

Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 Realistická zrážka

vzorák Patrik, opravoval Patrik

Túto úlohu si rozoberieme celkom svižne. Ak si ešte nepozeral(a) [vzorák](#) z prvého kola, určite sa naň mrkni - nadväzujeme naň a veľa vecí ti z neho hneď docvakne.

Najprv sa pozrime na zrážky. Tentoraz už nie sú dokonale pružné, ale nejaké „skutočnejšie“ - niekde medzi pružnými a nepružnými. Poďme si pripomenúť, čo tieto dva extrémny vlastne znamenajú:

- *Dokonale pružná zrážka (DPZ)* - zachováva sa hybnosť aj energia. To je tá krásna ideálna fyzika z 1. kola.
- *Dokonale nepružná zrážka (DNZ)* - hybnosť sa síce zachová, ale energia nie. Väčšinou si to predstavíme tak, že sa telesá po zrážke zlepia a idú spolu.

Predstavme si teraz, že puk A stojí a puk B doň čelne narazí rýchlosťou v_B .

- Ak je zrážka dokonale pružná, B sa zastaví a A ide ďalej jeho rýchlosťou.

- Pri dokonale nepružnej zrážke sa zlepia a idú spolu rýchlosťou $v_B/2$.

V skutočnosti bude zrážka niekde medzi - záleží na *koeficiente reštitúcie*, čo je len fancy spôsob ako povedať: „koľko energie pri zrážke nestratíme“. Ale pozor - *hybnosť sa zachová stále*, aj keď energia nie.

No a teraz tá hlavná vec: hocijaká reálna zrážka nám vlastne len zhoršuje situáciu oproti dokonale pružnej. V ideálnom prípade vieme puk krásne „naprogramovať“, aby sa cez pár zrážok vrátil na pôvodné miesto a zastal. Pri reálnejších zrážkach však prichádzame o energiu a puk už nemá dosť „šťavy“, aby sa vrátil a správne zastavil. V prípade DNZ je to už úplná katastrofa - puky sa zlepia a o návrate nemôže byť reč.

No dobre, zrážky nám nepomohli. Ale máme ešte jedno eso v rukáve: *trenie*.

Vráťme sa k myšlienke z prvej série: máme dva nehybné puky a jeden „náš“, ktorý vystrelíme rovno na ne. V prípade pružnej zrážky sa puk odrazí a ide späť. Ale teraz navyše počítame s trením - takže sa počas návratu spomaľuje. Ak sme ho na začiatku odpálili dostatočne silno, tak mu trenie pekne „zoberie“ rýchlosť a on sa sám zastaví *bez potreby tretieho puku*. Krása!

Takže čo sme zistili? Že reálnejšia fyzika síce komplikuje plán so zrážkami, ale vďaka treniu môžeme niektoré puky úplne vynechať. Ak to dobre naplánujeme, výsledok môže byť ešte lepší ako v ideálnom prípade.

3.2 Wanted

vzorák <meno> a <meno>, opravoval Stano

3.3 Pochôdzna

vzorák Jaro, opravoval Jaro

Začnime tým, že si premyslíme, čo sa po postavení na hladinu deje z fyzikálneho hľadiska. Na Tomáša pochopiteľne pôsobí tiažová sila smerom nadol. Na podrážky topánok zasa pôsobí vztlaková sila smerom

nahor. Pokiaľ stojí Tomáš v perfektne zvislej polohe, tieto dve sily sa akurát vyrušia a Tomáš by mal byť schopný stáť na hladine. Problémom je ale slovo *perfektne*. Ak sa Tomáš vychýli z perfektne zvislej polohy čo i len o zlomok uhlovej sekundy, tiažová i vztlaková sila naňho začnú pôsobiť momentmi. Na jeho smolu budú mať oba momenty rovnaký smer, a to taký, ktorý ho bude ešte väčšmi vychyľovať zo zvislej polohy.

Akým spôsobom dokážu závažia na tyči zvrátiť tento zdanlivo nezvratný osud? Pridanie závažia jednak posunie rovnovážnu polohu hlbšie – to nás však až tak nezaujíma; dôležitejší efekt je ten, že posunie ťažisko Tomáša s príslušenstvom nižšie, a tým aj pôsobisko tiažovej sily. Ak bude závažie dostatočne hlboko, ťažisko klesne až pod pôsobisko vztlakovej sily, a v takom prípade pri vychýlení z perfektne zvislej polohy budú mať momenty tiažovej a vztlakovej sily opačný smer a výsledný moment bude vracat¹ Tomáša do perfektne zvislej polohy.²

Súc si vedomí, čo sa pri státi na hladine deje, môžeme sa pustiť do počítania. Stačí nám pritom len napísať podmienku rovnováhy všetkých síl a nájsť polohu ťažiska.

