

Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Sendvičová veta

vzorák **MatusH**, opravoval **Martin**

Keď sa auto pohybuje rovnomerne priamočiarno (bez zrýchlenia), tak z druhého Newtonovho zákona vieme, že výslednica síl pôsobiacich na závažie a balónik je nulová. Tým pádom bude závažie visieť priamo dole a balónik bude visieť¹ priamo hore.

Ak auto zrýchľuje, tak zrýchľuje aj vzťažná sústava spojená s autom, a teda v nej pôsobí zotrvačná sila v opačnom smere ako je smer zrýchlenia. Brzdenie aj zrýchľovanie auta sa správa podľa tej istej fyziky, lebo brzdenie je vlastne len záporné zrýchlenie. To nám dovoľuje tieto prípady riešiť spolu.

Ak bude teda auto zrýchľovať dopredu, tak zavesené závažie sa vychýli smerom dozadu, teda od čelného skla. Ak auto brzdí, tak zrýchľuje dozadu, a teda závažie sa vychýli k čelnému sklu.

S balónikom je to mierne odlišné. Keďže hélium má menšiu hustotu ako vzduch, vztlaková sila² je nezanedbateľná³. Zotrvačná sila ale pôsobí na všetky objekty, takže aj na vzduch, ktorý je v aute. Na vzduch teda pôsobí gravitačná aj zotrvačná sila a ich výslednica má smer dole a kúsok dopredu, respektíve dozadu (závisí od toho, či auto spomaľuje alebo zrýchľuje). Vztlaková sila bude pôsobiť proti tejto výslednici.

Ak teda auto zrýchľuje, tak na balónik pôsobí gravitačná sila smerom dole, zotrvačná sila smerom od čelného skla a vztlaková sila hore a k čelnému sklu. Otázka teda je, ktorým smerom bude pôsobiť výslednica? Uvedomme si, že výslednica gravitačnej a zotrvačnej sily pôsobí presne v opačnom smere ako vztlaková⁴. Vztlaková sila je pritom väčšia, lebo vzduch má väčšiu hustotu ako hélium.

Ak teda zrýchľujeme, balónik sa vychýli k čelnému sklu a ak auto brzdí, tak od čelného skla. Zjednodušene sa na to dá pozeráť aj tak, že vzduch má väčšiu hustotu ako hélium a bude sa správať ako zavesené závažie. Balónik ním bude vytlačený na druhú stranu.

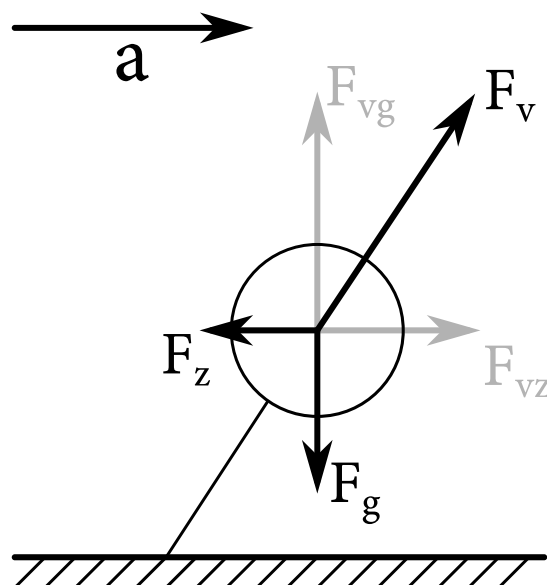
Celý tento prípad je načrtnutý na obrázku, ktorý je nakreslený vo vzťažnej sústave auta. F_g je gravitačná sila, F_z je zotrvačná sila a F_v je vztlaková sila pôsobiaca na balónik. Vztlaková sila je pritom ešte rozložená na zložku, ktorá pôsobí kvôli gravitácii a zložku, ktorá pôsobí kvôli zotrvačnej sile.

¹Pod „visieť“ chápeme, že balónik je upevnený a vďaka tomuto upevneniu ostane na mieste.

²Vztlaková sila pôsobí, lebo okolo balónika je vzduch.

³Narozdiel od prípadu so závažím, kde sme ju mlčky zanedbali.

⁴Toto je vďaka tomu, že vztlaková sila je spôsobená tým, že vzduch vytláča hélium.



Obrázok 1.1.1: Náčrt situácie s balónikom v zrýchľujúcej sústave auta

Posledný prípad je, keď ide auto po kruhovom objazde. Pozrime sa na tento prípad vo vzťažnej sústave, ktorá má stred v strede kruhového objazdu. Navyše, táto sústava sa točí tak, aby v nej auto stálo. V takejto sústave pôsobí odstredivá sila smerujúca od stredu⁵. Závažie teda táto sila vychýli v smere od stredu kruhového objazdu. Úvahy s balónikom prejdú úplne analogicky pre odstredivú silu. Jediný rozdiel bude, že vztlaková sila bude pôsobiť hore a k stredu kruhového objazdu. Balónik sa teda vychýli v smere do zákruty.

1.2 Noetherovej veta

vzorák **MatusH**, opravoval **Mirko**

Ako prvé si všimnime, že na základe stroboskopickej fotky vieme, že jedna guľa sa celý čas nachádzala v hornej a druhá v dolnej polrovine. To vidíme z toho, že samotná zrážka je zachytená na jednej z fotiek. Zodpovedá jej konkrétne tretia pozícia gúl zľava.

