

Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Letí, letí, všetko letí: lietadlo letí!

vzorák MatusH, opravoval Banán

Pozrime sa dôkladnejšie, ako to vyzerá pri pristávaní lietadla. Lietadlo vysunie kolesá, ktoré sa netočia.¹ Keď lietadlo pristáva, tak vo svojej rýchlosti (rádovo nejaké stovky kilometrov za hodinu) sa dotkne pristávacej dráhy netočiacimi sa kolesami. Na kolesá teda začne pôsobiť trecia sila od pristávacej dráhy. V dôsledku tejto sily sa kolesá postupne roztočia na takú rýchlosť, aby neprešmykovali. Dovtedy však ku prešmykovaniu prichádza, čo my môžeme pozorovať ako dym idúci od kolies. Tento dym vlastne nie je nič iné ako malé čiastočky pneumatík, ktoré sa v dôsledku šmyku odtrhnú z pneumatík. Akonáhle kolesá dosiahnu takú rotáciu, aby šmyk prestal, dym sa prestane tvoriť. Prakticky úplne rovnako vzniká dym aj pri autách kolies keď vodič náhle dupne na plyn, čo je scéna veľmi obľúbená filmovým priemyslom.

2.2 Letí, letí, všetko letí: ťažisko letí!

vzorák MatusH, opravoval Stano

Najskôr sa zamyslime, ako sa počíta poloha ťažiska. Na internete sa dá nájsť vzorček, no my si ho vyskúšame odvodiť.

Ťažisko je taký bod, že ak by sme zavesili objekt v tomto bode v gravitačnom poli, tak by sa nehýbal, čo znamená, že momenty síl od všetkých hmotných elementíkov by sa navzájom vynulovali. Keďže sa musí celý vynulovať, tak aj každá z jeho zložiek. Zapísané v rovnici v smere x dostaneme

$$0 = \sum_i (x_i - X) m_i g_x,$$

kde sme presčítali cez momenty síl od všetkých elementov telesa, ktoré číslujeme indexom i . Ako X sme označili x -ovú polohu ťažiska, x_i označuje x -ovú polohu i -teho elementu s hmotnosťou m_i a g_x priemet gravitačného zrýchlenia do x -ovej osi. Z tejto rovnice teraz vieme vyjadriť X ako

$$X = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum_i m_i}.$$

Najskôr sa zamyslíme, v ktorom smere sa bude hýbať ťažisko. Keďže sa ľudia premiestňujú len z pravej strany na ľavú, tak aj ťažisko sa bude pohybovať len v smere vpravo-vľavo. Ak tento smer nazveme x -ovým, tak vidíme, že sa zmení len x -ová súradnica každého človeka. Celý problém teda môžeme zvrhnúť na jednorozmerný prípad.

Keďže na začiatku sú ľudia rozmiestnení rovnomerne, ťažisko musí zo symetrie byť v strede. Povedzme, že stred bude v počiatku. Aby sme vedeli, o koľko sa ťažisko posunulo, musíme zistiť ešte hodnotu X po tom, ako sa ľudia premiestnili doľava.

¹Lietadlá totiž nemajú poháňané kolesá, čo je aj dôvod, prečo nevedia cúvať a musia byť tlačené.

V tomto momente sa už musíme pozrieť na konkrétnu situáciu. Airbus A320 má 31 radov po 3 miesta vpravo aj vľavo. Jeho šírka je asi 4 m, takže priemerne bude človek vzdialený 1 m od počiatku. V tomto prípade môžeme uvažovať priemernú vzdialenosť, lebo moment sily ktorým pôsobí jeden človek závisí od jeho polohy lineárne.

Máme teda $3 \cdot 31$ ľudí, pričom nech každý váži približne 80 kg. Dohromady teda ľudia vážia asi 7500 kg. Maximálna vzletová hmotnosť Airbusu A320 je asi 75 000 kg.² Vidíme, že 10 % jeho hmotnosti sa posunie o meter. Ak by sme teraz tieto hodnoty dosadili do vzorca, ktorý sme odvodili, zistíme, že ťažisko sa posunie asi o 10 cm.

2.3 Letí, letí, všetko letí: mostík letí!

vzorák Matko, opravoval Matko

Vzorové riešenie tejto úlohy pribudne čoskoro.

2.4 Letí, letí, všetko letí: sopranistka letí!

vzorák Marek, opravoval Marek

Úlohu najskôr zjednodušíme. Zanedbávajme odpor vzduchu a sopranistku považujeme za bodový zdroj zvuku s frekvenciou $f_0 = 1000$ Hz. Otázkou je, ako dlho má padať, aby sme počuli frekvenciu $f = 900$ Hz, lebo ladička funguje tak, že rezonancia (predstavte si ju ako rozkmitanie ladičky) nastáva vtedy, keď na ňu dopadá zvuk rovnakej frekvencie, ako je frekvencia, na ktorú je ladená (pričom bežne sa používa naopak, teda zvuk s takouto frekvenciou vytvára, keď ju rozkmitáme). Prečo by ale mal zvuk počas pádu zdroja meniť frekvenciu? Odpoveďou je Dopplerov jav.