V popísanej situácii pôsobí päťka vonkajších síl: tiažová sila na Tomáša $G_T = m_T g$, tiažová sila na Tomášove papuče $G_p = m_p g$, tiažová sila na závažie $G_z = m_z g$, vztlaková sila na papuče B_p a vztlaková sila na závažie B_z . Keďže ale vztlaková sila je úmerná objemu ponoreného telesa, dá sa očakávať, že $B_z \ll B_p$, a tak vztlakovú silu na závažie zanedbáme. Vztlaková sila pôsobiaca na papuče je zase len výslednicou tlakových síl, ktorými pôsobí voda na polystyrénové podrážky zo všetkých strán. Sily pôsobiace na zvislé časti podrážok sa navzájom vyrušia, a tak výsledná vztlaková sila na papuče bude $B_p = p(h) \cdot S_p = h \rho g S_p = V_p \rho g$, kde $p(h)$ je hydrostatický tlak v hĺbke h , S_p je plocha podrážok, V_p je objem polystyrénu a ρ je hustota vody. Zároveň vidíme, že pôsobisko vztlakovej sily je na spodku podrážok, čiže v hĺbke h pod hladinou.³ Spomínaná rovnováha síl teda vyzerá nasledovne: $m_T g + V_p \rho_p g + m_z g = V_p \rho g$, kde ρ_p je hustota polystyrénu. Odtiaľ vieme určiť výšku podrážky $h = \frac{V_p}{S_p} = \frac{m_T + m_z}{S_p(\rho - \rho_p)} \approx \frac{m_T + m_z}{S_p \rho}$.

Ak si zvolíme za nulovú súradnicu hladinu jazera, tak podrážka má ťažisko v hĺbke $h/2$, závažie v hĺbke rovnajúcej sa hľadanej dĺžke teleskopickej tyče – povedzme ℓ , a Tomáš vo výške v . Aby bolo Tomášovo státie na hladine stabilné, musí platiť, že spoločné ťažisko Tomáša s príslušenstvom má byť v hĺbke aspoň h , čo je hĺbka pôsobiska vztlakovej sily, teda $\frac{m_p \frac{h}{2} + m_z \ell - m_T v}{m_p + m_z + m_T} \stackrel{!}{\geq} h$. Odtiaľ $\ell \geq \left(1 + \frac{m_p}{2m_z}\right)h + \frac{m_T}{m_z}(h + v)$. Odhadnime, že plocha Tomášových podrážok je dokopy $S_p \approx 5 \text{ dm}^2$, Tomáš má hmotnosť $m_T \approx 75 \text{ kg}$ ⁴ a jeho ťažisko je vo výške $v \approx 1 \text{ m}$. Potom $h \approx 1,7 \text{ m}$. Ak je hustota polystyrénu $\rho_p \approx 20 \text{ kg/m}^3$, tak $m_p \approx 1,7 \text{ kg}$ a konečne $\ell \gtrsim 22 \text{ m}$.

3.4 Strela z merania

vzorák <meno> a <meno>, opravoval Stano

3.5 Nebezpečné zviera

vzorák Tomáš, opravoval Tomáš

Ak vedúci vidia žraloka plávať od jedného okraja akvária po druhý okraj, tak zjavne žralok pláva po kružnici s najväčším možným polomerom r , aby ho videli celý čas. Keď sa vedúci pozrú na okraj akvária, ich zorný

¹Premyslite si, prečo ho budú vracat. Odporúčame si nakresliť obrázok so všetkými silami.

²Ešte poznamenajme, že toto bude fungovať, len ak tyče nesúce závažia sú schopné prenášať priečne sily. Napríklad s lanami by to fungovať nevedelo. Rozmyslite si prečo.

³Keby boli ponorené celé topánky, museli by sme započítať aj tlakovú silu vody pôsobiacu na hornej strane topánok, a tá by mala pochopiteľne pôsobisko navrchu. Tu predpokladáme v súlade so zadáním, že ponorená je len podrážka, aby nohy zostali v suchu.