Stačí nám teda riešiť, či išli gule zľava doprava, sprava doľava, alebo každá rôzne. Vieme, že na ľavej strane obrázka mali obe gule väčšiu rýchlosť a teda aj energiu. Z obrázka navyše vyzerá, že obe gule mali vpravo aj vľavo rovnakú energiu. Z toho vieme rovno usúdiť, že nemohli obe štartovať vpravo (pozície 2 a 3), lebo by zrazu po zrážke mali dokopy väčšiu energiu. Ak neuvažujeme ideálnu zrážku, tak gule nemohli štartovať ani v diagonálnych pozíciách, lebo by sa energia pri zrážke zachovala dokonale, čo sa v reálnom svete moc nemá ako stať. V takom prípade dostávame jedinou možnosť, gule štartovali v pozíciách 1 a 4 a skončili v pozíciách 2 a 3.

Podme si overiť, či by pri takejto zrážke platil zákon zachovania hybnosti (ak by neplatil, nebola by totiž možným riešením). Keďže hmotnosti oboch gúl sú rovnaké, pri porovnávaní hybnosti sa stačí zamerať na ich rýchlosti (lebo $p = mv$). Rozdeľme si ich na zvislé a vodorovné zložky. Vidíme, že zvislé zložky pred aj po zrážke sú rovnako veľké, no smerujú opačnými smermi. Celková hybnosť v zvislom smere je preto pred aj po zrážke 0, teda sa nezmenila. Vo vodorovnom smere pozorujeme, že žiadna z gúl nezmenila rýchlosť – teda aj vo vodorovnom smere sa hybnosť zachovala. Teda gule mohli štartovať v pozíciách 1 a 4 a skončiť v pozíciách 2 a 3.

⁵Zotrvačnú silu nemáme, lebo samotný počiatok sústavy nezrýchľuje.

Ak by sme (napriek konfliktom s reálnym svetom) išli uvažovať aj dokonale pružnú zrážku, nemohli by sme vylúčiť ani diagonálne počiatočné pozície – také, kde gule prejdú z 1 a 3 do 2 a 4 (alebo z 2 a 4 do 1 a 3). Podme opäť skontrolovať, či by pri týchto rozostaveniach platil zákon zachovania hybnosti. Všimnime si, že tentokrát je pred aj po zrážke nulová vodorovná zložka hybnosti, lebo gule išli oproti sebe s rovnakou vodorovnou rýchlosťou. Rýchlosti v zvislom smere už sú rôzne, no celková hybnosť systému v tomto smere sa tiež zachovala – aj pred aj po zrážke má veľkosť rýchlejšej zvislej rýchlosti mínus pomalšej zvislej rýchlosti, a to či už smerom nadol (ak gule začínali v 1 a 3) alebo smerom nadol (ak gule začínali v 2 a 4). Teda ak uvažujeme, že mohla nastať aj dokonale pružná zrážka, jej riešením môžu byť aj tieto diagonálne počiatočné pozície.

1.3 Veta o nekonečnej opici

vzorák Šimon, opravoval Kubko

Na začiatku nám môže rovno udrieť do očí, že nie vo všetkých výsledkoch sedia fyzikálne jednotky. Takto môžeme rovno odstrániť výsledky 8. a 10., v oboch prípadoch po dosadení jednotiek dostaneme $\frac{m^2}{s^2}$, čo určite nie je jednotka rýchlosti.

Všimnime si, že druhý výsledok je nezávislý od L . Keď si porovnáme situáciu, kde $L = 0$ s ľubovoľnou situáciou, kde L je nenulové, rozhodne rýchlosť nemôže byť rovnaká. Pre $L = 0$ potrebujeme nejakú vertikálnu rýchlosť v_y a nulovú horizontálnu rýchlosť. Pre nenulové L už ale potrebujeme aj nejakú horizontálnu rýchlosť v_x , čiže celková rýchlosť bude $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Druhý výsledok teda správny nie je, lebo by nám dával rovnakú rýchlosť v oboch týchto prípadoch.

Logicky dáva zmysel, že čím je väčšie L , tým vyššiu rýchlosť potrebujeme. H v takomto prípade zostane rovnaké, čiže sa bude meniť len horizontálna zložka rýchlosti, a teda celková rýchlosť bude ovplyvnená len ňou. Z tejto úvahy vyplýva, že výsledok 5. správny nie je, keďže sa L vyskytuje len v člene, ktorý odčítavame, takže rýchlosť je menšia, ak je L väčšie.

Ďalej sa pozrime na nejaké okrajové prípady. Ak by sa $H = L$, čo je situácia, ktorá môže nastať, v prvom výsledku by sme delili nulou, čiže rýchlosť by vychádzala nekonečná. Preto môžeme odstrániť aj túto možnosť.

V prípade, že by hadica bola kolmo na zem, vzdialenosť L by bola nulová. Keď do výsledkov dosadíme $L = 0$, v treťom výsledku by sme delili nulou, čiže rýchlosť by bola tiež nekonečná.