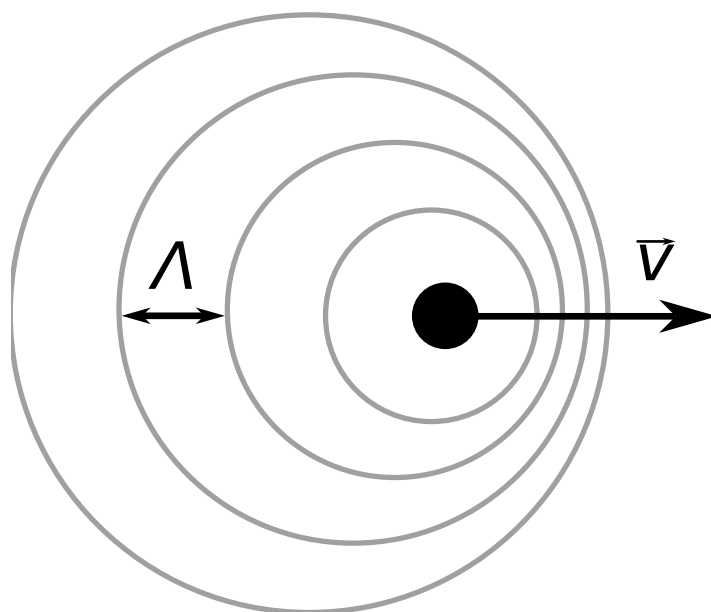
To, čo vnímame ako zvuk, je iba rýchlo sa meniaci tlak vzduchu v našom okolí. Môžeme si ho teda znázorniť ako oblasti vyššieho tlaku šíriace sa od zdroja ako sústredné sférické plochy. Je zrejmé, že medzi každou susednou dvojicou oblastí vyššieho tlaku je oblasť s nižším tlakom. Frekvencia potom číselne vyjadruje, koľkokrát za sekundu prejde určitým bodom priestoru oblasť s vyšším tlakom. Ďalej ako vlnovú dĺžku λ definujeme vzdialenosť dvoch susedných maxím (rovnako dobre by fungovala aj definícia s minimami) a periódu T ako čas, za ktorý sa zvuková vlna dostane do rovnakej fázy, čiže ak na začiatku merania bola v maxime, ide o čas, za ktorý k nám príde ďalšie maximum. Maximum považujeme za niečo, čo sa pohybuje v priestore, preto môžeme písať

$$\lambda = cT, \quad (2.4.1)$$

kde c je rýchlosť pohybu vlny priestorom, čo je v našom prípade rýchlosť zvuku.

Čo by sa zmenilo, keby sa zdroj pohyboval? Predstavte si to tak, že zdroj vytvorí jednu oblasť s vyšším tlakom. Ak by sa nehýbal, tak za čas T vytvorí ďalšiu, ktorá bude od predošlej vzdialená o λ , čo platí pre všetky, preto vytvárajú koncentrické sférické plochy, ako bolo uvedené vyššie. Ak sa ale hýbe, v smere pohybu bude vzdialenosť medzi maximami kratšia a za zdrojom dlhšia. Ide o Dopplerov jav. V našom prípade sa zdroj pohybuje od nás, preto sa budeme zaoberať tou dlhšou vzdialenosťou, ktorú označíme Λ (veľká lambda). Keby sa zdroj pohyboval konštantnou rýchlosťou, frekvencia zvuku za ním by bola tiež konštantná.

²https://en.wikipedia.org/wiki/Airbus_A320_family#Specifications


Obrázok 2.4.1: Schéma k odvodeniu výpočtu Λ

Ak ste sa zamysleli, že keď okolo Vás prejde trúbiace auto, frekvencia zvuku sa mení, máte pravdu. No to je spôsobené tým, že keď sa k Vám približuje, ste v tej oblasti, kde sú maximá viac stlačené, čo sa postupne zmení na stav, kedy sa od Vás vzdáľuje a ste v oblasti s roztiahnutými maximami. My sa ale v tejto oblasti nachádzame stále, lebo zdroj začal svoj pohyb pri nás a stále sa od nás po priamke vzdáľuje.

Teraz skúsme zistiť, ako určíme Λ . K λ v rovnici 2.4.1 ešte musíme pripočítať tú vzdialenosť, o ktorú sa zdroj posunul, kým vytvoril ďalšie maximum (podotýkame, že čas, ktorý zdroj potrebuje na vytvorenie maxima sa nemá dôvod meniť). Preto platí

$$\Lambda = cT + vT = (c + v)T, \quad (2.4.2)$$

kde v je rýchlosť, ktorou sa od nás vzdáľuje zdroj.

Frekvencia je veličina uvádzajúca počet opakovaní niečoho za sekundu, zatiaľ čo perióda (v našom prípade čas T) je veličina, ktorá vyjadruje, koľko času treba na jedno zopakovanie. Je zrejmé, že $f_0 = 1/T$ (čo sa dá vidieť aj z toho, aké majú tieto veličiny jednotky). Ako sme už písali, frekvencia zdroja sa nezmení (sopranistka je veľmi šikovná a stále spieva tou istou frekvenciou). Po dosadení do rovnice 2.4.2 dostaneme

$$\Lambda = \frac{c + v}{f_0}, \quad (2.4.3)$$

pričom na základe vzťahu 2.4.1 musí existovať také f (frekvencia, akú počujeme), aby platilo

$$\Lambda = \frac{c}{f}, \quad (2.4.4)$$

lebo z nášho pohľadu k nám prichádzajú vlny spĺňajúce túto podmienku (a o pohybe zdroja nemusíme nič vedieť). Ak dáme do rovnosti 2.4.3 a 2.4.4, dostaneme

$$\frac{c + v}{f_0} = \frac{c}{f} \implies f = f_0 \frac{c}{c + v}. \quad (2.4.5)$$

Drobnou úpravou, ktorú z dôvodu jednoduchosti prenechávame ako cvičenie čitateľovi, dostaneme

$$v = c \left(\frac{f_0}{f} - 1 \right). \quad (2.4.6)$$

Vieme, že pre voľný pád platia vzťahy

$$h = \frac{1}{2} g t^2, \quad (2.4.7)$$
$$v = g t,$$

kde t je čas pádu, v rýchlosť v tomto čase a h prejdená dráha. Triviálnou úpravou dostaneme

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (2.4.8)$$

Teraz dajme do rovnosti 2.4.5 a 2.4.8, z čoho po drobnej úprave dostaneme

$$h = \frac{c^2}{2g} \left(\frac{f_0}{f} - 1 \right)^2. \quad (2.4.9)$$

Po dosadení (rýchlosť zvuku vo vzduchu sa dá ľahko nájsť v tabuľkách alebo na internete) vyjde $h \approx 70$ m.

Niekomu by sa mohlo zdať zvláštne, prečo voláme frekvenciou niečo, čo sa stále mení (pretože zdroj neustále zrýchľuje). Keď si ale nájdeme tri za sebou idúce maximá, ich vzájomné vzdialenosti sa menia len minimálne, preto vieme uvažovať o tom, ako sa správa frekvencia.