⁴Pozorný čitateľ si iste všimol, že Jaro v tomto vzoráku trochu prikrášlil Tomášovu hmotnosť.

lúč je dotyčnicou k povrchu akvária, kde nastáva lom svetla podľa Snellovho zákona lomu

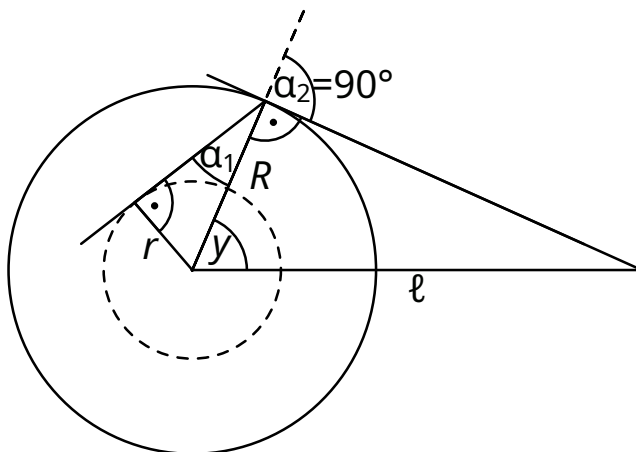
$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2,$$

kde n_1, n_2 sú indexy lomu dvoch prostredí a α_1, α_2 sú uhly, ktoré zvierajú lúč svetla s kolmicou na rozhranie prostredí. Nech je prostredie 2 vzduch, čiže $\alpha_2 = 90^\circ$, preto $\sin \alpha_2 = 1$. Navyše, index lomu vzduchu je $n_2 = 1$, takže v Snellovom zákone lomu je vlastne zbytočné ho písať, keďže to zodpovedá násobeniu jednotkou. Odteraz preto označujeme index lomu vody jednoducho n . Preto máme Snellov zákon lomu v tvare

$$n \sin \alpha_1 = 1. \quad (3.5.1)$$

Po nakreslení obrázka 3.5.1 vidíme pravouhlý trojuholník s odvesnou r a preponou R , z ktorého vieme vyjadriť

$$\sin \alpha_1 = \frac{r}{R}. \quad (3.5.2)$$



Obrázok 3.5.1: Žralok videný na okraji akvária

Z rovníc 3.5.1 a 3.5.2 poznáme $\sin \alpha_1$, ktorých porovnaním dostávame, že maximálny polomer kružnice, po ktorej môže žralok plávať, aby bol stále viditeľný, je

$$r = \frac{R}{n}.$$

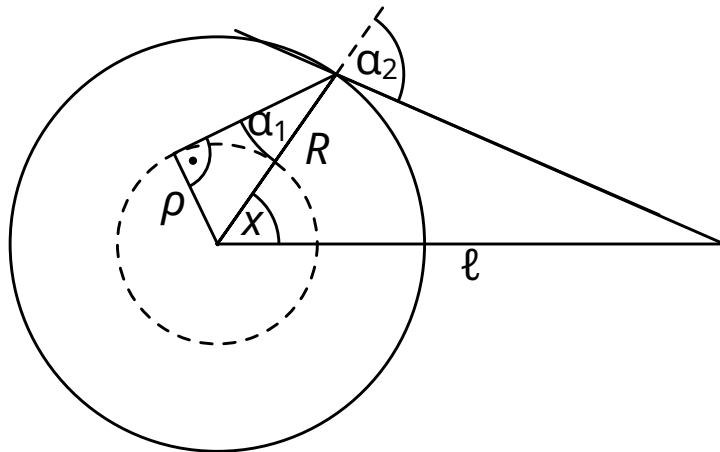
Odteraz nech žralok pláva po kružnici s polomerom $\rho < r$, čiže je stále viditeľný. Ak vedúci vidia žraloka v maximálnej uhlovej vzdialenosti x od stredu akvária a medzi stredom a okrajom akvária je uhlová vzdialenosť y , tak časť viditeľného povrchu akvária, cez ktorú vidno žraloka je jednoducho x/y .

Ak sa vedúci teraz pozrú na žraloka v momente, keď ho vidia najďalej od stredu, tak ich zorný lúč už nebude dotyčnicou k povrchu akvária. Preto píšeme Snellov zákon lomu

$$n \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2.$$

Na obrázku 3.5.2 máme v akváriu pravouhlý trojuholník s preponou R , tentoraz však s odvesnou ρ , čiže $\sin \alpha_1 = \rho/R$, čo po dosadení do Snellovho zákona lomu dáva

$$n \frac{\rho}{R} = \sin \alpha_2. \quad (3.5.3)$$



Obrázok 3.5.2: Žralok plávajúci po kružnici s polomerom ρ

Ešte by bolo treba niečo spraviť s uhlom α_2 . Preto využijeme trojuholník s vrcholmi v strede akvária, pri vedúcich a v bode lomu svetla na rozhraní. Ak ℓ je vzdialenosť od vedúcich po stenu akvária, tak použijúc sínusovú vetu a uvedomujúc si, že $\sin(\pi - \alpha_2) = \sin \alpha_2$, máme

