

Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Solenie

vzorák <meno> a <meno>, opravoval  <meno>

1.2 Sťahovanie

vzorák Jaro, opravoval  <meno>

Začnime tým, že si zrátame, akú ťahovú silu dokáže vyvinúť jeden balónik. Na voľný nafúknutý balónik pôsobí tiažová sila $F_G = (m_b + m_{\text{He}})g$ smerom nadol a vztlaková sila $F_{vz} = V\rho_a g$ smerom nahor. m_b je hmotnosť materiálu, z ktorého je balónik vyrobený, m_{He} je hmotnosť plynu vnútri balónika¹, g je tiažové zrýchlenie, V je objem celého balónika (a v dobrom priblížení zároveň objem plynu vo vnútri balónika) a ρ_a je hustota vzduchu. Potom ťah, ktorý dokáže vyvinúť jeden balónik je $T = F_{vz} - F_G$.

Z videa možno usúdiť, že sú použité štandardné balóniky. Na náhodnom e-shope² nájdeme, že hmotnosť jedného balónika je rádovo jednotky gramov a jeho priemer je asi 25 cm.³

Pre dolný odhad počtu balónikov možno predpokladať, že hélium v balónikoch nie je nijako stlačené, a teda je pri štandardnom tlaku a teplote. V takom prípade jeho hustotu možno vyhľadať v tabuľkách (vygoogliť), alebo ju možno dopočítať z konštánt, ktoré poznáme. Vieme, že molárna hmotnosť hélia je približne $M_m(\text{He}) = 4 \text{ g/mol}$ a jeden mol každého plynu zaberá pri normálnych podmienkach objem $V_m = 22,41 \text{ l/mol}$, preto je hustota hélia $\rho_{\text{He}} = \frac{M_m(\text{He})}{V_m} \approx 0,18 \text{ kg/m}^3$, a teda hmotnosť hélia v balóniku je $m_{\text{He}} \approx 0,18 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (0,25 \text{ m})^3 \doteq 1,5 \text{ g}$.

Teraz už možno vyčíslieť ťah jedného balónika

$$T = (V\rho_a - m_b - m_{\text{He}})g \approx 7 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

Aby sme zistili potrebný počet balónikov, potrebujeme ešte odhadnúť tiaž domu. Z videa tentokrát odhadneme rozmery domu. Nech má dom 4 metre v každom rozmere. Modelujme ho ako škatuľu. V takom prípade je jeho povrch zhruba $6 \cdot (4 \text{ m})^2 \cdot 100 \text{ m}^2$. Nech je hrúbka podlahy a nosných stien zhruba 20 cm^4 a nech je dom z dreva s hustotou 500 kg/m^3 . Potom je tiaž domu

$$G \approx 500 \text{ kg/m}^3 \cdot 100 \text{ m}^2 \cdot 0,2 \text{ m} \cdot 10 \text{ N/m} \doteq 1 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

¹Budeme predpokladať, že balónik je napustený héliom.

²Napríklad [tu](#).

³Ale rovnako dobre by sme mohli jeho hmotnosť rádovo odhadnúť z jeho rozmerov a hustoty. Modelujme balónik veľmi tenkým medzigulím s priemerom 25 cm a hrúbkou rádovo stotiny milimetra. Ak je hustota materiálu, z ktorého je balónik vyrobený, rádovo 1000 kg/m^3 , tak hmotnosť balónika bude zhruba $1000 \text{ kg/m}^3 \cdot \pi \cdot (0,25 \text{ m})^2 \cdot 1 \cdot 10^{-5} \text{ m} \doteq 2 \text{ g}$.

⁴V skutočnosti to môže byť trochu menej, ale zase toto nadhodnotenie sa vykompenzuje tým, že nezapočítavame hmotnosť vnútra domu. Napríklad strecha určite nie je taká hrubá. Vo vnútri je však napríklad podlaha podkrovia alebo vnútorné steny, ktorých hmotnosti sme samostatne nezapočítavali.