Dobrou otázkou by bolo, či sme do doby pádu zahrnuli aj čas, za ktorý k nám prišiel zvuk so šplechnutím. Tým sa ale netreba znepokojovať, lebo z frekvencie zvuku vieme, aká bola rýchlosť pádu v okamihu dopadu, teda doba šírenia zvuku zo spodku studne k nám žiadnym spôsobom neovplyvní výsledok.

Historická poznámka

Galilei nemohol priamo merať čas voľného pádu, lebo v tej dobe nemali dosť presné stopky (hoci čas nejako odmerať mohol, na to, aby jeho meranie bolo zmysluplné, museli by telesá padať z veľmi veľkej výšky). To, že voľný pád je rovnomerne zrýchlený mohol experimentálne zistiť pomocou naklonenej roviny, lebo pohyb po nej je výrazne pomalší a aj menej kvalitné stopky vedia byť postačujúce (samozrejme, dalo by sa namietť, že to je ale úplne iný pohyb, no i napriek tomu sa z neho dozvedáme niečo zaujímavé). Pád zdroja zvuku konštantnej frekvencie môže byť dobrým nápadom, ako túto námietku obísť, hoci potom vie začať robiť problémy odpor vzduchu, ktorý sme zanedbali. A, samozrejme, Galilei je starší než Doppler.

2.5 Letí, letí, všetko letí: helikoptéra letí!

vzorák Daniel, opravoval Daniel

Hlavný rotor na vrchu helikoptéry sa otáča, aby vytváral vztlak a držal helikoptéru vo vzduchu. Pritom ale musí prekonávať odpor vzduchu, ktorý rotor spomaľuje. Aby sa teda rotor točil konštantnou rýchlosťou, musí naň helikoptéra pôsobiť konštantným momentom sily. Podľa 3. Newtonovho zákona potom na trup

helikoptéry pôsobí rovnaký moment sily opačným smerom od rotora. Zadný rotor pôsobí silou na chvost, aby tento moment vyrovnal.

Ak hlavný rotor pôsobí na helikoptéru momentom M , tak zadný rotor musí pôsobiť silou

$$F = \frac{M}{d},$$

kde d je vzdialenosť zadného rotora od ťažiska helikoptéry.

Vyskúšajme odhadnúť moment sily, ktorým pôsobí hlavný rotor. Pozrime sa pritom príspevok od jedného elementika rotora. Na ten musí pôsobiť helikoptéra momentom sily $m = Fr$, kde r je jeho vzdialenosť od stredu rotora a F odporová sila vzduchu. Vzdialenosť r vieme zapísať aj ako v/ω , kde v je jeho veľkosť rýchlosti a ω uhlová rýchlosť. Tým dostaneme súčin sily a rýchlosti. Keďže sú v rovnakom smere, tak vieme, že to je výkon potrebný na to, aby sa daný elementík točil konštantnou uhlovou rýchlosťou.

Ak teraz chceme celkový moment sily M , musíme sčítať elementíky cez celý rotor. Všetky ale majú rovnakú uhlovú rýchlosť a výkon, ktorý im dávame, je vlastne výkon celej helikoptéry (ak zanedbáme výkon potrebný na zadnú vrtuľu a prístroje na palube). Moment sily M vieme teda odhadnúť ako $M = P/\omega$, čím dostávame

$$F = \frac{P}{\omega d} = \frac{60}{2\pi} \frac{P}{f d},$$

kde sme F vyjadrili ako funkciu d , P a f čo sú otáčky za minútu.

Na základe dostupných údajov^{3 4 5 6 7} sme vyčíslil hodnoty pre 5 najvyrábanejších vrtuľníkov sveta⁸:

- Mil Mi-8: $F \approx 6,9$ kN
- Bell UH-1 Iroquois: $F = 2,4$ kN
- Bell 206 JetRanger: $F = 0,9$ kN
- Robinson R44: $F = 0,5$ kN
- Eurocopter AS350 Écureuil: $F = 1,7$ kN

2.6 Letí, letí, všetko letí: elektrón letí!

vzorák Jaro, opravoval Tomáš

Ako prvé si zavedme súradnicovú sústavu. Jej počiatok zvolíme v mieste, kde elektrón narazí do steny. x -ová os nech je vodorovná a leží na povrchu steny, y -ová nech je v smere pohybu elektrónu a z -ová je zvislá.

³https://www.flugzeuginfo.net/acdata_php/acdata_mi8_en.php

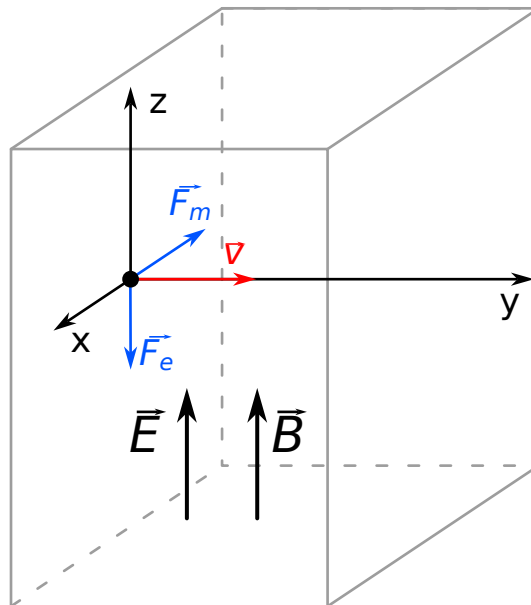
⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Bell_UH-1_Iroquois

⁵https://www.flugzeuginfo.net/acdata_php/acdata_206ab_en.php

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Robinson_R44

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Eurocopter_AS350

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_most-produced_rotorcraft



Obrázok 2.6.1: Elektrón v elektromagnetickej stene

Na elektrón pohybujúci sa v elektrickom poli pôsobí elektrická sila $F_e = e \cdot E$, kde e je náboj elektrónu a E je vektor intenzity elektrického poľa. Náboj elektrónu je záporný, preto ak intenzita má smer z -ovej osi, elektrická sila pôsobí proti smeru z -ovej osi.