$$\frac{R + \ell}{\sin \alpha_2} = \frac{R}{\sin(\alpha_2 - x)},$$

čiže

$$\sin(\alpha_2 - x) = \frac{R}{R + \ell} \sin \alpha_2.$$

Teraz za $\sin \alpha_2$ na pravej strane dosadíme rovnicu 3.5.3 a z oboch strán spravíme arkussínus, preto

$$\alpha_2 - x = \arcsin\left(\frac{n\rho}{R + \ell}\right).$$

Už len vyjadríme x a opäť dosadíme to isté za α_2 , preto je

$$x = \arcsin\left(n \frac{\rho}{R}\right) - \arcsin\left(\frac{n\rho}{R + \ell}\right).$$

Zostáva vyjadriť uhol y , ktorý je z obrázka 3.5.1

$$y = \arccos\left(\frac{R}{R + \ell}\right).$$

Časť viditeľného povrchu akvária, cez ktorý vedúci vidia žraloka je teda

$$\frac{x}{y} = \frac{\arcsin\left(n \frac{\rho}{R}\right) - \arcsin\left(\frac{n\rho}{R+l}\right)}{\arccos\left(\frac{R}{R+l}\right)}.$$

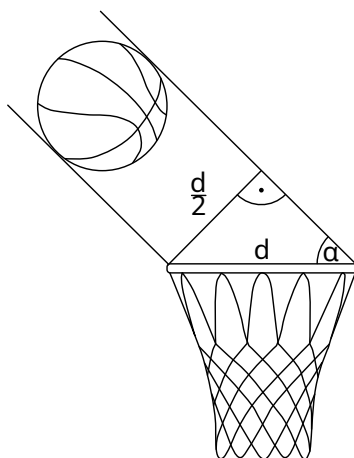
3.6 Shot direct

vzorák **Tomáš**, opravoval **Tomáš**

Ahojte. Ja, súc poznačený dvomi semestrami nebeskej mechaniky, som dostal nápad, ako riešiť túto úlohu. Lopta sa bude hýbať po parabole a my túto parabolu vyjadríme dvomi spôsobmi – pomocou geometrie a pomocou fyziky, a potom tieto dve vyjadrenia porovnáme (v nebeskej mechanike sa takto dvomi spôsobmi opisujú kuželosečky, najčastejšie elipsy).

Čo potrebujeme poznať, aby sme jednoznačne určili parabolu? No predsa tri body ležiace na parabole, lebo v jej predpise sú tri koeficienty. My vieme, že lopta ide z Patrikových rúk do koša. To sú dva body. Ale my nepotrebujeme nutne poznať tri body. Stačí nám poznať dva a sklon dotyčnice k parabole v jednom bode, teda deriváciu⁵. Tento sklon zistíme z podmienky, že Patrik chce hodiť loptu pod čo najmenším uhlom. Patrik môže loptu hodiť veľmi vysoko, a vtedy lopta padne cez obruč skoro kolmo dole. Môže ju hodiť aj pod plytším uhlom (a menšou rýchlosťou), kvôli čomu lopta preletí cez kôš už nie až tak kolmo dole. No a najmenší uhol, pod ktorým Patrik môže hodiť loptu je taký, kde lopta len štrajchne prednú časť obruče zvrchu a zadnú zospodu.

Keďže kôš je oveľa menší ako vzdialenosť Patrika od koša, predpokladajme, že na malom úseku lopta prechádza obručou po priamke. To nám umožňuje určiť uhol (deriváciu), pod ktorým prejde obručou, čo je znázornené na obrázku 3.6.1.



Obrázok 3.6.1: Lopta letiaca skrz obruč

⁵Ak nevieš derivovať, čítaj ďalej po rovnicu 3.6.1, a potom skipni na koniec vzoráku.

Ak obruč má priemer d a lopta $d/2$, tak jednoducho vyjadríme uhol α z pravouhlého trojuholníka ako

$$\sin \alpha = \frac{d/2}{d} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ. \quad (3.6.1)$$

Teraz si povedzme, že lopta opustí Patrikove ruky vo výške $h_0 = 2$ m a jeho vodorovná súradnica je nulová. Kôš nech je vzdialený $l = 7$ m od Patrika a je $h_1 = 3$ m vysoko. Lopka teda prechádza bodmi $[0, h_0]$ a $[l, h_1]$. Všeobecný predpis paraboly je

