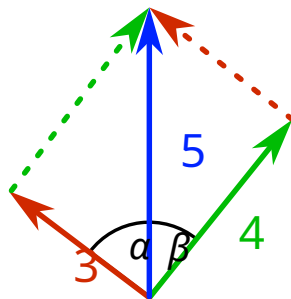


## Riešenia 2. kola letnej časti

### 2.1 Estetická rovnováha

vzorák KatkaN, opravovala KatkaN

Načrtáme si do obrázka sily pôsobiace v bode závesu stredného obrazu a doplníme ich do rovnobežníka.



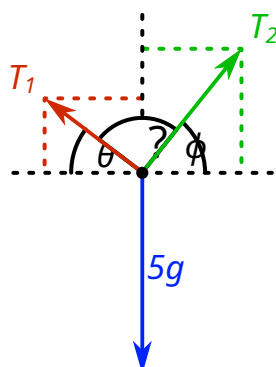
Obrázok 2.1.1: Skladanie síl pôsobiacich na bod závesu najťažšieho obrazu

Už na prvý pohľad v našom nákrese spoznáme Pytagorov trojuholník. Medzi zeleným a červeným vektorom je teda pravý uhol. Teraz nám už len zostáva určiť hľadaný uhol, teda súčet  $\alpha + \beta$ . Keďže ale uhly v trojuholníku majú dohromady súčet  $180^\circ$ , tak  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

Hľadaný uhol je rovný  $90^\circ$ . Takýto uhol budú lanká zvierat vždy, keď budú hmotnosti zavesených malieb spĺňať Pytagorovu vetu  $a^2 + b^2 = c^2$ , pričom  $a$  a  $b$  budú hmotnosti krajných obrázkov.

K tejto úlohe sa dalo pristúpiť aj druhým spôsobom. Ak sú všetky maľby v rovnováhe, potom musia byť splnené podmienky stability. Vodorovné aj zvislé zložky síl pôsobiacich na každú maľbu sa musia navzájom vynulovať.

Pozrime sa na sily pôsobiace na stredný obraz a na ich priemety do  $x$  a  $y$  osi.



Obrázok 2.1.2: Sily pôsobiace na bod závesu stredného obrazu

Pre horizontálne zložky síl musí platiť rovnosť

$$T_1 \cos \theta = T_2 \cos \varphi$$

a pre vertikálne zložky zasa

$$T_1 \sin \theta + T_2 \sin \varphi - 50 \text{ N} = 0.$$

Aby sa lano nenaťahovalo ani nekrčilo, musí platiť

$$T_1 = 30 \text{ N} \quad \text{a} \quad T_2 = 40 \text{ N}.$$

Riešime sústavu rovníc o dvoch neznámych. Zasubstituuujeme  $\cos \theta = x$  a  $\cos \varphi = y$  a využitím vzťahu pre súčet štvorcov sínusu a kosínusu, dosadíme z prvej rovnice vyjadrený  $y$  cez  $x$  a získame rovnicu

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad 30\sqrt{1-x^2} + 40\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}x\right)^2} - 50 = 0. \quad (2.1.1)$$

Táto rovnica má výsledky

$$x = \pm \frac{4}{5} \quad \text{a} \quad y = \pm \frac{3}{5}.$$

Vidíme, že sme dostali zakaždým štyri možnosti, uhly  $\pm\theta$ ,  $180^\circ \pm \theta$ . Táto štvorakosť riešení vyplýva z druhej mocniny  $x$  v rovnici 2.1.1 a z vlastností goniometrických funkcií. Fyzikálne sú však len dve riešenia. Keď si totiž na obrázku predstavíme hodnoty uhlov  $\theta = 180^\circ + 36,87^\circ$  a  $\varphi = 180^\circ + 53,13^\circ$ , resp.  $\theta = -36,87^\circ$  a  $\varphi = -53,13^\circ$ , vidíme, že všetky tri sily pôsobia smerom nadol, čo v prípade visiacich obrazov nemôže nastať.