Na elektrón pohybujúci sa v magnetickom poli rýchlosťou $\mathbf{v}$ pôsobí magnetická sila $\mathbf{F}_m = e \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, kde $\mathbf{B}$ je vektor magnetickej indukcie. Magnetická sila je daná vektorovým súčinom vektora rýchlosti a vektora magnetickej indukcie, preto je na každý z nich kolmá. Kolmosť na $\mathbf{B}$ znamená, že magnetická sila vždy pôsobí vo vodorovnej rovine. Kolmosť na $\mathbf{v}$ zasa značí, že magnetická sila nemení veľkosť rýchlosti, ale len jej smer – je dostredivou silou.

Pokiaľ sú vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{B}$ na seba kolmé, veľkosť magnetickej sily je jednoducho $F_m = |e|vB$. Komplikácie však spôsobuje prítomnosť elektrického poľa, ktoré elektrón urýchľuje vo zvislom smere, čoho dôsledkom je, že $\mathbf{v}$ a $\mathbf{B}$ už viac nie sú na seba kolmé. V takom prípade pre veľkosť magnetickej sily platí $F_m = |e|vB \sin \alpha$, kde α je uhol medzi vektormi $\mathbf{v}$ a $\mathbf{B}$. S pomocou jednoduchej trigonometrie však okamžite vidíme, že $v \sin \alpha =: v_v$ je vodorovná zložka rýchlosti. No vo vodorovnom smere pôsobí jedine magnetická sila, ktorá, ako sme už povedali, nemení veľkosť rýchlosti, ale len jej smer. Preto vodorovná zložka rýchlosti má stále rovnakú veľkosť rovnú počiatočnej rýchlosti elektrónu $v_v = v = \text{konšt.}$, a teda aj magnetická sila má konštantnú veľkosť.

Konštantnosť veľkosti magnetickej sily, ktorá je dostredivou silou, implikuje, že lokálny polomer krivosti priemetu trajektórie elektrónu do vodorovnej roviny je všade rovnaký, a teda elektrón vykonáva vo vodorovnej rovine pohyb po kružnici. Polomer tejto kružnice nájdeme z rovnosti veľkosti magnetickej a dostredivej sily:

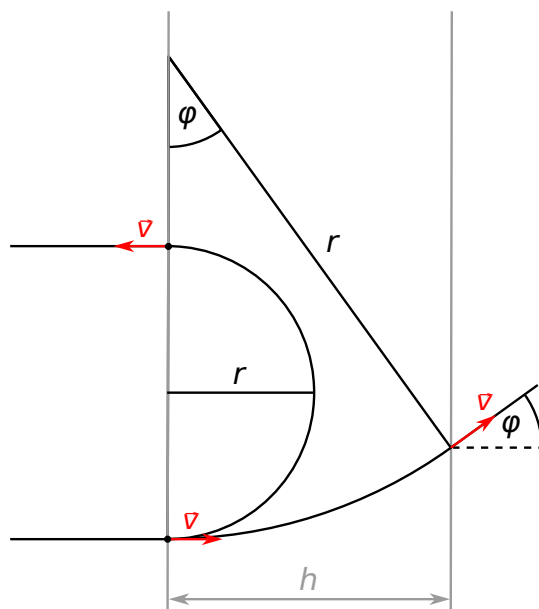
$$|e|vB = m \frac{v^2}{r} \implies r = \frac{mv}{|e|B},$$

kde m je hmotnosť elektrónu.

Počas celého krúživého pohybu navyše elektrón v dôsledku elektrickej sily ešte zrýchľuje vo zvislom smere. Veľkosť jeho zrýchlenia je $a_z = \frac{|e|E}{m}$, takže ak elektrón pobudol vo vnútri steny po dobu τ , za tento čas nabral vo zvislom smere rýchlosť $v_z = \frac{|e|E\tau}{m}$.

V tomto momente musíme uvážiť dva prípady:

- Ak je hrúbka steny h väčšia ako polomer krivosti priemetu trajektórie elektrónu do vodorovnej roviny r , elektrón opíše vo vodorovnej rovine polkružnicu a opustí stenu presne na tej istej strane, na ktorej do nej vošiel. Celé mu to bude trvať čas $\tau = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{|e|B}$ a zatiaľ nadobudne zvislú rýchlosť $v_z = \pi \frac{E}{B}$.
- Ak je hrúbka steny h menšia ako polomer krivosti priemetu trajektórie elektrónu do vodorovnej roviny r , elektrón opíše vo vodorovnej rovine len kružnicový oblúk daný stredovým uhlom φ , pre ktorý platí $r \sin \varphi = h$, čiže $\varphi = \arcsin \frac{h}{r}$, a opustí stenu na opačnej strane. To mu potrvá čas $\tau = \frac{\varphi r}{v} = \frac{m}{|e|B} \arcsin \frac{h|e|B}{mv}$ a zatiaľ nadobudne zvislú rýchlosť $v_z = \frac{E}{B} \arcsin \frac{h|e|B}{mv}$.



Obrázok 2.6.2: Trajektória elektrónu – pohľad zhora

Veľkosť rýchlosti, ktorú má elektrón v momente, keď vychádza zo steny, je jednoducho $v_{\text{exit}} = \sqrt{v^2 + v_z^2}$, kde v_z je zvislá zložka rýchlosti daná príslušnými vzťahmi pre jednotlivé prípady.

Ak sa neuspokojíme len s veľkosťou rýchlosti, ale chceme celý vektor, tak v prvom prípade to je jednoducho $\mathbf{v}_{\text{exit}} = (0; -v; -\pi \frac{E}{B})$. V druhom prípade je to dakus zložitejšie a musíme vodorovnú zložku rýchlosti rozložiť do kartézskych koordinátov. Ak tak urobíme, dostaneme $\mathbf{v}_{\text{exit}} = \left(-\frac{h}{r}v; \sqrt{1 - \left(\frac{h}{r}\right)^2}v; -\frac{E}{B} \arcsin \frac{h|e|B}{mv}\right)$.

2.7 Letí, letí, všetko letí: zrkadlo letí!

vzorák Jaro, opravoval Jaro

V prvom rade si ujasníme, prečo by malo zrkadlo vplyvom svietenia naň meniť svoju rýchlosť. Odpoveď sa skrýva v Dopplerovom jave. Ak sa zrkadlo pohybuje smerom k zdroju svetla, vníma prichádzajúcu vlnovú dĺžku ako kratšiu a takúto vlnovú dĺžku aj odráža. V takom prípade hovoríme o modrom posune. Ak sa

naopak hýbe smerom od zdroja, vníma vlnovú dĺžku prichádzajúceho svetla ako dlhšiu a túto vlnovú dĺžku odráža. Vtedy hovoríme o červenom posune.