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Po dosadení polohy Patrikových rúk do tohto predpisu dostávame, že $c = h_0$, lebo

$$h_0 = 0 + 0 + c \Rightarrow h_0 = c.$$

Po dosadení druhého bodu máme

$$h_1 = al^2 + bl + h_0. \quad (3.6.2)$$

Teraz zderivujeme všeobecný predpis paraboly, čiže

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b,$$

čo vyčíslené pre kôš ($x = l$) dáva

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=l} = 2al + b.$$

Túto deriváciu my poznáme, pretože derivácia je tangens sklonu α . Musíme však pridať aj mínusko, lebo derivácia je pri klesaní cez kôš záporná. Preto

$$2al + b = -\tan \alpha \Rightarrow b = -\tan \alpha - 2al. \quad (3.6.3)$$

Toto vyjadrenie b dosadíme do rovnice 3.6.2, čím dostávame

$$h_1 = al^2 + (-\tan \alpha - 2al)l + h_0 \Rightarrow a = -\frac{\tan \alpha}{l} - \frac{h_1 - h_0}{l^2}.$$

Spätným dosadením tohto a do rovnice 3.6.3 máme

$$b = 2\frac{h_1 - h_0}{l} + \tan \alpha.$$

Super, už sme vyjadrili parabol z geometrických podmienok, čím sme dostali jej predpis

$$y = \left(-\frac{\tan \alpha}{l} - \frac{h_1 - h_0}{l^2} \right) x^2 + \left(2\frac{h_1 - h_0}{l} + \tan \alpha \right) x + h_0. \quad (3.6.4)$$

Teraz si vyjadrime parabolu vďaka, že za jej tvar môže gravitačné zrýchlenie. Ak Patrik hodí loptu rýchlosťou v_0 pod uhlom β voči vodorovnému smeru, jej výška sa bude v čase t meniť ako

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \beta + h_0. \quad (3.6.5)$$

Čas t musíme prerobiť na vodorovnú vzdialenosť x , aby sme to vedeli porovnať s rovnicou 3.6.4. Keďže vodorovná zložka rýchlosti sa nemení, celý čas je rovná $v_0 \cos \beta$, preto vzdialenosť x prejde za čas $t = x/(v_0 \cos \beta)$. Preto sa z rovnice 3.6.5 stane

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \beta} + x \tan \beta + h_0. \quad (3.6.6)$$

Bingo! Už len porovnáme koeficienty pri x v rovniciach 3.6.4 a 3.6.6, odkiaľ máme pre hodnoty zo zadania

$$\tan \beta = \frac{2}{l}(h_1 - h_0) + \tan \alpha = \frac{2}{7} + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta = 40,80^\circ.$$

Patrik teda musí hodiť loptu minimálne pod uhlom $40,80^\circ$, aby trafil čistý kôš. Ak by sme chceli zistiť aj rýchlosť v_0 , porovnáme koeficienty pri x^2 v rovniciach 3.6.4 a 3.6.6.

Ak nevieš derivovať

Ak nevieš derivovať, stále vieš zistiť, že lopta musí prejsť košom pod uhlom $\alpha = 30^\circ$. V takom prípade pre pomer vodorovnej rýchlosti v_x a zvislej rýchlosti v_y lopty platí

$$\tan \alpha = \frac{|v_y|}{|v_x|}.$$

Ak Patrik hodí loptu rýchlosťou v_0 pod uhlom β voči vodorovnému smeru, tak $v_x = v_0 \cos \beta$. Cesta do koša jej preto trvá $t = l/(v_0 \cos \beta)$, kde $l = 7$ m je vodorovná vzdialenosť od Patrika ku košu. A keďže pre zvislú zložku rýchlosti platí $v_y = v_0 \sin \beta - gt$, tak po dosadení t dostávame, že po prejdení vodorovnej dráhy l je

$$\tan \alpha = \frac{|v_0 \sin \beta - gt|}{|v_0 \cos \beta|} = \frac{gt - v_0 \sin \beta}{v_0 \cos \beta} = \frac{g \frac{l}{(v_0 \cos \beta)} - v_0 \sin \beta}{v_0 \cos \beta}.$$

Zatiaľ máme jednu rovnicu pre dve neznáme v_0 a β , potrebovali by sme preto ešte jednu. Zvislá zložka rýchlosti sa v čase mení ako $v_y = v_0 \sin \beta - gt$. Na vrchole paraboly je $v_y = 0$, a preto lopte trvá vystúpať do maximálnej výšky čas $t = v_0 \sin \beta / g$. A ak od celkového času odčítame čas stúpania, zistíme, že v druhej časti paraboly lopta klesala čas $l/(v_0 \cos \beta) - v_0 \sin \beta / g$. Teraz si len treba uvedomiť, kôš je o meter vyššie ako Patrikove ruky, teda lopta nastúpala o meter viac ako klesla. To rovnicou zapíšeme ako

$$\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin \beta}{g}\right)^2 - \frac{1}{2}g\left(\frac{l}{(v_0 \cos \beta)} - \frac{v_0 \sin \beta}{g}\right)^2 = 1 \text{ m.}$$

Tak už máme dve rovnice, z ktorých vieme (asi?) vyjadriť v_0 a β . Najjednoduchšie je spoľahnúť sa na Wolfram Alpha, odkiaľ máme výsledok $\beta = 40,80^\circ$.