Zoberme si teda zvyšné dve riešenia. Keď si nakreslíme malý náčrtok, hneď zbadáme, že tieto riešenia sú ekvivalentné, akurát prevrátené okolo zvislej osi. Stačí nám teda uvažovať jedno z riešení, napríklad  $\theta = 36,87^\circ$  a  $\varphi = 53,13^\circ$ . Keďže

$$\theta + ? + \varphi = 180^\circ,$$

dostávame výsledný hľadaný uhol  $90^\circ$ . Je dobré dodať, že z tohto postupu nie je tak priamočiaro, ako z prvého postupu, vidieť, akú podmienku musia spĺňať hmotnosti obrazov, aby laná zvierali pravý uhol.

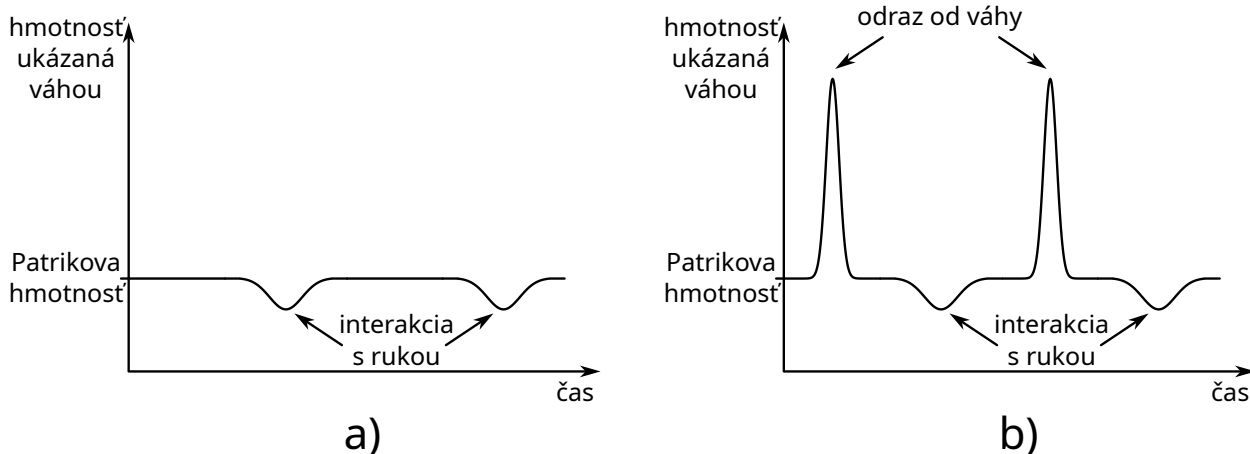
## 2.2 Veľavážený volejbalista

vzorák MatusH, opravoval Dano

Váha vlastne nemeria priamo hmotnosť, ale silu, ktorá na ňu pôsobí. Keďže ale na Zemi pôsobí na teleso s hmotnosťou  $m$  tiažová sila  $mg$ , tak ak poznáme  $g$ , tak váha vie ukázať hmotnosť. Teraz sa zamyslime, ako sa tento údaj o hmotnosti bude meniť počas Patrikovho driblovania o podlahu. Keď je lopta vo vzduchu, váha bude ukazovať Patrikovu hmotnosť. Avšak, akonáhle sa lopta začne dotýkať Patrikovej ruky, tak ňou bude spomaľovaná (urýchľovaná smerom ku podlahe). Patrik na ňu bude pôsobiť silou  $a$ , z 3. Newtonovho zákona, aj lopta na Patrika bude pôsobiť presne rovnakou silou. V tom momente teda na Patrika pôsobí tiažová sila, sila od lopty a sila od samotnej váhy. Posledné dve pôsobia smerom hore a teda v súčte musia byť rovné tiažovej sile. Z toho už vieme povedať, že váha bude ukazovať Patrikovu hmotnosť a v periodických intervaloch sa toto číslo o niečo zmenší.

V prípade b) bude prebiehať všetko rovnako ako v prípade a), no navyše musíme zistiť, čo sa bude diať pri odraze lopty od váhy. Aby lopta zmenila smer, váha na ňu musí pôsobiť silou smerom nahor, a teda lopta pôsobí na váhu silou smerom nadol. Tá sa sčíta s Patrikovou tiažovou silou a váha bude na chvíľu ukazovať viac ako Patrikovu hmotnosť.