Na vyzdvihnutie domu je teda potrebných aspoň

$$N = \frac{G}{T} \approx 1,5 \cdot 10^6 \text{ balónikov.}$$

Na záver sa ešte môžeme pokúsiť posúdiť, či je vo filme zobrazený dostatočný počet balónikov. Z videa možno odhadnúť na základe porovnania s veľkosťou domu, že balóniky sú v hlúčiku, ktorý má priemer zhruba 20 metrov. Do takejto gule sa zmestí, aj s prihliadnutím na nemožnosť dokonale vyplniť celý objem hlúčika balónikmi, zhruba $\frac{\pi \cdot (20 \text{ m})^3}{(0,25 \text{ m})^3} \doteq 2,68 \cdot 10^5$ balónikov, čo je zhruba 5,6-krát menej balónikov, ako sme vypočítali, že je potrebné.

1.3 Upratovanie

vzorák MatusH, opravoval  <meno>

Pri zobrazovaní predmetov sa obraz vytvorí v takej vzdialenosti, ktorá splní zobrazovaciu rovnicu

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f},$$

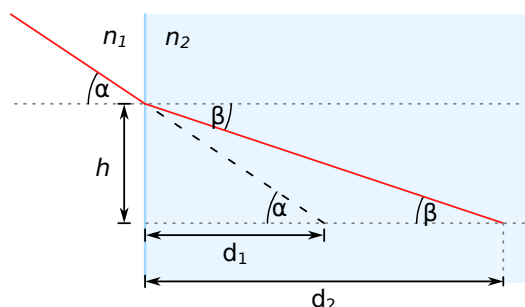
kde p a o sú vzdialenosti predmetu a obrazu od šošovky a f je ohnisková vzdialenosť šošovky. V prípade bez skleneného hranola sa teda obraz vytvorí vo vzdialenosti

$$\left(\frac{1}{0,2 \text{ m}} - \frac{1}{0,5 \text{ m}} \right)^{-1} = 0,3 \text{ m.}$$

Teraz sa pozrieme na druhý prípad, keď za šošovku dáme sklenený hranol a tým efektívne zmeníme index lomu za šošovkou. Obraz sa stále vytvorí tam, kde bude splnená zobrazovacia rovnica. Bude to ale v inej vzdialenosti, ako vidíme na obrázku. Vidíme, že nezlomený lúč (prerušovaná čiara) prejde tú istú vertikálnu vzdialenosť h ako zlomený lúč (plná čiara) na kratšej horizontálnej vzdialenosti. Pre vzdialenosti d_1 a d_2 platí $\tan \alpha = h/d_1$ a $\tan \beta = h/d_2$. Odtiaľ dostávame

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \approx \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

kde sme v druhej rovnosti použili priblíženie tangensu pre malé uhly a v tretej rovnosti Snellov zákon lomu.



Obrázok 1.3.1: Náčrt zmenenej dráhy v dôsledku iného indexu lomu

Ak by bol teda index lomu zmenený na celej časti za šošovkou, obraz by sa nevytvoril vo vzdialenosti $o = 0,3 \text{ m}$ ale vo vzdialenosti $o' = (n_2/n_1)0,3 \text{ m}$ ⁵. V našom prípade máme rozhranie vzduch-sklo, takže $n_1 = 1$ a $n_2 = 1,5$ ⁶. Tým dostávame výsledok $o' = 0,5 \text{ m}$, ak je sklo hneď za šošovkou. V závislosti od toho, ako blízko za šošovku ho Katka dala, sa mohol obraz vytvoriť niekde medzi $0,3 \text{ m} - 0,5 \text{ m}$.

1.4 Minimalizovanie

vzorák Marek, opravoval ? <meno>

Dokonale pružná zrážka je taká, pri ktorej sa zachováva mechanická energia aj hybnosť.

Pod akým uhlom sa puky odrazia?

Hmotnosť pukov označme m , a označme

- v_1, v_2 počiatočné rýchlosti pukov,
- v'_1, v'_2 rýchlosti pukov po zrážke.

Predpokladajme, že druhý puk je na začiatku v pokoji, teda $v_2 = 0$.