3.7 Excentrická

vzorák Kvík, opravoval Kvík

Hádám vás ani veľmi neprekvapí, že ani s týmito zjednodušujúcimi predpokladmi úloha nemá presné analytické riešenie. S niekoľkými aproximáciami sa však vieme dostať k rozumne presnému výsledku iba s trochou znalostí o elipse a druhým Keplerovým zákonom. Na začiatok si ale musíme vyjasniť zopár vecí.

O pôvode dní

Astronómovia vo všeobecnosti rozlišujú prinajmenšom tri rôzne roky. Ich dĺžky sa trochu líšia kvôli rôznym slabým, ale merateľným efektom. Pre túto úlohu nie sú veľmi podstatné, keďže by nám výpočet značne skomplikovali, ale jadro úlohy ani výsledok veľmi nezmenia. Tieto roky sú:

- *Siderický*, dlhý 365,256 363 dňa – to je perióda, po ktorej sa Zem vráti do rovnakého miesta voči vzdialeným hviezdám, teda v inerciálnej sústave.
- *Tropický*, dlhý približne 365,2422 dňa, čo je perióda, po ktorej sa Slnko vráti na rovnaké miesto voči jarnému bodu, teda čas medzi dvomi rovnodennosťami.
- a nakoniec *anomalistický*, dlhý až 365,259 636 dňa, čiže perióda medzi dvomi prechodmi perihéliom.

Rozdiely nie sú veľké, iba zopár minút, ale predsa. V tejto úlohe všetky takéto efekty (stáčanie perihélia, precesiu zemskej osi, ...) môžeme explicitne zanedbať. Budeme preto uvažovať Juliánsky rok, dlhý presne $\gamma = 365,25 \text{ d} = 31\,557\,600 \text{ s}$, s ktorým sa nám bude počítať o trochu lepšie.

Čo to ale vlastne je „jeden deň“? Obvykle (a tiež v predchádzajúcom texte) sa takto označuje takzvaný *stredný solárny deň*, čiže priemerný čas medzi dvomi po sebe nasledujúcimi poludniami. Ten ale nie je daný periódou rotácie Zeme okolo vlastnej osi v inerciálnej sústave (resp. voči vzdialeným hviezdám, ktoré sú na našich časových škálach prakticky nehybné), ale voči Slnku: totiž to je tá vec, ktorá nás na povrchu zaujíma najviac.

Lenže ako tvrdí aj zadanie úlohy, táto perióda sa počas roka trochu mení. Preto počítame dlhodobý priemer a až vtedy máme akú-takú istotu, že aj o milión dní bude poludnie stále približne v rovnakom čase. Dĺžka stredného solárneho dňa je neprekvapivo $24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 86\,400 \text{ s}$.⁶

Keďže však Zem rotuje *prográdne*, teda v rovnakom smere ako obieha⁷, za každý rok nám v skutočnosti zdanlivo jedno otočenie ubudne: voči vesmíru sme sa otočili ešte o jednu otočku navyše, teda až 366,25-krát a naša skutočná rotačná perióda v nerotujúcej sústave, čiže *siderický deň*, nie je 86 400 s, ale iba

$$T = \frac{365,25}{365,25 + 1} \cdot 86\,400 \text{ s} \doteq 86\,164 \text{ s}. \quad (3.7.1)$$

Ak by sa Zem točila naopak, teda *retrográdne*, jedna obrátka by nám takto pribudla.

Pri pohľade zo Zeme to vyzerá tak, že každý deň Slnko prejde po oblohe z východu na západ, rovnako ako hviezdy, ale o trochu pomalšie. Tento rozdiel rýchlostí sa počas roka navyše mení. Ak by sme dokázali oblohu zafixovať, videli by sme, ako Slnko prejde po oblohe každý rok len raz, a to opačným smerom, než akým sme zvyknutí, teda zo západu na východ. Kto neverí, môže si to vyskúšať napríklad v Stellariu.