Ďalšia situácia, ktorá môže nastať je hádzanie dozadu, teda do vzdialenosti $-L$. Pre túto vzdialenosť samozrejme očakávame rovnakú veľkosť rýchlosti ako pre L . Po dosadení do zvyšných výsledkov vieme vylúčiť výsledky 4. a 9., pri ktorých dostaneme inú rýchlosť pre záporné L .

Posledné dva výsledky – 6. a 7. – sa líšia len v koeficiente pri druhom člene v odmocnine. Ak si znovu predstavíme situáciu, kde $L = 0$, teda zvislý vrh, dostaneme $\sqrt{2gH}$ a $\sqrt{3gH}$. Zo zákona zachovania energie (kinetická energia sa zmení na potenciálnu) vieme jednoducho odvodiť, že v tomto prípade rýchlosť musí byť $\sqrt{2gH}$, takže výsledok 7. bude určite nesprávny.

Takto nám ostal len výsledok 6., ktorý spĺňa všetky okrajové prípady a rozmerovo sedí, a teda by mohol byť riešením úlohy.

1.4 Picardova veta o existencii a jednoznačnosti riešenia vzorák FilipB, opravoval FilipB

Ako prvé si musíme uvedomiť princíp, ktorým je raketa poháňaná. Zatiaľ čo auto sa pohybuje vďaka tretej sile medzi pneumatikami a asfaltom, raketa takúto možnosť nemá (keďže medzi planétami zatiaľ nemáme postavené diaľnice). Ako sa teda raketa pohybuje? Objasníme si to na jednoduchom myšlienkovom experimente.

Predstavme si, že pozorujeme človeka, ktorý stojí na dokonalo hladkej ploche (napríklad na zamrznutom jazere) a dokáže sa po ňom pohybovať v podstate bez trenia. Do ruky zoberie ťažký kameň a veľmi silno ho hodí vodorovne pred seba. Stanú sa dve veci – kameň odletí v smere vrhu a dopadne na zem, a zároveň sa človek začne voči nám pohybovať, a to opačným smerom ako kameň. Ako rýchlo sa však bude hýbať človek? Odpoveď nájdeme pomocou druhého Newtonovho zákona

$$F = \frac{dp}{dt}. \quad (1.4.1)$$

V prípade, že na sústavu človek + kameň nebudú pôsobiť vonkajšie sily (gravitáciu zanedbáme, keďže nepôsobí v smere pohybu), bude v danej sústave platiť zákon zachovania hybnosti. Pred hodením sa človek s kameňom voči nám nehýbal, preto musí byť aj po hode celková hybnosť sústavy nulová. To znamená, že akúkoľvek hybnosť nadobudol kameň, človek musel nadobudnúť rovnako veľkú hybnosť, ale v opačnom smere (keďže vieme, že hybnosť je vektorová veličina a sčítaním dvoch opačných, rovnako veľkých vektorov získame nulový vektor).

Na rovnakom princípe „odvrhávania“ paliva sa pohybujú rakety. Kľúčová myšlienka spočíva v tom, že hmotnosť rakety (presnejšie sústavy raketa + neodvrhnuté palivo) nie je konštantná. Zároveň je nutné dodať, že zákon zachovania hybnosti platí podľa 1.4.1 iba v prípade, že na sústavu nepôsobia ďalšie sily, napr. gravitačná. Ak sa teda raketa nachádza v nezanedbateľnej blízkosti planéty alebo hviezdy, musíme zohľadniť aj pôsobiacu gravitačnú silu.

Keďže už rozumieme situácii, ktorú modelujeme, je čas matematizovať. Uvažujme raketu v čase t_0 s celkovou hmotnosťou m_0 (teda raketa aj palivo) a rýchlosťou v_0 . Celková hybnosť tejto sústavy tak je $p_0 = m_0 v_0$.

Teraz si predstavme, čo sa stane v čase $t_1 = t_0 + dt$ (ak nepoznáte symbol d , nahraďte si ho symbolom Δ). Raketa odvrhne malý kúsok paliva hmotnosti dm rýchlosťou v_p vzhľadom k inerciálnemu pozorovateľovi. Tento kúsok paliva tak nadobudne hybnosť $dp_p = v_p dm$. Dôsledkom toho sa musí zmeniť aj hybnosť sústavy raketa + neodvrhnuté palivo. Rýchlosť voči inerciálnemu pozorovateľovi sa zvýši o dv , hmotnosť rakety a neodvrhnutého paliva klesne o dm . Hybnosť v čase t_1 tak bude

$$p(t_1) = (m - dm)(v + dv). \quad (1.4.2)$$

Celková bilancia hybnosti v čase t_1 tak bude

$$p(t_1) = m_0 v_0 + m_0 dv - v_0 dm - dm dv + v_p dm. \quad (1.4.3)$$

Poznáme však rýchlosť výtoky plynov v_r vzhľadom k rakete. Ľahko si rozmyslíme, že rýchlosti spolu súvisia vzťahom

$$v_r = v_p - v. \quad (1.4.4)$$

Túto skutočnosť dosadíme do rovnice 1.4.3. Následnými úpravami a zanedbaním člena $dm dv$ (súčin dvoch veľmi malých čísel) dostávame