Nakoniec môžeme ešte porovnať priebehy hmotnosti ukazovanej váhou pri odraze a pri interakcii s rukou. Dá sa predpokladať, že pri odraze od váhy lopta zmení rýchlosť oveľa rýchlejšie, čo znamená, že na váhu bude pôsobiť krátko ale zato veľkou silou. Naopak, pri interakcii s rukou sa ruka samotná hýbe a lopta je spomalená postupne. Číslo na váhe sa teda zmení menej, ale bude zmenené dlhší čas. Náčrt toho čo bude ukazovať váha je znázornený na obrázku.



Obrázok 2.2.1: Náčrt priebehu hmotnosti ukazovanej váhou v prípade a) a b)

## 2.3 Detská zábavka

vzorák MatusH, opravoval MatusH

Ak balónik budeme ponárať, tak naň bude stále pôsobiť väčší a väčší tlak. Ten sa dá vyjadriť ako  $p' = p_0 + \rho_v g h$ , kde  $p_0$  je atmosférický tlak,  $\rho_v$  je hustota vody a  $h$  je hĺbka, v ktorej je ponorený balónik. V dôsledku toho bude zmenšovať svoj objem. Ak predpokladáme, že ho budeme ponárať dostatočne pomaly, resp. teplota vzduchu v balóniku bude stále rovnaká, tak plyn v balóniku bude vykonávať izotermický dej, pre ktorý platí

$pV = \text{konšt.}$  Objem balónika v závislosti od hĺbky teda vieme vyjadriť ako

$$V' = \frac{p_0 V_0}{p'} = \frac{p_0 V_0}{p_0 + \rho_v g h},$$

kde  $V_0$  je objem balónika nad hladinou.

Na to, aby sa balónik nevynoril, musí výslednica síl naň pôsobiacich smerovať ku dnu. Dohromady na sústavu balónik + kameň pôsobia tri sily. Tiažová sila kameňa, vztlaková sila kameňa a vztlaková sila balónika. Zanedbávame tiažovú silu balónika, nakoľko je malá vzhľadom na hmotnosť kameňa. Aby balónik klesal ku dnu, musí platiť

$$mg < \rho_v g \left( \frac{m}{g} + V' \right) = \rho_v g \left( \frac{m}{g} + \frac{p_0 V_0}{p_0 + \rho_v g h} \right),$$

kde  $m$  je hmotnosť kameňa a  $\rho$  je jeho hustota. Po sérii úprav z tohto vzťahu vieme vyjadriť hĺbku ako

$$h = \left( \frac{p_0 V_0 \rho \rho_v}{m(\rho - \rho_v)} - p_0 \right) \frac{1}{\rho_v g}.$$

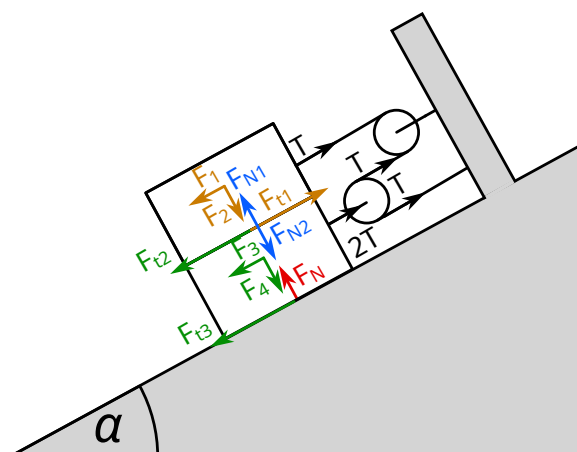
Po dosadení hodnôt zo zadania a  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  dostávame  $h \doteq 31 \text{ m}$ .

## 2.4 Hrátky kladky

vzorák Šimon, opravoval Šimon

V takýchto úlohách je dôležité si na začiatku uvedomiť, ktorým smerom sa sústava snaží hýbať, respektíve ktorým smerom by sa hýbala, keby sme zoberali do úvahy extrémny prípad (v tejto úlohe  $f = 0$ , keďže hľadáme minimálnu hodnotu  $f$ , pri ktorej sa sústava nehýbe). Ak by sa pohol spodný kváder smerom nadol o vzdialenosť  $\Delta x$ , vrchný by sa pohol smerom nahor o vzdialenosť  $2\Delta x$ , keďže dve časti lana, ktoré ťahajú spodný kváder, by sa obe predĺžili o  $\Delta x$  a dĺžka lana je konštantná. V takomto prípade by celková energia stúpala, čo by sa z hľadiska zákona zachovania energie nemalo stať. Preto budeme uvažovať, že sa spodný kváder snaží pohybovať nahor a vrchný nadol.