Teda aby sme to zhrnuli: za jeden siderický deň sa Zem otočí presne o 360° , ale zároveň sa o malý kúsok posunie a teda nám Slnko o malý kúsok ujde. Preto musí Zem točiť nadčasy – konkrétne ešte toľko, o aký uhol $\Delta\varphi$ sa posunula na svojej dráhe (a za ten čas sa opäť trochu posunie, takže sa musí točiť ešte chvíľu, a tak ďalej, ale to už odignorujeme). V priemere to je tých chýbajúcich 236 sekúnd každý deň, ale keďže dráha nie je kružnica, v perihéliu je to o niečo viac a v aféliu o niečo menej. A my chceme nájsť takú excentricitu, pre ktorú bude tento rozdiel 3600 s.

⁶Takto bola definovaná sekunda, a pre bežné účely je to stále celkom dobrá definícia. Až presné výpočty a merania potrebujú tú *novú*, vyrobenú z merania frekvencií žiarenia atómu ^{133}Cs .

⁷Rigoróznejšie povedané, uhol medzi jej rotačným a orbitálnym momentom hybnosti je $\leq 90^\circ$. Venuša to tak nemá.

Všimnime si ešte, že **priemerný** deficit sa nemení: rotačná rýchlosť je konštantná a obežná doba tiež, keďže závisí iba od hlavnej polosi a , ktorá sa zmeniť nesmie.

Samotný výpočet

Ak by Zem obiehala po kružnici, teda elipse s excentricitou $e = 0$, obežná aj rotačná rýchlosť by boli konštantné a všetky dni by boli rovnako dlhé. Skutočná dráha Zeme, aspoň teda nakoľko ju vieme aproximovať elipsou, ale úplne kruhová nie je: má síce malú, ale nezanedbateľnú excentricitu, približne 0,0167.

Teraz príde čas na ďalšie zjednodušenia a zanedbania. Pomôžeme si tým, že nebudeme rátať presnú, konečnú zmenu uhla, ale iba samotnú rýchlosť v aféliu a perihéliu, ktorú potom budeme počas jedného dňa považovať za konštantnú. Pre takýto veľký pomer dĺžky dňa a roka si to môžeme dovoliť, keďže každý deň sa Zem posunie na svojej dráhe sotva o 1° . Pre planétu, ktorej rok by mal iba povedzme 10 dní, by to ale nešlo.

Podľa druhého Keplerovho zákona (čo je len prezlečený zákon zachovania momentu hybnosti) je plošná rýchlosť na dráhe konštantná: za rovnaký čas spojnice Zeme so Slnkom „pozametá“ vždy rovnakú plochu. Jej hodnota nás netrápi, je to jednoducho nejaká konštanta spojená s momentom hybnosti Zeme, ale označme si ju $C/2$.

Priemerná uhlová rýchlosť na dráhe je z definície $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{y}$, a zároveň plošná rýchlosť krát jeden rok musí byť rovná ploche celej elipsy. Plocha elipsy je

$$\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}, \quad (3.7.2)$$

takže

$$\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{C}{2} y = \frac{2\pi C}{2\bar{\omega}} \Rightarrow \bar{\omega} = \frac{C}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} \doteq \frac{236}{86400} \quad (3.7.3)$$

obehu za jeden deň.

Uhlovú rýchlosť v perihéliu (ω_q) a aféliu (ω_Q) vieme zistiť priamo zo zachovania momentu hybnosti: poznáme vzdialenosť a poznáme plošnú rýchlosť, takže

$$\omega_q = \frac{C}{q^2} = \frac{C}{a^2(1 - e)^2} \quad \text{a} \quad \omega_Q = \frac{C}{Q^2} = \frac{C}{a^2(1 + e)^2}. \quad (3.7.4)$$

Pomer rýchlostí musí byť prevráteným pomerom vzdialeností, keďže $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ je konštantné a navyše v krajných bodoch elipsy sú na seba vektor rýchlosti a polohy kolmé, takže stačí brať obyčajný súčin. A ešte k tomu platí aj úmernosť $v = \omega r$. No a čo je najdôležitejšie, pomer uhlových obežných rýchlostí je dosť dobre úmerný deficitu rotácie, ktorý Zem počas jedného dňa naberie. Teda ak vieme dať do pomeru ω_q a ω_Q , máme vyhraté.