Z kinderkvantovky však vieme, že kvantá svetla sú nositeľom hybnosti a ich hybnosť je tým väčšia, čím menšia je vlnová dĺžka, $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$, kde h je Planckova konštanta, resp. $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ je redukovaná Planckova konštanta, λ je vlnová dĺžka svetla a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ je jej zodpovedajúce vlnové číslo. Zrážka fotónu so zrkadlom je však izolovaná, takže ak sa mení hybnosť fotónu, musí sa podľa zákona zachovania hybnosti meniť aj hybnosť zrkadla, čiže jeho rýchlosť.

Keď už vieme, čo je vo veci, môžeme pristúpiť k počítaniu. Návod sme si už povedali. Uvažujme izolovanú zrážku fotónu so zrkadlom. Nech sa najskôr zrkadlo hýbe v smere pohybu fotónu. V takom prípade zákon zachovania hybnosti dáva

$$\hbar k_0 + mv_0 = -\hbar k_1 + mv_1,$$

kde k_0 je vlnové číslo fotónu pred zrážkou a k_1 po zrážke a v_0 rýchlosť zrkadla pred zrážkou a v_1 po zrážke. k_0 a v_0 poznáme zo zadania, k_1 a v_1 sú naše neznáme. Máme však len jednu rovnicu a dve neznáme, a tak potrebujeme ešte jednu rovnicu pridať.

Na pomoc sa nám hneď núka zákon zachovania energie. Fotón okrem hybnosti nesie aj energiu, $E = hf = \hbar\omega$, kde f je frekvencia svetla, resp. ω je jeho vlnová frekvencia. Zákon zachovania energie teda vyzerá nasledovne:

$$\hbar\omega_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \hbar\omega_1 + \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Z týchto dvoch rovníc možno postupnými úpravami vyjadriť neznáme vlnové číslo odrazeného svetla k_1 :

$$\begin{aligned}\hbar(\omega_0 - \omega_1) &= \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}m(v_1 - v_0)(v_1 + v_0), \\ \hbar(k_0 + k_1) &= m(v_1 - v_0).\end{aligned}$$

Predelením týchto dvoch rovníc navzájom dostaneme

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{k_0 + k_1} = \frac{1}{2}(v_1 + v_0).$$

Po prenasobení oboch strán tejto rovnice výrazom $2m$ a po dosadení za mv_1 zo zákona zachovania hybnosti dostávame

$$2m \frac{\omega_1 - \omega_0}{k_0 + k_1} - \hbar(k_0 + k_1) = 2mv_0.$$

Teraz ešte využijeme, že $\omega = kc$, kde c je rýchlosť svetla a po úprave dostaneme

$$2mc(k_0 - k_1) - \hbar(k_0 + k_1)^2 = 2mv_0(k_0 + k_1).$$

To je kvadratická rovnica s neznámou k_1 , ktorú možno napísať vo familiárnejšom tvare

$$k_1^2 + 2\left[\frac{m}{\hbar}(c + v_0) + k_0\right]k_1 - \frac{2m}{\hbar}(c - v_0)k_0 + k_0^2 = 0.$$

Jej riešením je⁹

$$k_1 = -\left[\frac{m}{\hbar}(c + v) + k_0\right] + \sqrt{\left[\frac{m}{\hbar}(c + v) + k_0\right]^2 + \frac{2m}{\hbar}(c - v)k_0 - k_0^2}.$$

Hľadaná zmena hybnosti zrkadla v dôsledku zrážky s fotónom letiacim rovnakým smerom je teda

$$\Delta p_1 = mv_1 - mv_0 = \hbar(k_0 + k_1),$$

kde k_1 je dané vyššie uvedeným výrazom.

Zmenu hybnosti v dôsledku zrážky s opačne letiacim fotónom dostaneme analogickým výpočtom s jednoduchou zámenou $k_0 \rightarrow -k_0$ a $k_1 \rightarrow -k_2$. Vo výsledku dostaneme

$$\Delta p_2 = -\hbar(k_0 + k_2),$$

kde

$$k_2 = -\left[\frac{m}{\hbar}(c - v) + k_0\right] + \sqrt{\left[\frac{m}{\hbar}(c - v) + k_0\right]^2 + \frac{2m}{\hbar}(c + v)k_0 - k_0^2}.$$

Na zrkadlo nám však nedopadá jeden fotón, ale prúd fotónov z každej strany. V jednom prípade dopadajú na zrkadlo rýchlosťou $c - v$, kde v je aktuálna rýchlosť zrkadla, a v druhom prípade rýchlosťou $c + v$.¹⁰ Nech n je dĺžková hustota fotónov, t. j. počet fotónov, ktorý sa nachádza v laserovom svetelnom zväzku na jednotku dĺžky. Potom na zrkadlo za čas Δt dopadá $\Delta N^\pm = n(c \pm v)\Delta t$ fotónov z jednotlivých strán, a teda zmena hybnosti zrkadla za jednotku času je

$$\begin{aligned} \frac{m\Delta v}{\Delta t} &= n(c - v)\hbar(k_0 + k_1) - n(c + v)\hbar(k_0 + k_2) \\ &= n\hbar[-2vk_0 + (c - v)k_1 - (c + v)k_2]. \end{aligned}$$

Ešte potrebujeme určiť hustotu fotónov vo svetelnom zväzku. Ak máme nerozbíhavý svetelný zväzok s intenzitou I a plochou prierezu S , tak hustota fotónov je

$$n = \frac{N}{\ell} = \frac{IS\Delta t}{\hbar\omega_0\ell} = \frac{IS\Delta t}{\hbar k_0 c \Delta t} = \frac{IS}{\hbar k_0 c^2}.$$

Po dosadení konečne dostávame hľadaný všeobecný vzťah pre zrýchlenie zrkadla

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{IS}{k_0 c^2 m} [-2vk_0 + (c - v)k_1 - (c + v)k_2],$$

kde k_1 a k_2 sú dané príslušnými výrazmi.