Zakreslíme si sily pôsobiace na jednotlivé kvádre (sily pôsobiace na spodný kváder zelenou a sily pôsobiace na vrchný kváder oranžovou). Tiažové sily  $F_g$  sa rozkladajú podľa uhla  $\alpha$  na  $F_1 = F_3 = mg \sin \alpha$  v smere pohybu a na  $F_2 = F_4 = mg \cos \alpha$  v smere kolmom na podložku. Normálová sila na spodný kváder od podložky je znázornená červenou a normálové sily od kvádrov navzájom sú znázornené modrou - veľkosť týchto síl je rovnaká. Ťahová sila je v lane všade rovnaká, ale na spodný kváder pôsobia dva úseky lana, čo znamená, že celkovo naň pôsobí ťahová sila  $2T$ , kde  $T$  je ťahová sila v lane.



Obrázok 2.4.1: Náskres Majovej stavby

Vrchný kváder (sily pôsobiace kolmo na podložku):

$$0 = F_{N1} - F_2 = F_{N1} - F_g \cos \alpha \quad \rightarrow \quad F_{N1} = mg \cos \alpha = F_{N2}. \quad (2.4.1)$$

Vrchný kváder (sily pôsobiace v smere pohybu):

$$0 = T + F_{f1} - F_1 = T + f F_{N1} - F_g \sin \alpha \quad \rightarrow \quad T + f F_{N1} = mg \sin \alpha. \quad (2.4.2)$$

Spodný kváder (sily pôsobiace kolmo na podložku):

$$0 = F_N - F_{N2} - F_4 = F_N - F_{N2} - F_g \cos \alpha \quad \rightarrow \quad F_N = mg \cos \alpha + F_{N2}. \quad (2.4.3)$$

Spodný kváder (sily pôsobiace v smere pohybu):

$$0 = 2T - F_{f2} - F_{f3} - F_3 = 2T - f F_{N2} - f F_N - F_g \sin \alpha \quad \rightarrow \quad 2T = f F_N + f F_{N2} + mg \sin \alpha. \quad (2.4.4)$$

Po dosadení  $F_{N1}$  z rovnice 2.4.1 do rovnice 2.4.2 a  $F_N$  z rovnice 2.4.3 do rovnice 2.4.4 dostávame

$$T + f mg \cos \alpha = mg \sin \alpha, \quad (2.4.5)$$

$$2T = f mg \cos \alpha + 2f F_{N2} + mg \sin \alpha. \quad (2.4.6)$$

Dosadíme  $T$  z rovnice 2.4.5 a  $F_{N2}$  z rovnice 2.4.1 do rovnice 2.4.6

$$2mg \sin \alpha - 2f mg \cos \alpha = f mg \cos \alpha + 2f mg \cos \alpha + mg \sin \alpha \quad \rightarrow \quad f = \frac{1}{5} \tan \alpha.$$

Minimálny koeficient trenia teda je  $f = \frac{1}{5} \tan \alpha$ . Ak by sme si zvolili nesprávny (opačný) smer pohybu kvádrov, dostali by sme  $f = -\frac{1}{5} \tan \alpha$ .

## 2.5 Bol raz jeden elektrónik

vzorák MatusH, opravoval MatusH

Najskôr si podme rozobrať situáciu. Na elektróny bude pôsobiť Lorentzova sila

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Prvý člen bude nulový, lebo elektrické pole je nulové. Druhý člen už nebude nulový, musíme však zistiť jeho smer. Pre výpočet vektorového súčinu môžeme využiť pravidlo pravej ruky. Preto, ak by sme si zaviedli súradnicový systém tak, že rýchlosti elektrónov sú v smere osi  $x$  a  $B$  je v smere osi  $z$ , tak vektor  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  bude v smere  $-y$ . Sila teda bude v smere  $y$ , keďže elektróny majú záporný náboj.