$$p(t_1) - p_0 = dp = m_0 dv + v_r dm. \quad (1.4.5)$$

Podľa druhého Newtonovho zákona musí byť $dp/dt = F$, kde F vonkajšia sila pôsobiaca na sústavu (napr. gravitačná, ak je raketa v blízkosti vesmírneho telesa). Ak teda obe strany rovnice 1.4.5 ešte vydelíme diferenciálom času, dostávame diferenciálnu rovnicu pre rýchlosť rakety v tvare

$$m(t) \frac{dv}{dt} = F - v_r \frac{dm}{dt}. \quad (1.4.6)$$

Táto rovnica sa nazýva rovnica Meščerského a jej riešením vieme nájsť časovú závislosť rýchlosti rakety. Následnou druhou integráciou vieme zistiť časovú závislosť výšky. Než pristúpime k riešeniu, všimnime si, že v rovnici nevystupuje rýchlosť rakety. Taktiež vidíme, že v_r aj $\mu = dm/dt$ poznáme.

Ak by sme teraz dosadili za F z Newtonovho gravitačného zákona, dostali by sme pomerne zložitú diferenciálnu rovnicu, ktorú však vieme riešiť numericky. Raketa, ktorú uvažujeme, je ale pomerne malá (podľa zadania má 4,1 tony, zatiaľ čo rakety používané NASA majú okolo 60 až 100 ton), pravdepodobne sa tak bude pohybovať v blízkosti povrchu Zeme. Preto môžeme predpokladať, že intenzita gravitačného poľa bude počas letu rakety konštantná a rovná tiažovému zrýchleniu pri povrchu. Len pre overenie, ak predpokladáme, že raketa vyletí do výšky $h_f = 300$ km, je hodnota výrazu $(R + h)^2/R^2 = 1,1$, teda odchýlka od skutočného tiažového zrýchlenia bude najviac 10 percent zrýchlenia na Zemi (čo je ale teda hraničné).

Môžeme tak dosadiť $F = m(t)g$, následne vydeliť $m(t)$ a dosadiť zaň $m(t) = m_0 - \mu t$, čím dostávame

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{v_r \mu}{m_0 - \mu t}. \quad (1.4.7)$$

Toto je diferenciálna rovnica, ktorá nám prezradí časový priebeh rýchlosti rakety, z ktorého vieme následne určiť výšku výstupu. Možno ju riešiť buď analyticky, alebo numericky tzv. Eulerovou metódou. Nasleduje ukážka analytického riešenia, numerické riešenie sa nachádza nižšie.

Obe strany rovnice môžeme integrovať podľa času od 0 do t_1 , čím dostávame

$$v(t_1) - v_0 = -gt_1 + v_r \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t_1}\right). \quad (1.4.8)$$

Našej pozornosti nesmie uniknúť, že sa jedná o (modifikovanú) Ciolkovského rovnicu (ak by sme neuvažovali tiažové pole Zeme). Keďže raketa štartovala v pokoji, je $v(0) = 0$. Opätovnou integráciou od 0 po t_2 a uvažovaní, že v čase $t = 0$ bola raketa v nulovej výške, dostávame rovnicu

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_r m_0}{\mu} \left(\frac{m_0 - \mu t}{m_0} \left(\ln \frac{m_0 - \mu t}{m_0} - 1 \right) + 1 \right). \quad (1.4.9)$$

Maximálna doba letu bude daná množstvom paliva a mierou μ , ktorou je spaľované. Ak by sme napríklad predpokladali, že $m_p = 4$ t z pôvodných 4,1 t tvorilo palivo (približne takýto pomer paliva a hmotnosti

konštrukcie má Falcon 9), maximálny čas výstupu by sme vypočítali vzťahom

$$t_{\max} = \frac{m_p}{\mu}.$$

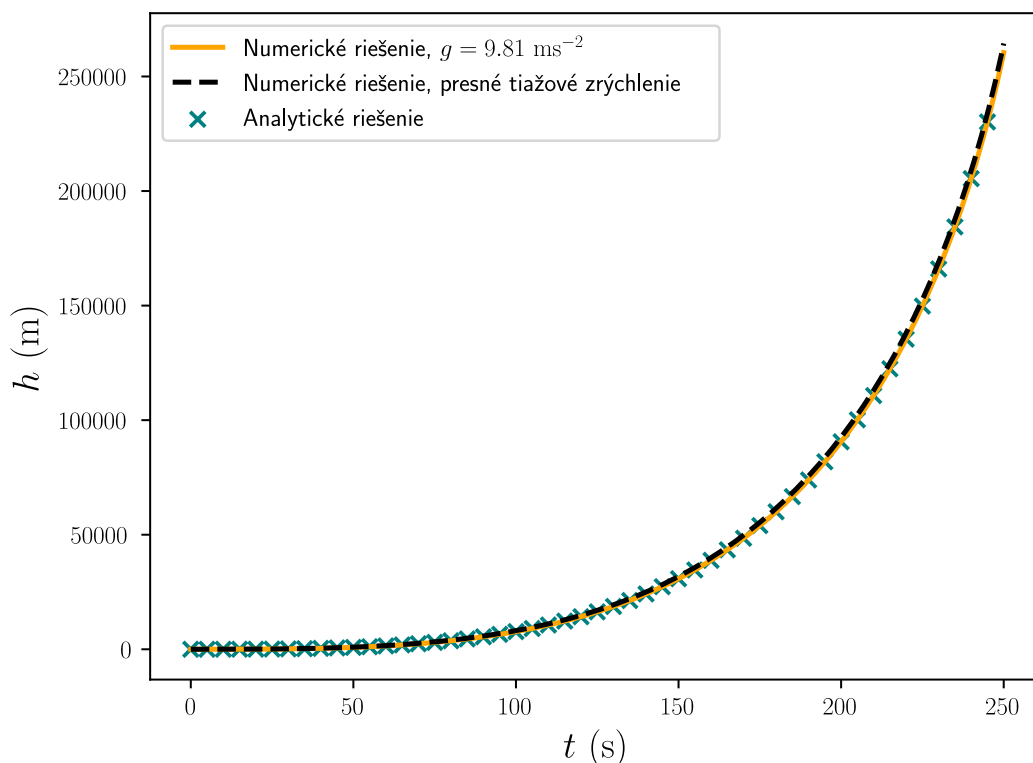
Číselne dostávame $t_{\max} = 250$ s. Tento čas dosadíme do vzťahu 1.4.9, čím dostávame, že v 250-tej sekunde vystúpa raketa do výšky približne 260 km nad zemským povrchom.