Teraz sa môžeme presunúť k nepovinnnej časti úlohy. Chceme zistiť, v akej vzdialenosti zrkadlo zastane. To znamená, že potrebujeme vyriešiť posledne uvedenú diferenciálnu rovnicu pre rýchlosť zrkadla a potom túto

⁹Vybrali sme riešenie so znamienkom „+“, pre ktoré dostávame kladné vlnové číslo, a nahradili sme počiatočnú rýchlosť zrkadla v_0 jeho rýchlosťou v ľubovoľnom čase v .

¹⁰Nenechajte sa zmiasť, že $c + v > c$. $c + v$ je relatívna rýchlosť pohybu zrkadla a fotónov. Žiadny z týchto objektov sa však sám o sebe nepohybuje rýchlosťou väčšou ako c , preto to nie je v rozpore so špeciálnou teóriou relativity.

rýchlosť preintegrovať. Uvedená diferenciálna rovnica je však príliš komplikovaná na to, aby sme ju dokázali presne analyticky vyriešiť.

Môžeme si však všimnúť, že vo výrazoch pre vlnové čísla k_1 a k_2 sa pod odmocninou vyskytujú výrazy $\left(\frac{c}{\hbar}\right)^2$, ktorých veľkosť je rádovo 10^{84} . Oproti tomu sú ostatné členy malé. To nám dáva nádej nájsť výrazy zjednodušiť. Využijeme pri tom aproximáciu $(1+x)^\eta \approx 1 + \eta x$ platnú pre $x \ll 1$. Alternatívne pre $A \gg b$ možno na základe toho odvodiť

$$(A+b)^\eta = A^\eta \left(1 + \frac{b}{A}\right)^\eta \approx A^\eta \left(1 + \eta \frac{b}{A}\right) = A^\eta + \eta A^{\eta-1} b.$$

Aplikovaním tejto aproximácie na výrazy pre vlnové čísla dostávame

$$k_1 \approx \frac{\frac{2m}{\hbar}(c-v)k_0 - k_0^2}{2\left[\frac{m}{\hbar}(c+v) + k_0\right]},$$

$$k_2 \approx \frac{\frac{2m}{\hbar}(c+v)k_0 - k_0^2}{2\left[\frac{m}{\hbar}(c-v) + k_0\right]}.$$

Tým sa nám výrazy značne zjednodušili, no nie dostatočne, aby sme rovnicu dokázali vyriešiť.

Môžeme si však všimnúť, že sa nám v menovateli stále vyskytuje výraz obsahujúci $\frac{c}{\hbar}$, ktorý je určite výrazne väčší než k_0 pre viditeľné svetlo, preto použijeme odvodenú aproximáciu po druhý raz. Dostaneme

$$k_1 \approx \frac{\frac{2m}{\hbar}(c-v)k_0 - k_0^2}{2\frac{m}{\hbar}(c+v)} \left[1 - \frac{k_0}{\frac{m}{\hbar}(c+v)}\right] = k_0 \left[\frac{c-v}{c+v} - \frac{k_0 \hbar}{2m(c+v)}\right] \left[1 - \frac{k_0 \hbar}{m(c+v)}\right],$$

$$k_2 \approx \frac{\frac{2m}{\hbar}(c+v)k_0 - k_0^2}{2\frac{m}{\hbar}(c-v)} \left[1 - \frac{k_0}{\frac{m}{\hbar}(c-v)}\right] = k_0 \left[\frac{c+v}{c-v} - \frac{k_0 \hbar}{2m(c-v)}\right] \left[1 - \frac{k_0 \hbar}{m(c-v)}\right].$$

Teraz si ešte všimnime, že výrazy obsahujúce $\frac{k_0 \hbar}{c}$ sú bezpochyby zanedbateľné oproti 1, alebo oproti $\frac{c-v}{c+v} \approx 1 \approx \frac{c+v}{c-v}$, teda ich možno vynechať, čím sa výrazy pre vlnové čísla výrazne zjednodušia

$$k_1 \approx k_0 \frac{c-v}{c+v}, \quad k_2 \approx k_0 \frac{c+v}{c-v}.$$

Tieto výrazy už možno dosadiť do vzťahu pre zrýchlenie,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{IS}{k_0 c^2 m} \left[-2vk_0 + \frac{(c-v)^2}{c+v} k_0 - \frac{(c+v)^2}{c-v} k_0 \right].$$

Tu si všimneme, že v menovateli $v \ll c$, preto použijeme našu aproximáciu po tretíkrát:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{IS}{c^2 m} \left[-2v + (c-v)^2 \frac{1}{c} \left(1 - \frac{v}{c} \right) - (c+v)^2 \frac{1}{c} \left(1 + \frac{v}{c} \right) \right] = \\ &= \frac{IS}{c^4 m} \left[-2vc^2 + (c-v)^3 - (c+v)^3 \right] = \\ &= -\frac{2vIS}{c^4 m} (4c^2 + v^2) \approx -\frac{8IS}{c^2 m} v. \end{aligned}$$

Konečne sme dostali diferenciálnu rovnicu dostatočne jednoduchú na to, aby sme ju dokázali vyriešiť. Je to známa rovnica, ktorá hovorí, že čím ide zrkadlo rýchlejšie, tým viac spomaľuje. Analogická rovnica je nám známa napríklad z jadrového rozpadu, takže vieme, že jej riešením bude exponenciálny pokles rýchlosti, $v(t) \approx v_0 e^{-\alpha t}$, kde koeficient α určíme tak, že toto riešenie dosadíme do diferenciálnej rovnice. Dostaneme $\alpha = \frac{8IS}{c^2 m}$, a teda

$$v(t) \approx v_0 e^{-\frac{8IS}{c^2 m} t}.$$

Vidíme, že zrkadlo bude stále spomaľovať, no nikdy úplne nezastane. Existuje však maximálna vzdialenosť, do ktorej sa v nekonečnom čase vie dostať. Túto vzdialenosť nájdeme preintegrovaním

$$s \approx \int_0^\infty v_0 e^{-\frac{8IS}{c^2 m} t} dt = \left[-\frac{v_0 c^2 m}{8IS} e^{-\frac{8IS}{c^2 m} t} \right]_0^\infty = \frac{v_0 c^2 m}{8IS}.$$

Po vyčíslení to dá $s \approx 1,125 \cdot 10^{18} \text{ m} \approx 119 \text{ ly}$.