Aký pohyb budú ale elektróny vykonávať? Z vektorového súčinu vidno, že sila  $F$  bude vždy kolmá na aktuálnu rýchlosť a vždy bude mať nulovú komponentu v smere osi  $z$ . Keďže je vždy kolmá, tak nebude na elektróne konať prácu, a teda veľkosť rýchlosti elektrónu bude stále rovnaká. Zároveň bude elektrón stáčaný konštantnou silou, teda dostredivou silou. Polomer a uhlovú frekvenciu vieme vypočítať ako

$$\frac{mv^2}{r} = evB \quad \rightarrow \quad r = \frac{m}{eB}v \quad \text{a} \quad \omega = \frac{v}{r} = \frac{eB}{m}.$$

Využili sme pri tom, že veľkosť  $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = vB \sin \alpha$  kde  $\alpha$  je uhol medzi vektormi  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{B}$ . Dôležité zistenie je, že polomer kružnice budú mať elektróny rôzne, no uhlová rýchlosť bude rovnaká. Dráhy budú teda vyzeráť tak ako na obrázku 2.5.1.

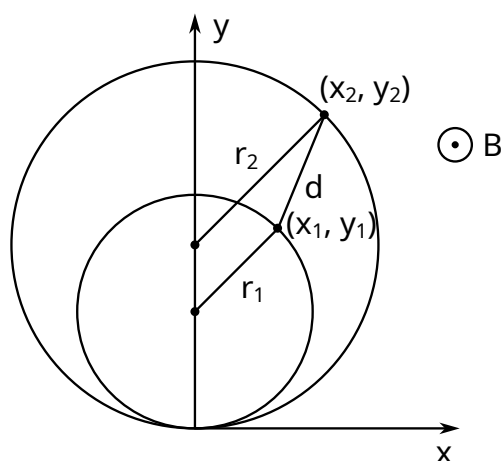
Stačí zistiť ako sa bude meniť ich vzájomná vzdialenosť. Na to si parametricky vyjadríme ich polohy ako

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ 1 - \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = r_2 \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ 1 - \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Vzájomnú vzdialenosť dostaneme ako veľkosť rozdielu polohových vektorov

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = (r_2 - r_1) \sqrt{\sin^2 \omega t + (1 - \cos \omega t)^2} \\ &= \frac{m(v_2 - v_1)}{eB} \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t + 1 - 2 \cos \omega t} = \frac{2m(v_2 - v_1)}{eB} \left| \sin \left( \frac{eB}{2m} t \right) \right| \end{aligned}$$

Využili sme pri tom trigonometrickú identitu  $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$ .



Obrázok 2.5.1: Pohľad na dráhy elektrónov v rovine  $xy$

## 2.6 Stabilné pružiny

vzorák <meno> a <meno>, opravoval ? <meno>

## 2.7 Do tretice všetko dobré

vzorák Jaro, opravoval MatusH

Medzi vedúcimi sa nenašiel nikto, kto by bol ochotný so mnou strácať čas, a tak si musíme moment zotrvačnosti trojuholníkového rámu zrátať sami. A keďže chceme mať istotu, že to máme zrátané dobre, urobíme to až na tri spôsoby. Začnime tým, že si ujasníme, čo to vlastne počítame.

Moment zotrvačnosti telesa okolo nejakej pevnej osi je daný ako súčet štvorcov vzdialeností všetkých elementíkov telesa od osi, vážený ich hmotnosťami,

$$J = \sum_i m_i r_i^2,$$

pričom elementíky môžu byť podľa potreby makroskopické i infinitezimálne. Kľúčom k vyriešeniu úlohy je teda správne si trojuholník rozdeliť a spočítať príspevky od jednotlivých častí (prípadne ho doplniť na niečo, čoho moment zotrvačnosti vieme nájsť jednoduchšie).

Takže hor sa do počítania!

### 1. spôsob - vyskladanie z paličiek

Jednou možnosťou je rozdeliť si trojuholník na 3 paličky. Moment zotrvačnosti paličky s hmotnosťou  $\mu$  a dĺžkou  $l$  okolo jej stredu buď poznáme –  $J_{||} = \frac{1}{12} \mu l^2$  – alebo ho nájdeme integrovaním alebo kombináciou škálovania a použitia Steinerovej vety<sup>1</sup>.

