2? Pozrime sa najskôr, čo nám tá rovnica hovorí. Dáva nám podmienku, ktorá musí platiť pre body (p, V) . Ako ale vieme, tieto body opisujú rôzne stavy, v ktorých sa plyn bude počas deja nachádzať. Preto tá istá podmienka musí platiť aj pre body (p, T) a (V, T) . Aby sme ich ale vedeli nakresliť, musíme rovnicu 3.3.2 prepísať do premenných p, T , resp. V, T . Na to nám poslúži stavová rovnica ideálneho plynu 3.3.1. Vieme si teda vyjadriť, že v p - T diagrame budú body spĺňať rovnicu

$$(p - p_0)^2 + \left(\frac{T}{p} - V_0\right)^2 = R^2$$

¹Premyslite si, že kvôli tomu by to nebola pre všetkých kružnica. Keby rovnaký dej niekto prekreslil v iných jednotkách (napríklad by len m^3 zamenil za litre), nedostal by zrazu kružnicu, ale elipsu.

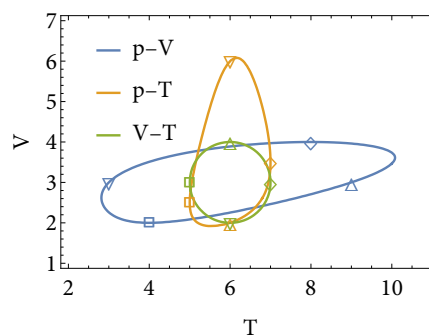
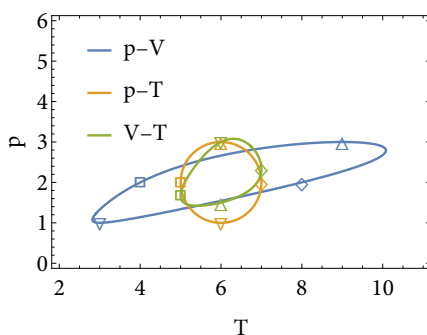
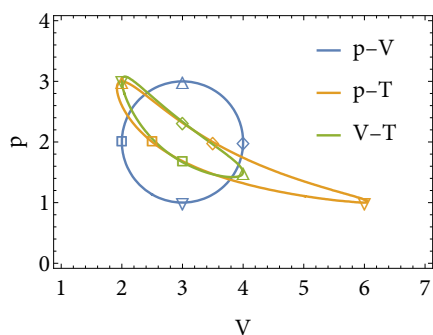
a vo V - T diagrame

$$\left(\frac{T}{V} - p_0\right) + (V - V_0)^2 = R^2.$$

Na vykreslenie bodov, ktoré spĺňajú takúto rovnicu, vieme použiť grafický nástroj podľa preferencií.² Pri prekresľovaní by sme sa mali ešte zamyslieť nad smerom, v ktorom dej prebieha. Na to nám stačí zaznačiť, kam sa prekreslia 4 konkrétne body, a tie nám už určia, či sa zmenila orientácia. Z diagramov vidíme, že orientácia sa mení vždy pri V - T diagrame.³

Pri vykresľovaní musíme ešte nastaviť parametre p_0 , V_0 a R . My sme pre jednoduchosť položili $p_0 = 2$, $V_0 = 3$ ($T_0 = 6$) a $R = 1$. Aby sme ešte boli v zhode s konvenciou, na y -ovú os dávame veličinu, ktorá je prvá v názve diagramu. Na obrázkoch môžeme vidieť dej, ktorý je kruhový v p - V diagrame prekreslený do zvyšných diagramov modrou.

Úplne analogicky skonštruujeme aj ostatné prekreslenia.