Samozrejme, doplňujúcu úlohu sme mohli riešiť aj čisto numericky, ako nás nabáda zadanie. V takom prípade prevedieme diferenciálnu rovnicu na diferenčnú schému. Začneme s počiatočnými podmienkami $s = 0$ a $v = v_0$ a opakovane budeme vyčísľovať

$$s(t + \Delta t) = s(t) + v(t) \cdot \Delta t,$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a[v(t)] \cdot \Delta t,$$

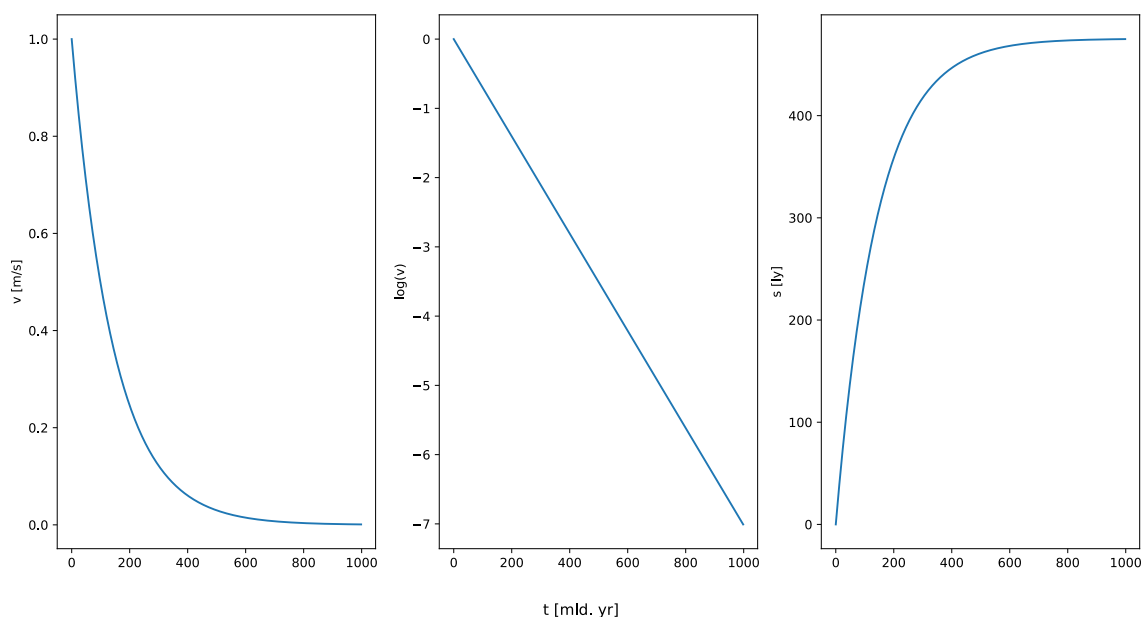
kde zrýchlenie a prislúchajúce rýchlosti $v(t)$ vieme vypočítať podľa nami odvodeného vzťahu.

Kumštom však je správne zvoliť veľkosť časového kroku Δt . Ak simulujeme deje, pri ktorých sa zmeny dejú rádovo v sekundách, časový krok volíme v zlomkoch sekúnd; ak máme deje, ktoré trvajú minúty, časový krok volíme v sekundách. Aký však máme charakteristický čas tu?

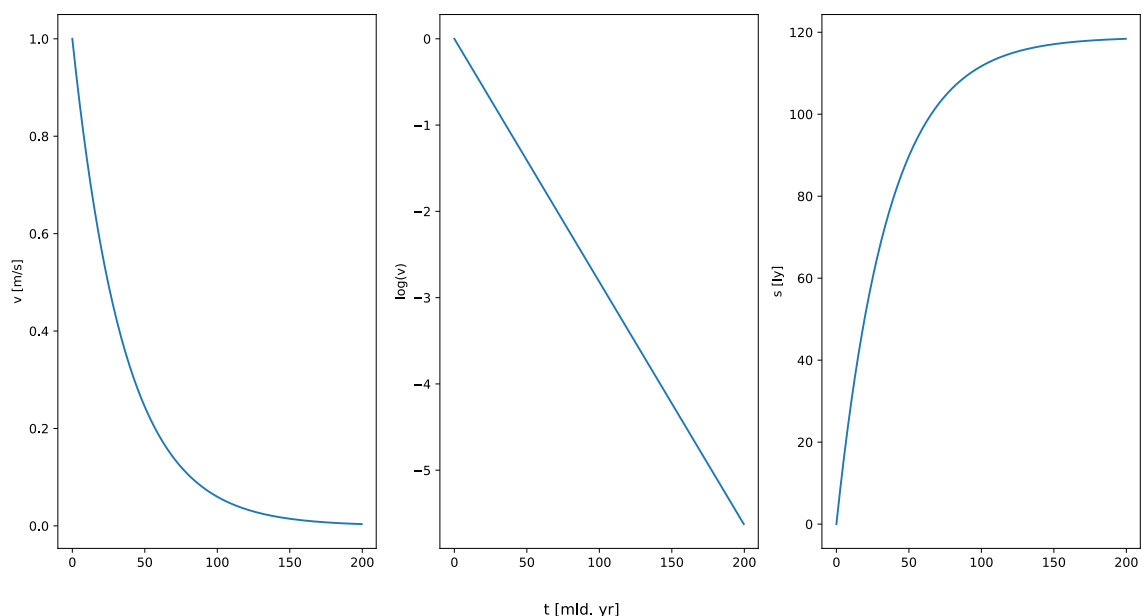
Ak máme počiatočnú rýchlosť 1 m/s a zrýchlenie prislúchajúce tejto rýchlosti je rádovo $1 \cdot 10^{-18} \text{ m/s}^2$, tak musíme zvoliť časový krok na úrovni $1 \cdot 10^{17} \text{ s}$, aby bol prírastok rýchlosti v jednom časovom kroku rozumne malý oproti rýchlosti samotnej, no nie príliš, aby simulácia netrvala prídlho. Simuláciu ukončíme, keď sa poloha zrkadla medzi dvoma iteráciami už veľmi nemení.