Trojuholník pozostáva z jednej paličky kolmej na os otáčania, ktorého moment zotrvačnosti je triviálne  $J_{\perp} = \frac{1}{12} \frac{m}{3} l^2$ , a z dvoch šikmých paličiek. Uvedomme si ale, že moment zotrvačnosti závisí len od kolmej vzdialenosti, preto moment zotrvačnosti naklonenej paličky (alebo ľubovoľne zalomenej paličky, ktorá má v

<sup>1</sup>Tento postup aplikovaný na trojuholníky aplikujeme v nasledujúcich spôsoboch.

každej vzdialenosti od osi rovnakú hmotnosť) je rovnaký ako moment zotrvačnosti kolmej paličky siahajúcej do takej istej vzdialenosti od osi ako naklonená palička a s rovnakou hmotnosťou, teda  $J_{\wedge} = \frac{1}{12} \frac{2}{3} m \ell^2 = \frac{1}{18} m \ell^2$ . Celkový moment zotrvačnosti trojuholníkového rámu okolo ťažnice je teda

$$J_{\Delta} = J_{|} + J_{\wedge} = \frac{1}{36} m \ell^2 + \frac{1}{18} m \ell^2 = \frac{1}{12} m \ell^2.$$

Toto ale nie je vôbec žiadne prekvapenie. Stačí, že si uvedomíme, že rovnostranný trojuholník má tú vlastnosť, že v každej vzdialenosti od osi otáčania (teda ťažnice) má rovnakú hmotnosť – presne ako palička. Preto aj jeho moment zotrvačnosti bude rovnaký ako moment zotrvačnosti paličky okolo stredy s rovnakou hmotnosťou a dĺžkou rovnou dĺžke strany trojuholníka.

## 2. spôsob – vyskladáním veľkého trojuholníka z troch malých

Uvažujme, že hľadaný moment zotrvačnosti bude výraz tvaru  $J_{\Delta} = k m \ell^2$ , kde  $k$  je nejaká bezrozmerná konštanta. Zoberme tri identické trojuholníky a vyskladajme ich tak, že z nich vytvoríme jeden veľký trojuholník so stranou  $2\ell$  rozdelený strednými priečkami. Moment zotrvačnosti takéhoto trojuholníka nájdeme ako súčet momentov zotrvačnosti jednotlivých trojuholníkov.

Využijeme pri tom Steinerovu vetu, ktorá hovorí, že ak moment zotrvačnosti nejakého telesa okolo osi prechádzajúcej jej ťažiskom je  $J_0$ , tak moment zotrvačnosti okolo osi rovnobežnej s touto osou, ktorá je vo vzdialenosti  $d$ , je  $J = J_0 + m d^2$ .

Takže moment zotrvačnosti zloženého trojuholníka je

$$J_{3\Delta} = J_{\Delta} + 2 \left( J_{\Delta} + m \left( \frac{\ell}{2} \right)^2 \right) = 3 k m \ell^2 + m \frac{\ell^2}{2}.$$

Zároveň ale možno uvažovaný zložený trojuholník považovať za útvar zložený z jedného veľkého trojuholníka so stranou  $2\ell$  a hmotnosťou  $2m$  a jedného na vrchol postaveného malého trojuholníka. Moment zotrvačnosti v takom prípade vyjadríme ako

$$J_{\Delta \nabla} = k 2m (2\ell)^2 + k m \ell^2 = 9 k m \ell^2.$$

Tieto dva momenty sa musia rovnať, čiže

$$3 k m \ell^2 + m \frac{\ell^2}{2} \stackrel{!}{=} 9 k m \ell^2 \quad \implies \quad k = \frac{1}{12},$$

teda hľadaný moment zotrvačnosti trojuholníka je  $J_{\Delta} = \frac{1}{12} m \ell^2$ .

## 3. spôsob – pomocou plného trojuholníka

Tentokrát začneme tým, že budeme uvažovať plný trojuholník so stranou  $\ell$  a plošnou hustotou  $\sigma$ . Moment zotrvačnosti takéhoto trojuholníka budeme opäť hľadať v tvare  $J_{\blacktriangle} = K M \ell^2$ , kde  $M = \sigma \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2$  je hmotnosť tohto trojuholníka.