Zachovanie hybnosti

$$mv_1 + mv_2 = mv'_1 + mv'_2$$

Po vydelení m máme

$$v_1 = v'_1 + v'_2.$$

Zachovanie energie

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2$$

Po úprave je

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2.$$

Odvedenie uhla

Zo zákona zachovania hybnosti

$$v_1 - v'_1 = v'_2.$$

⁵lebo vertikálnu vzdialenosť musia lúče prejsť stále tú istú

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_refractive_indices

Obe strany skalárne (skalárny súčin vektorov má pekné vlastnosti súčinu a navyše pre dĺžku vektora platí $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$) vynásobíme $\mathbf{v}'_1$, odkiaľ

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1) \cdot \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'_2 \cdot \mathbf{v}'_1.$$

Po roznásobení je

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'_1 - v_1'^2 = \mathbf{v}'_2 \cdot \mathbf{v}'_1.$$

Na základe zachovania energie platí

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad \Rightarrow \quad v_2'^2 = v_1^2 - v_1'^2.$$

Zo zachovania hybnosti vieme, že

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2 \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2.$$

Substituujujúc $v_2'^2 = v_1^2 - v_1'^2$ na pravej strane, dostaneme

$$v_1^2 = v_1'^2 + (v_1^2 - v_1'^2) + 2\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2 = v_1^2 + 2\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2.$$

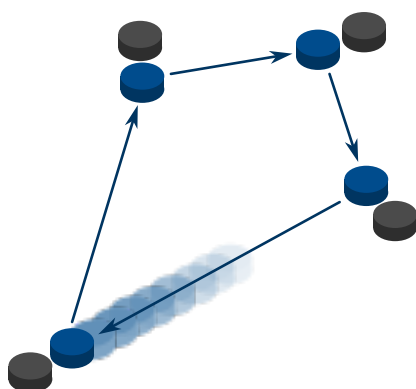
Od oboch strán odčítame v_1^2 , čiže

$$0 = 2\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2 = 0.$$

Skalárny súčin dvoch vektorov je 0 práve vtedy, keď sú na seba kolmé alebo je jeden z nich nulový (len pre zaujímavosť, nulový vektor je z definície kolmý na každý vektor).

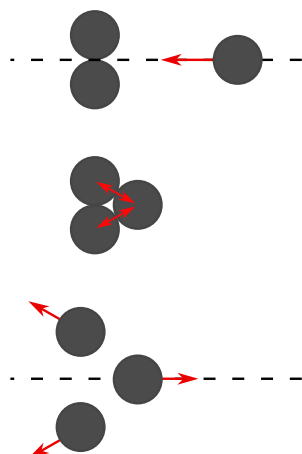
Vidíme, že vektory rýchlostí po zrážke sú na seba kolmé (resp. v prípade čelnej zrážky prvý puk zastaví, overte si to dosadením do zákonov zachovania, z ktorých uvidíte, že iné rýchlosti im nevyhovujú). Naozaj prestaňte čítať a presvedčte sa o tom! Keď ste už dosadili, pokračujme.

Ak by bol puk len jeden, z predošlého odseku je zrejmé, že ten vystrelený sa naspäť pohybovať nebude. Ak by sme pripustili, že po čelnej zrážke pôjde prvý puk kolmo na svoj pôvodný smer (o chvíľku vysvetlíme, prečo to môžeme), potrebovali by sme tri zrážky na otočenie a jednu na zastavenie (keďže ste si to už overili, komentár k zastaveniu netreba) na konci (trajektória bude mať tvar štvorca). Zrážka ale nemohla byť čelná, prvý puk musel naraziť „o kúsok vyššie“, t. j. uhly vo vnútri „štvorca“ musia byť väčšie ako pravé, pričom trafenie sa na začiatok zabezpečíme zmenou dĺžky niektorej strany. Úvaha o štvorci bola dôležitá aj preto, lebo ide o „limitný prípad“, čím presnejšie bude zrážka čelná, tým bližší bude uhol k 90° , no nikdy sa nedosiahne. Z toho je aj zrejmé, že menším počtom pukov sa na začiatok nedostaneme.