Výstupy simulácie možno vidieť na priloženom obrázku. Na prvom grafe je zobrazený časový vývoj rýchlosti zrkadla. Na druhom grafe je vykreslený logaritmus rýchlosti. Vidíme, že táto závislosť je lineárna, takže rýchlosť zrkadla klesá s časom naozaj exponenciálne. No a na treťom grafe vidíme závislosť vzdialenosti, do ktorej sa zrkadlo dostane, na čase.

Čo si ale môžeme všimnúť, je, že nám vyšla iná vzdialenosť než približným analytickým výpočtom. Ak spravíme analogickú simuláciu s pomocou približných vzťahov, dostaneme zhodu s analytickým výpočtom. Vid: druhá sada grafov.



Obrázok 2.7.1: Časový vývoj rýchlosti a prejdenej dráhy zrkadla simulovaný pomocou presných vzťahov.



Obrázok 2.7.2: Časový vývoj rýchlosti a prejdenej dráhy zrkadla simulovaný pomocou približných vzťahov.

Otázka teraz je, ktorým výsledkom máme veriť. Väčšina z vás sa zrejme prikloní k tomu, že presnejšie vzťahy znamenajú presnejšiu simuláciu. No ono to nie je také jednoduché.

Pri odvádzaní približných vzťahov sme videli, že chyby, ktorých sme sa dopúšťali pri odvádzaní, sa pohybovali vo veľmi malých rádoch. Môžeme ich odhadnúť veľkosťou prvých zanedbaných členov Taylorovho rozvoja, ktoré boli na úrovni 10^{-70} a menej. To je naozaj zanedbateľná chyba.

No pri vykonávaní numerickej simulácie sa dopúšťame aj iného druhu chýb – chýb v dôsledku nepresnosti aritmetických operácií vykonávaných v počítači. No a práve pri sčítavaní a odčítavaní čísel, ktorých rády sa veľmi líšia, sa dopúšťame obrovských chýb tohto typu. A to je prípad našich presných vzťahov, v ktorých vykonávame presne takéto operácie. Preto paradoxne numerická simulácia vykonaná s presnými vzťahmi je menej presná.

Keď sa pozrieme na výsledky simulácie s približnými vzťahmi, vidíme, že je konzistentná s analytickým riešením. Zrkadlo efektívne zastane vo vzdialenosti približne 119 ly a bude mu to trvať asi 200 miliárd rokov, čo je asi 15 vekov vesmíru. Pohybujúc sa na takýchto škálach, časových i priestorových, dopúšťame sa v našom výpočte ďalšej chyby tým, že sme nezapočítali rozpínanie vesmíru. Ale to už ďaleko presahuje náročnosť tejto úlohy.

Komentár opravovateľa

Viacerí ste sa rozhodli úlohu riešiť pomocou relativistického Dopplerovho javu. Pri tomto prístupe sa vyskytovali dve časté chyby.

1. Správne ste usúdili, že ak má svetlo vyžiarené laserom vlnovú dĺžku λ_0 , zrkadlo ju vníma ako vlnovú dĺžku $\lambda_z = \lambda_0 \sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}}$ ¹¹, a svetlo s takouto vlnovou dĺžkou odrazí. Čo ste si už ale väčšinou neuvedomili, bolo, že toto je vlnová dĺžka odrazeného svetla vo vzťažnej sústave zrkadla, teda v neinerciálnej sústave. Ak ste teda použili takúto vlnovú dĺžku pri výpočte sily (zrýchlenia), takto vypočítaná sila bola nevyhnutne nesprávna, pretože ste odčítavali hybnosti svetla vyjadrené v rôznych vzťažných sústavách a nezapočítali ste zotrvačnú silu¹². Ak by ste chceli počítať v inerciálnej vzťažnej sústave, mali ste ešte previesť vlnovú dĺžku odrazeného svetla späť do inerciálnej vzťažnej sústavy, čiže $\lambda = \lambda_z \sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}} = \lambda_0 \frac{c \pm v}{c \mp v}$. To sa ale predsa ponáša na nerelativistického Dopplera. Keď sa nad tým zamyslite, dáva to perfektný zmysel. Tým, že vlnovú dĺžku vyžiareného a odrazeného svetla ako aj rýchlosť zrkadla vyjadrujeme v tej istej vzťažnej sústave, nemá relativita kde do výpočtu vstúpiť, keďže neprechádzame do inej vzťažnej sústavy. Pri odvádzaní klasického Dopplera sa predsa len pozeráme, ako sa naťahujú/zmršťujú vzdialenosti medzi dvoma susednými vlnoplochami. A to môžeme robiť s vlnoplochami hýbucimi sa ľubovoľnou rýchlosťou, pokojne aj rýchlosťou svetla.
2. Neuvedomili ste si, že relativistický Doppler musí nevyhnutne spolu s vlnovou dĺžkou / frekvenciou meniť aj amplitúdu vlnenia. Náзорnejšie to je pre pohľad na vlnenie cez fotóny. Ak sa zrkadlo pohybuje smerom k zdroju vlnenia, tak fotóny odrazené v smere pohybu zrkadla majú nie len vyššiu energiu a hybnosť než fotóny odrazené z druhej strany zrkadla, ale zároveň k zrážkam fotónov prichádzajúcich z tohto smeru so zrkadlom dochádza aj častejšie, takže v odrazenom zväzku sú „nahustejšie“. No a to, ako nahusto sú fotóny vo zväzku, súvisí priamo s amplitúdou vlnenia. Škálovací faktor pre amplitúdu je presne rovnaký ako pre frekvenciu, takže ak ste na tento efekt zabudli, dostávali ste polovičné spomalenie zrkadla.

2.8 Letí, letí, všetko letí: čo letí?

vzorák <meno> a <meno>, opravoval TBD

¹¹Znamienko volíme podľa smeru pohybu zrkadla.

¹²Tú by ste potrebovali, aby vám zrýchlenie zrkadla vo vzťažnej sústave zrkadla vyšlo nulové. To ale znamená iba toľko, že zotrvačná sila je rovná reálnej sile od fotónov vypočítanej v sústave zrkadla, len s opačným znamienkom.