3.4 Výškové zvečnenie

vzorák <meno> a <meno>, opravoval  <meno>

3.5 Výstrelkové hútanie

vzorák <meno> a <meno>, opravoval  <meno>

3.6 Čarovné drôtenie

vzorák MatusH, opravoval MatusH

3.7 Výbušné snívanie

vzorák Tomáš, opravoval Tomáš

Keďže simulovať pohyb úlomkov je jednoduchšie ako riešiť nehomogénne diferenciálne rovnice, je jasné, ktorý spôsob riešenia si vyberieme. Bude to úplne najjednoduchšia **Eulerova metóda**. Tá nám hovorí, že ak poznáme v čase t zrýchlenie úlomka $\mathbf{a}(t)$, tak ak úlomok mal v danom čase rýchlosť $\mathbf{v}(t)$ a polohu $\mathbf{r}(t)$, tak o malý čas Δt neskôr už mal rýchlosť

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}(t) \Delta t$$

a polohu

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t) \Delta t.$$

²Jednoduché na použitie sú napríklad [Desmos](https://www.desmos.com/) alebo [GeoGebra](https://www.geogebra.org/).

³Samozrejme, toto vieme odvodiť aj na základe úvah. Vyskúšajte si to. Pomocou týchto úvah vieme povedať, že k takémuto otočeniu bude dochádzať pri každom deji a nie len kruhovom.

Na malom časovom úseku sme teda nejaký komplikovaný pohyb nahradili rovnomerným priamočiarym. A potom ak chceme poznať polohu a rýchlosť v čase $2 \Delta t$, tak budeme vychádzať z hodnôt v čase Δt . Ak zvolíme časový krok dostatočne malý, tak naše numerické riešenie dosiahne nejakú presnosť, ktorú požadujeme. A to je všetko. Jednoduché, však?

Doteraz sme veličiny zapisovali všeobecne ako vektory, ale teraz si ich rozdelíme na zložky. Počiatočná poloha všetkých úlomkov je rovnaká. Danú máme výšku h a vodorovnú súradnicu zvolíme nulovú, čiže

$$x(0) = 0 \quad \text{a} \quad y(0) = h.$$

Výbuchom dostanú všetky úlomky hybnosť Δp . Každý má rovnakú hmotnosť m , čiže úlomky výbuch urýchlil na rýchlosť $\Delta p/m$ voči ponorke. Tá išla rýchlosťou u voči vode, ktorá ide rýchlosťou v voči dnu. Preto počiatočné zložky rýchlosti sú

$$v_x(0) = u + v + \frac{\Delta p}{m} \cos \alpha \quad \text{a} \quad v_y(0) = \frac{\Delta p}{m} \sin \alpha,$$

kde α je uhol, pod ktorým úlomok vyletel, rátaný v kladnom smere od smeru rýchlosti ponorky. Ohľadom zrýchlenia použijeme Stokesov zákon $\mathbf{F} = -6\pi\mu R\mathbf{v}$, ktorý nám umožňuje vypočítať odporovú silu pôsobiacu na guľu polomeru R pohybujúcu sa rýchlosťou v voči kvapaline s dynamickou viskozitou μ . Zrýchlenie je $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ a guľa s hmotnosťou m má polomer $R = \sqrt[3]{3m/(4\pi\rho)}$, kde ρ je hustota gule. Okrem odporovej sily pôsobia ešte gravitačná a vztlaková v zvislom smere. Dokopy teda máme vo vodorovnom smere

$$a_x(t) = \frac{-6\pi\mu\sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}(v_x(t) - v)}{m}.$$

Rozdiel $v_x(t) - v$ je vodorovná zložka relatívnej rýchlosti úlomku voči vode. Pre zvislý smer máme