Numerické riešenie Eulerovou metódou spočíva v tzv. diskretizácii krokov, t. j. nekonečne malé diferenciály si nahradíme konečne veľkými (ale stále dosť malými) zmenami hodnôt. Písmenká d tak nahradíme Δ . Keďže je ale rovnica 1.4.7 tzv. diferenciálnou rovnicou druhého rádu, musíme ju „riešiť dvakrát“ – prvým riešením dostaneme časovú závislosť rýchlosti, pri druhom riešení dostaneme časovú závislosť výšky. Tieto dve rovnice budú vyzeráť ako

$$\begin{aligned}\Delta v &= \left(-g + \frac{v_r \mu}{m_0 - \mu t}\right) \Delta t, \\ \Delta h &= v \Delta t.\end{aligned}\tag{1.4.10}$$

Tieto rovnice stačí prepísať do vášho obľúbeného programovacieho jazyka a máte hotovo. Pri Eulerovej metóde je potrebné voliť malý časový krok, keďže má tendenciu sa rýchlo odchyľovať od skutočného riešenia.

Na grafe nižšie sa nachádza porovnanie numerických riešení s presným a približným tiažovým zrýchlením a analytického riešenia s približným tiažovým zrýchlením.



Obrázok 1.4.1: Porovnanie metód riešenia

Vidíme, že všetkými tromi metódami sme dospeli k (približne) rovnakému riešeniu. Podľa numerického riešenia s približným tiažovým zrýchlením a aj podľa analytického doletí raketa do výšky 260 km, drobná

odchýlka je daná len nepresnosťou numerickej metódy. Podľa numerického riešenia s presným tiažovým zrýchlením doletí raketa do výšky približne 264 km, čo je v súlade s očakávaním, keďže gravitačné zrýchlenie na povrchu Zeme je horným odhadom intenzity gravitačného poľa počas celého letu rakety.

1.5 Veta o pevnom bode

vzorák MatusH, opravoval MatusH

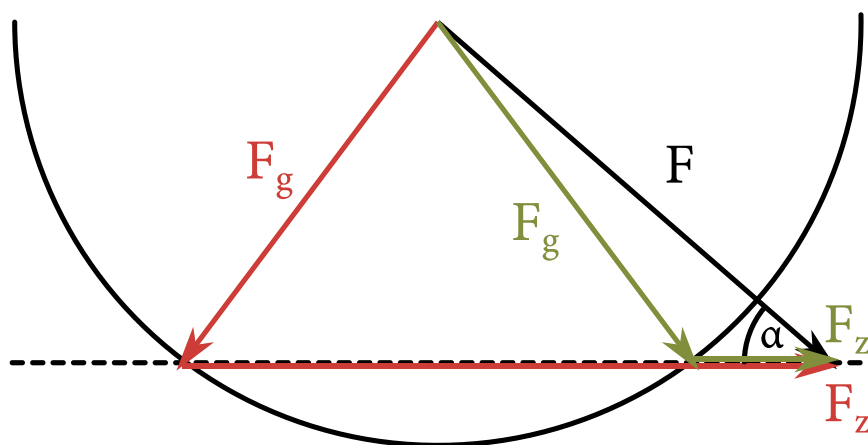
Celé riešenie budeme formulovať vo vzťažnej sústave spojennej s lietadlom. Táto vzťažná sústava v obidvoch prípadoch zrýchľuje, čo znamená, že na telesá v nej pôsobí zotrvačná sila proti smeru zrýchlenia s veľkosťou $F_z = ma$, kde m je hmotnosť objektu a a je zrýchlenie lietadla.