Teraz už len potrebujeme, aby posun Zeme na jej dráhe počas „najrýchlejšieho“, a teda najdlhšieho dňa, bol $\frac{1}{24}$ celej dráhy, čiže asi 15° . Ako každý deň, sprievodič ale opíše iba $\frac{1}{365,25}$ plochy orbity. Ak drobný posun v aféliu zanedbáme – čiže sa tvárime, ako keby tam bol tropický deň rovnako dlhý ako siderický – dostávame rovnicu

$$\frac{\omega_q - \omega_Q}{\bar{\omega}} = \frac{15^\circ}{\text{deň}}, \quad (3.7.5)$$

čo vieme s pomocou rovnice 3.7.4 vymasírovať do podoby

$$\frac{\frac{C}{a^2(1-e)^2} - \frac{C}{a^2(1+e)^2}}{\frac{C}{a^2\sqrt{1-e^2}}} \stackrel{!}{=} \frac{3600}{236}. \quad (3.7.6)$$

To sa dá ďalej upraviť do tvaru

$$\frac{4e\sqrt{1-e^2}}{(1+e)^2(1-e)^2} = \frac{3600}{236}, \quad (3.7.7)$$

ktorý už Wolfram Alpha bez problémov vyrieši a povie, že $e \approx 0,8036$.

Korekcia prvého rádu

Ak chceme byť o niečo presnejší, pripočítame ešte jednu opravu: to, o koľko sa Zem za tú extra hodinu posunie po dráhe, a teda o koľko viac sa musí otočiť. V perihéliu je uhlová rýchlosť dosť veľká a sprievodič opíše až $\frac{25}{24 \cdot 365,25}$ plochy orbity. Dostávame teda

$$\frac{\frac{25}{24}\omega_q - \omega_Q}{\bar{\omega}} = \frac{\frac{15^\circ}{\text{deň}}}{\bar{\omega}}, \quad (3.7.8)$$

a

$$\frac{\frac{25}{24} \frac{C}{a^2(1-e)^2} - \frac{C}{a^2(1+e)^2}}{\frac{C}{a^2\sqrt{1-e^2}}} \stackrel{!}{=} \frac{3600}{236}, \quad (3.7.9)$$

čo sa dá utĺcť do tvaru

$$\frac{\sqrt{1-e^2}(e^2 + 98e + 1)}{(1+e)^2(1-e)^2} = \frac{86400}{236}. \quad (3.7.10)$$

Aj s tým si Wolfram|Alpha opäť ľahko poradí a povie nám, že presnejšie riešenie je $e \approx 0,798466$. Takto by sa dalo pokračovať a pridať ďalšie členy, ale nemá to úplne zmysel: presnosť čoskoro prekoná chybu, ktorú sme spôsobili našimi aproximáciami.

Numerické riešenie

Presnejší výsledok by sme dostali, keby sme ráтали aj so zmenou orbitálnej rýchlosti aj počas jedného dňa. Nezaobišli by sme sa však bez integrovania, a aj to nie práve estetických funkcií. Pre získanie odhadu chyby si ale môžeme napísať numerickú simuláciu, ktorá nám riešenie nájde s rozumnou presnosťou.

Prípadne by sme si mohli ešte napísať vonkajšiu funkciu, ktorá simuláciu spustí viackrát a správnu hodnotu nám sama binárne vyhľadá, ale keďže prvotný odhad máme celkom dobrý, vieme to rýchlo spraviť aj ručne. Dozvedáme sa, že presnejším riešením by bola hodnota $e \approx 0,7992$, čo sa od nášho pomerne hrubého riešenia líši len minimálne.

Pre porovnanie môžeme skúsiť náš výpočet vyhodnotiť pre známu skutočnú hodnotu zemskej excentricity $e \approx 0,016709$. Z rovnice 3.7.4 vyjadríme pomer

$$\frac{\omega_q}{\omega_Q} = \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^2 \doteq 0,935.$$

Rozdiel medzi najdlhším a najkratším dňom potom bude približne $(1 - 0,935) \cdot 236 \text{ s} \doteq 15,25 \text{ s}$, zatiaľ čo simulácia tvrdí, že by to malo byť asi 15,81 s. A to je v zhode s **časovou rovnicou**, ak z nej vyberieme len člen pre excentricitu (pozor na to, že na Wikipédii je to počítané v minútach a nie sekundách).

Komentár opravovateľa

Riešenie sa zjavne dalo vybúchať viacerými celkom odlišnými spôsobmi. Pokiaľ vám vyšla aspoň trochu rozumná hodnota okolo $e \approx 0,8$, bolo to aspoň za 6 bodov, zvyšok závisel od zrozumiteľnosti medzikrokov. Asi najspokojnejší som bol s riešením Dávida Lučivňáka.

Takisto sa to dalo celkom rozumne doškálovať, ak ste našli správny vzorec na Wikipédii, akurát si bolo treba dať pozor, že časová rovnica popisuje až *integrál*, resp. parciálne súčty toho, čo tu skúmame – teda rozdiel medzi poludním rovnomerne plynúceho času na hodinách a skutočného poludnia, ako ho vidíme na oblohe, nie dĺžku jednotlivých dní.