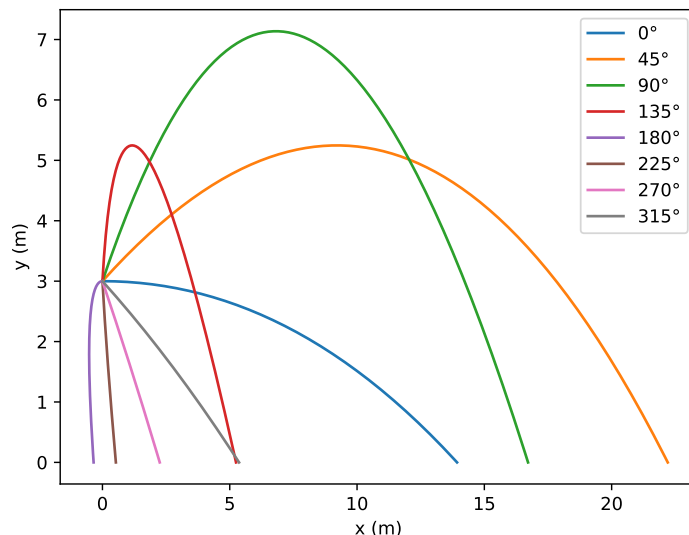
$$a_y(t) = \frac{-6\pi\mu\sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}v_y(t)}{m} - g + \frac{\rho_v}{\rho}g,$$

kde posledný člen je pochádza zo vztlakovej sily.

Časové kroky pre každý úlomok vykonávame, kým platí $y > 0$, teda že je nad dnom. Ak táto podmienka prestane platiť, tak pre aktuálne hodnoty vypočítame vzdialenosť od miesta výbuchu Pytagorovou vetou $d = \sqrt{x^2 + h^2}$.

Pre hodnoty $h = 3 \text{ m}$, $v = 6 \text{ m/s}$, $u = 2 \text{ m/s}$, $\mu = 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ Pas}$ (voda), $m = 1 \text{ kg}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ (ocel'), $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ a $\Delta p = 10 \text{ kgm/s}$ dostávame, že ak si celých 360° rovnomerne rozdelíme na 1000 uhlov α , tak najďalej doletel úlomok, ktorý bol vyletel pod uhlom $52,61^\circ$, a to konkrétne do vzdialenosti 30,28 m.

Na obrázku 3.7.1 možno vidieť dráhy ôsmich vybraných úlomkov s rôznymi uhlami α . Aby bolo vidno unášavé pôsobenie vody, použili sme preň tisíc násobok dynamickej viskozity vody.



Obrázok 3.7.1: Dráhy ôsmich vybraných úlomkov

Kód riešiaci túto úlohu takisto prikladáme.

```
import numpy as np                                # kniznica s matematickymi funkciami

h = 3                                              # vyska nad dnom
v = 6                                              # rychlost vody voci dnu
u = 2                                              # rychlost ponorky voci vode
visk = 8.9e-4                                    # dynamicka viskozita vody
m = 1                                              # hmotnost guliciek
rho = 7850                                       # hustota guliciek
R = np.cbrt(3*m / (4*np.pi*rho))               # polomer guliciek
rhov = 1000                                      # hustota vody
dt = 0.0001                                      # casovy krok
g = 10                                            # gravitacne zrychlenie
dp = 10                                          # udelena hybnost
vp = dp/m                                        # udelena rychlost

vzdialenosti = []                               # zoznam na ukladanie vzdialenosti od miesta vybuchu
uhly = np.linspace(0, 360, 1000)               # pocitame pre 1000 uhlov medzi 0 a 360 stupnami
for a in uhly:
    # pociatocna poloha
    x = 0
    y = h
    # pociatocna rychlost
    vx = u + v + vp*np.cos(np.radians(a))
    vy = 0 + vp*np.sin(np.radians(a))

    # simulujeme, dokym je gulicka nad dnom
    while(y > 0):
        ax = -6*np.pi*visk*R*(vx - v)/m
        ay = -6*np.pi*visk*R*vy/m - g + rhov/rho*g
        vx = vx + ax*dt
        vy = vy + ay*dt
        x = x + vx*dt
        y = y + vy*dt
```

```
vzdialenosti.append(np.sqrt(x**2 + h**2)) # ulozime vzdialenost od miesta vybuchu  
  
index = np.argmax(vzdialenosti) # index najvacsej hodnoty v zozname vzdialenosti  
print(f"Najvacsiu vzdialenost {vzdialenosti[index]} m presla gulicka vyletevsia pod uhlom {uhly[index]}°.")
```

3.8 Konsekvenčné meranie

vzorák <meno> a <meno>, opravoval  <meno>