Ako prvé sa pozrime na rozbeh po dráhe, keď je podlaha lietadla ešte rovnobežne so zemou. Vieme, že na zavesený hmotný bod (kyvadlo) pôsobia tri sily. Gravitačná F_g smerujúca dole, zotrvačná F_z smerujúca kolmo na gravitačnú, a sila od lanka T smerujúca v smere lanka. Keďže kyvadlo nezrýchľuje⁶, tieto sily musia dať nulovú výslednicu. Inými slovami, tvoria pravouhlý trojuholník, kde T je prepona. Vieme, že medzi T a F_g je uhol 15° . To znamená, že zotrvačnú silu a tým aj zrýchlenie lietadla vieme vyrátať ako

$$F_z = F_g \tan 15^\circ \Rightarrow a = g \tan 15^\circ \doteq 2,6 \text{ m/s}^2.$$

V druhej časti úlohy (stále riešenej vo vzťažnej sústave lietadla) je komplikácia, že nevieme, ktorým smerom pôsobí gravitačná sila, no vieme jej veľkosť. O zotrvačnej nevieme veľkosť, ale vieme, že je rovnobežná s palubou lietadla.

Ak sa budeme pozeráť ďalej na kyvadlo, tak jeho smer nám bude ukazovať výslednicu gravitačnej a zotrvačnej sily. Povedzme, že by sme vedeli aj veľkosť F tejto výslednice. Do obrázka 1.5.1 sme zakreslili informácie, ktoré vieme. Kružnica značí všetky možné body, kam môžeme nakresliť koniec šípky⁷ reprezentujúci gravitačnú silu a prerušovaná čiara značí smer zotrvačnej sily. Z obrázka vidíme, že máme len dve možnosti (zelenú a červenú), ako zvoliť smer a veľkosť týchto síl, aby sme dostali správnu výslednicu.



Obrázok 1.5.1: Náčrt gravitačnej a zotrvačnej sily v lietadle

Vieme vybrať z týchto dvoch prípadov? Komerčné lietadlá štandardne nemajú závratné zrýchlenia, lebo je to neekonomické. To znamená, že gravitačná sila bude stále tá dominantná, a teda môžeme prehlásiť, že realite

⁶Stále všetko berieme vo vzťažnej sústave lietadla.

⁷Pričom sa začína v rovnakom bode ako F .

bude zodpovedať zelený prípad. Ak by však Marek bol na palube stíhačky, nevedeli by sme zrýchlenie určiť jednoznačne.

Náš postup sme teda zredukovali na odmeranie smeru a veľkosti výslednice a následnú geometriu, konkrétne kosínusovú vetu⁸. Ako by sme vedeli zmerať rýchlosť? Pomôže nám opäť kyvadlo. Vieme, že perióda malých kmitov kyvadla je $T = 2\pi\sqrt{l/\tilde{g}}$ ⁹. Ak teda odmeriame dĺžku závesu a periódu, vieme vypočítať $\tilde{g}$. Tým sme získali už aj veľkosť výslednice $\tilde{g}m$ a máme kompletný postup, ako by sme zistili zrýchlenie.

Už len na záver doplníme, že pomocou kosínusovej vety by sme a vyjadrili ako

$$a = \tilde{g} \cos \alpha - \sqrt{\tilde{g}^2 \cos^2 \alpha + g^2 - \tilde{g}^2},$$

kde α je uhol medzi výslednicou gravitačnej a zotrvačnej sily a podlahou lietadla. Pri riešení kvadratickej rovnice sme zobrali mínus, lebo to zodpovedá zelenému prípadu.

1.6 Gaussova-Ostrogradského veta o divergencii

vzorák Hovorca, opravoval Hovorca

V prvom by sme sa chceli ospravedlniť za pomerne neskorú úpravu zadania tejto úlohy. Aj majster tesár sa utne a v tomto prípade sme nezbadali, že zadanie nemusí úplne dávať zmysel tak, ako sme si ho pôvodne predstavili. Za upozornenie ďakujeme iniciatívnym riešiteľom :) Poďme na samotné vzorové riešenie!

Úloha v nás okamžite vzbudí dojem elektrostatiky – ide o situáciu, kde máme nejaké statické rozloženie elektrického náboja. Väčšinu úloh z elektrostatiky dokážeme vyriešiť jedným zákonom – Gaussovým zákonom elektrostatiky (Všimli ste si tento hint v názve úlohy? Viete, ako súvisí Gaussov zákon elektrostatiky s Gaussovou-Ostrogradského integrálnou vetou/vetou o divergencii?). Gaussov zákon elektrostatiky nám hovorí, že ak vezmeme ľubovoľnú uzavretú plochu S , tak potom integrál po tejto ploche z elektrickej intenzity $\mathbf{E}$ je rovný náboju vo vnútri našej plochy vydelenému permitivitou prostredia ϵ . Týchto veľa slov sa matematicky napíše ako

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon}.$$

Zapamätajme si tento zákon ako poznatok a pozrime sa, čo od nás úloha vlastne vyžaduje a ako sa tento zákon dá použiť. Máme spočítať hrúbku izolácie h medzi vodičmi v koaxiálnom kábli, ktorá je potrebná aby bolo medzi vodičmi napätie U , a potom ešte ako vyzerá pole $\mathbf{E}$ v okolí kábla. Na vnútornom kábli je náboj s dĺžkovou hustotou σ , na vonkajšom buď nulový alebo opačný.