Uvažujme teraz dvakrát taký veľký plný trojuholník. Jeho hmotnosť bude štvornásobná a jeho moment zotrvačnosti teda bude

$$J_{B\blacktriangle} = K4M(2\ell)^2 = 16KM\ell^2.$$

Zároveň možno ale tento trojuholník vyskladať zo štyroch malých plných trojuholníkov, takže možno jeho moment zotrvačnosti vyjadriť ako

$$J_{\blacklozenge+\blacktriangle+\blacktriangle+\blacktriangle} = 2KM\ell^2 + 2\left(KM\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right) = 4KM\ell^2 + M\frac{\ell^2}{2}.$$

Z rovnosti uvedených dvoch výrazov dostávame

$$16KM\ell^2 \stackrel{!}{=} 4KM\ell^2 + M\frac{\ell^2}{2} \implies K = \frac{1}{24}.$$

Moment zotrvačnosti plného trojuholníka je teda  $J_{\blacktriangle} = \frac{1}{24}M\ell^2$ , alebo vyjadrené pomocou plošnej hustoty  $J_{\blacktriangle} = \frac{\sqrt{3}}{96}\sigma\ell^4$ .

Moment zotrvačnosti prázdneho trojuholníka potom dostaneme ako prírastok momentu zotrvačnosti plného trojuholníka, keď jeho hranu predĺžime o  $\Delta\ell$ , čiže

$$J_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{96}\sigma(\ell + \Delta\ell)^4 - \frac{\sqrt{3}}{96}\sigma\ell^4 \approx \frac{\sqrt{3}}{24}\sigma\ell^3\Delta\ell.$$

Problém s týmto vyjadrením je, že v ňom vystupuje plošná hustota plného trojuholníka. Náš dutý trojuholník však nič také ako plošná hustota nemá. Potrebujeme ju teda prepočítať na dĺžkovú hustotu dutého trojuholníka.

To urobíme tak, že uvážime, ako sa zmení hmotnosť plného trojuholníka, keď ho zväčšíme. Dostaneme

$$\Delta M = \sigma\frac{\sqrt{3}}{4}(\ell + \Delta\ell)^2 - \sigma\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2 \approx \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\ell\Delta\ell.$$

Tento prírastok hmotnosti ale musí zodpovedať hmotnosti prázdneho trojuholníka  $m = \lambda 3\ell$ , čiže

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\ell\Delta\ell \stackrel{!}{=} 3\lambda\ell \implies \sigma\Delta\ell = 2\sqrt{3}\lambda.$$

Moment zotrvačnosti prázdneho trojuholníka je teda

$$J_{\triangle} = \frac{1}{4}\lambda\ell^3 = \frac{1}{12}m\ell^2.$$

### Bonus – integrovanie

Ďalším spôsobom, ako nájsť moment zotrvačnosti prázdneho trojuholníka, je ho priamo zintegrovať. Keďže ale naším cieľom nie je učiť vás integrovať, tak tu uvedieme tento výpočet bez komentára pre tých, ktorí

integrovat' vedia a pokúšali sa to riešiť týmto spôsobom:

$$\begin{aligned} J_{\Delta} &= \int_{\Delta} r^2 dm = \\ &= \int_{-} r^2 dm + \int_{/} r^2 dm + \int_{\backslash} r^2 dm = \\ &= \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 \lambda dx + \int_{-\ell/2}^0 x^2 \frac{\lambda}{\cos \frac{\pi}{3}} dx + \int_0^{\ell/2} x^2 \frac{\lambda}{\cos \frac{\pi}{3}} dx = \\ &= \left[ \lambda \frac{x^3}{3} \right]_{-\ell/2}^{\ell/2} + \left[ \frac{\lambda}{\cos \frac{\pi}{3}} \frac{x^3}{3} \right]_{-\ell/2}^0 + \left[ \frac{\lambda}{\cos \frac{\pi}{3}} \frac{x^3}{3} \right]_0^{\ell/2} = \\ &= \left[ \lambda \frac{(\ell/2)^3}{3} - \lambda \frac{(-\ell/2)^3}{3} \right] + \left[ \frac{\lambda}{\cos \frac{\pi}{3}} \frac{0^3}{3} - \frac{\lambda}{\cos \frac{\pi}{3}} \frac{(-\ell/2)^3}{3} \right] + \left[ \frac{\lambda}{\cos \frac{\pi}{3}} \frac{(\ell/2)^3}{3} - \frac{\lambda}{\cos \frac{\pi}{3}} \frac{0^3}{3} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \lambda \ell^3 = \frac{1}{12} m \ell^2. \end{aligned}$$