Pozrime sa na to napätie. Napätie je rozdiel elektrických potenciálov medzi nejakými dvomi bodmi. Elektrický potenciál v nejakom mieste je zase práca potrebná na prenesenie jednotkového náboja (alebo práca vydelená nábojom) z miesta s nulovým potenciálom do daného miesta. Nulový potenciál si pritom môžeme zvoliť, kde chceme. Štandardne sa volí nekonečne ďaleko, ale napríklad tu je výhodné zvoliť za nulový potenciál povrch vnútorného vodiča. Potom môžeme napätie medzi vodičmi spočítať ako tú prácu hore. Jediný problém je, že naše pole nemusí a ani napokon nebude homogénne. To znamená že pozdĺž našej dráhy sa bude meniť sila $\mathbf{F}$ elektrického poľa. Môžeme ale na malinkých kúsočkoch $d\mathbf{l}$ považovať silu za konštantnú a počítať podľa vzťahu $dW = \mathbf{F}(l) \cdot d\mathbf{l}$ a napokon sčítať všetky takéto kúsočky aby sme dostali

⁸Poznáme veľkosti dvoch strán a jeden uhol.

⁹Uvedomme si, že pre kyvadlo je irelevantné, či $\tilde{g}$ je gravitačné zrýchlenie g alebo zrýchlenie zodpovedajúce hociakej inej sile, v tomto prípade súčtu gravitačnej a zotrvačnej.

celkovú prácu. Takýto spojitý súčet je vlastne integrál, teda

$$U = \frac{1}{Q} \int_r^{r+h} \mathbf{F}(l) \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{r+h} \mathbf{E}(l) \cdot d\mathbf{l}.$$

Spočítaním tohto integrálu by sme dokázali vyjadriť hodnotu napätia ako funkciu hrúbky izolácie. Čo na to potrebujeme vedieť? Práve hodnotu elektrického poľa kdekoľvek vo vnútri izolácie. Ako ju získame? Samozrejme, z Gaussovho zákona.

Ak si teraz povie „Hovorca, no super, musím teraz rátať nie jeden ale hneď dva grcné integrály...“ treba nezúfať. Spomeňme si na ten Gaussov zákon.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon}.$$

Vyzerá to nepekne, ale zachráni nás, že naša úloha je veľmi symetrická. To nám dovolí si našu plochu S zvoliť veľmi rozumne tak, aby sme sa vyhli skalárnemu súčinu aj celému integrovaniu. Zvolíme si ju totiž v tvare povrchu valca pekne obopínajúceho náš vnútorný vodič. Nech má náš valec výšku d a polomer podstavy ρ . Ak sa zamyslíme, už zo symetrie úlohy vidíme, že čo sa podstáv týka, ich príspevok do integrálu bude nulový, lebo pole v okolí nášho kábla kvôli symetrii bude iba radiálne od kábla. A čo na zvyšku plášťa? Tam zase zo symetrie bude pole $\mathbf{E}(\rho)$ v každom bode rovnaké, a ešte k tomu má smer kolmý na plášť valca (radiálny), takže ani skalárny súčin nič neznamená a môžeme len jednoducho napísať

$$E(\rho) \oint_{\text{plášť}} dS = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon}.$$

Tento integrál vlastne počíta plochu plášťa valca, čo je v našom prípade $2\pi\rho d$ a tak dostaneme, prepísané cez veličiny zo zadania

$$E(\rho) = \frac{Q_{\text{in}}}{2\pi\rho d\epsilon} = \frac{\sigma d}{2\pi\rho d\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{\sigma}{2\pi\rho\epsilon_0\epsilon_r},$$

čo nás celkom teší, lebo výšku valca d sme si zvolili dosť náhodne a teraz vypadla. Je dobré poznamenať, že zatiaľ pracujeme len s polom „vo vnútri“ izolácie, takže náboj (ak nejaký je) na vonkajšom vodiči si podľa Gaussovho zákona nezahrá. Teraz už vieme hodnotu poľa kdekoľvek vnútri izolácie.

Nepříjemná časť: zistiť samotné napätie. Môžeme spočítať integrál

$$U = \int_r^{r+h} \mathbf{E}(\rho) \cdot d\boldsymbol{\rho} = \int_r^{r+h} \frac{\sigma}{2\pi\rho\epsilon_0\epsilon_r} d\rho = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_r^{r+h} \frac{1}{\rho} d\rho.$$

Tento integrál nie je extrémne náročný, patrí do rodiny tzv. tabuľkových a všelikde by ste ho našli ako úplne vzorový príklad. Riešením je

$$U(h) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{r+h}{r}.$$

Ak chceme vedieť hrúbku potrebnú na dosiahnutie konkrétneho napätia U , vzťah musíme obrátiť, dostaneme

$$h = r(e^{\frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\sigma}U} - 1).$$

Čo by sa zmenilo, ak by vonkajší vodič mal náboj s opačnou dĺžkovou hustotou ako vnútorný vodič? *Úplne nič*, nakoľko sme počítali iba s poľom vnútri izolácie a toto podľa Gaussovho zákona nie je ovplyvnené nábojmi mimo izolácie (toto je potrebné poriadne si premyslieť a pochopiť!).

Druhá otázka, ktorú sme dostali, je zistiť, ako vyzerá pole v okolí kábla. Ak vonkajší vodič kábla nie je nabitý, tak vzťah, ktorý sme použili na zistenie elektrického poľa v okolí vnútorného vodiča platí aj mimo kábla (nepridali sme nikam žiadny náboj), treba si ale dať pozor na permitivitu prostredia, ktorá je v okolí vodiča iná. Pole bude radiálne, s veľkosťou

$$E(\rho) = \frac{\sigma}{2\pi\rho\epsilon_0}.$$

Čo v prípade, že vonkajší vodič je nabitý presne naopak ako vnútorný? Opäť sa utiekame ku Gaussovmu zákonu,

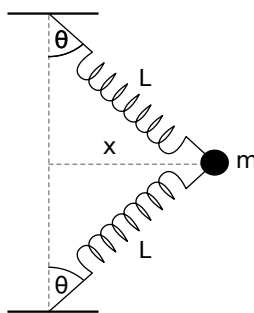
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon}.$$

Opäť si myslime valec súbežný s káblom. Náboj v ňom uzavretý je teraz spolu 0, čo ale znamená, že (rovnakou úvahou ako vo vnútri izolácie) je pole v ľubovoľnej vzdialenosti (pri ľubovoľnom polomere mysleného valca) tiež nulové.

1.7 Weinbergova-Wittenova veta

vzorák Tomáš, opravoval Tomáš

Keď vám práve Hovorca nehučí do hlavy niečo o strunách, vaše ušné bubienky sú v pokoji, a samozrejme sú napínané nejakým napätím. V modeli s pružinkami umiestnenými do kruhu si to vieme predstaviť tak, že každá pružinka ťahá svojím smerom, pričom hmotný bod v strede sa nehýbe.



Obrázok 1.7.1: Dve pružiny ťahajúce hmotný bod

Pozrime sa na obrázok 1.7.1. Pre jednoduchosť v ňom sú znázornené len dve pružiny. V pôvodnej rovnovážnej polohe mali obe dĺžku L , kvôli čomu pôsobili na hmotný bod nejakou silou F , každá opačným smerom. A podľa zadania je výchylka spôsobená nadšeným Hovorcom dostatočne malá na to, aby dĺžka bola stále L , a preto ani veľkosť ťahovej sily F sa nezmení. Zmenil sa však jej smer. Teraz má na obrázku od zvislej polohy výchylku θ . Tomu zodpovedá výchylka hmotného bodu $x = L \sin \theta$, alebo pre malé výchylky

θ môžeme písať $x = L\theta$. V smere naspäť do rovnovážnej polohy teda pôsobí jedna pružina na hmotný bod silou $F_x = -kx$. Dokopy ale pružín máme N , čiže v závislosti od výchylky x je výsledná sila pôsobiaca na hmotný bod je $F_x = -Nkx$.

To je prelomový objav, lebo toto už poznáme – je to harmonický oscilátor, lebo sila je priamo úmerná výchylke x . Ak označíme efektívnu tuhosť ušného bubienka $k_{\text{eff.}} = Nk$, tak tento harmonický oscilátor kmitá s uhlovou frekvenciou

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff.}}}{m}} = \sqrt{\frac{Nk}{m}}$$

a s nejakou amplitúdou A , teda výchylka v čase t je

$$x(t) = A \sin \omega t.$$

Ak ju zderivujeme podľa času, dostaneme rýchlosť

$$v(t) = A\omega \sin \omega t.$$

Preto je kinetická energia v čase

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2 \omega t.$$

Treba si uvedomiť, že jej hodnota sa periodicky mení. Preto k výpočtu jej priemernej hodnoty nám stačí sa pozrieť len na jednu periódu. Mohli by sme to robiť tak, že si vyčíslime hodnoty $E_k(t)$ pre veľa rôznych po sebe idúcich časov v rámci jednej periódy, tie všetky sčítať, a potom vydeliť počtom hodnôt. Presný výsledok ale dostaneme tak, že namiesto sčítavania veľa hodnôt budeme integrovať $E_k(t)$, a namiesto delenia počtom hodnôt budeme deliť dĺžkou periódy. Samotná funkcia $\sin^2 t$ má periódu rovnú π , čiže v našom prípade má $E_k(t)$ periódu rovnú π/ω . Takže priemerná kinetická energia je

$$\langle E_k(t) \rangle = \frac{1}{\pi/\omega} \int_0^{\pi/\omega} \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2 \omega t \, dt.$$

Použijeme substitúciu $\omega t = u$, čiže $\omega \, dt = du$, a hranice integrácie sa zmenia na $(0, \pi)$. Takže

$$\langle E_k(t) \rangle = \frac{1}{\pi/\omega} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2 u \cdot \frac{1}{\omega} \, du.$$

Konštanty dáme pred integrál a zostane nám tabuľkový integrál $\sin^2 u$ od 0 do π , ktorý je rovný $\frac{1}{2}$. Preto po zjednodušení výrazu a dosadení za ω dostávame výsledok pre priemernú hodnotu kinetickej energie

$$\langle E_k(t) \rangle = \frac{A^2 Nk}{4}.$$

1.8 Veta o prekročení rieky

vzorák <meno> a <meno>, opravoval Marek