Obrázok 1.4.1: Náčrt možnej trajektórie puku

Keď sme sa už presvedčili, že štyri puky sú najmenší možný počet, sme pripravení na informáciu, že stačia tri. Náš dôkaz sa opiera o konkrétnu geometrickú predstavu, kde sa zrazia vždy len dva puky. Čo keby sa zrazili tri naraz? Keďže náš pohľad je už teraz dosť zidealizovaný, môžeme si to dovoliť (našťastie zrážka štyroch naraz nás už trápiť nemusí, rozmyslite si, prečo).



Obrázok 1.4.2: Náčrt zrážky troch pukov

Jediná vec navyše oproti predošlému riešeniu je uvedomiť si, že keď sa zrazia, môžu sa pohybovať iba v smere výslednice síl, ktoré na daný puk pôsobia. Z toho vyplýva, že kvôli symetrii sa náš pôvodný puk pohybuje po tej istej priamke späť a v okamihu zrážky vytvárajú puky rovnostranný trojuholník. Môžeme ľahko vidieť, že pomer horizontálnej a vertikálnej zložky rýchlosti je $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Ďalej nám stačí napísať si zákon zachovania hybnosti vo vodorovnom smere (vo zvislom platí triviálne)

$$mv_0 = 2mv_x + mv,$$

kde v_x označuje horizontálnu zložku rýchlosti (niektorého z) dvojice pukov (vertikálna bude v_y), v_0 rýchlosť jedného puku pred zrážkou a v po zrážke. Zákon zachovania energie má tvar

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}mv^2,$$

lebo druhá mocnina veľkosti rýchlosti sa rovná súčtu druhých mocnín jej zložiek.

Po drobných úpravách (ktoré prenechávame ako cvičenie čitateľovi) zistíme, že

$$v = -\frac{1}{5}v_0,$$

kde mínus znamená opačný smer. Týmto sme dokázali, že puk pôjde naspäť a zastavíme ho rovnako, ako v predošlom prípade.

1.5 Vetranie

vzorák MatusH, opravoval MatusH

V prvom rade sa chceme ospravedlniť za neuvedenie hodnôt S a v v zadaní. Na numerické riešenie (na ktoré zadanie nabáda) boli potrebné a v tomto vzoráku budeme rátať s hodnotami $S = 2 \text{ m}^2$, $v = 1 \text{ m/s}$. Za určenie vlastných hodnôt v a S pri riešení neboli strhávané body.

Ak sa pozrieme na malý časový interval dt , tak počas neho vyjde von $dV = Sv \, dt$ premiešaného vzduchu a nahradí ho rovnaký objem nového vzduchu. Nech máme v miestnosti už V_n nového vzduchu. Po časovom intervale dt budeme mať

$$V_n(t + dt) = V_n(t) - \frac{V_n(t)}{V} dV + dV = V_n \left(1 - \frac{V_n(t)}{V} dV \right) + dV$$

nového vzduchu. Prvý člen značí objem nového vzduchu na začiatku intervalu, druhý člen značí, koľko nového vzduchu vyjde von dverami a posledný, tretí člen, značí, koľko nového vzduchu príde počas časového intervalu dt . Táto rovnica nám umožňuje iteratívne počítať objem nového vzduchu.

Nastavíme počiatočnú podmienku $V_n = 0$ a následne iba opakovane počítame nové V_n dokým $V_n/V < 99\%$. Popri tom si pri každej iterácii zaznačíme, že sme ju spravili, napríklad tak, že do premennej t pripočítame dt . Keď bude podmienka splnená, stačí sa už len pozrieť, aká je hodnota t a to nám určí čas potrebný na vyvetranie miestnosti.

Túto procedúru vie robiť napríklad nižšie uvedený kód v Pythone. Vetrať musíme $248,6 \text{ s} \approx 6 \text{ min}$. Ako krok v čase sme v tomto prípade zvolili $dt = 0,01 \text{ s}$. Tu však máme celkom veľkú voľnosť výberu. Vo všeobecnosti by sme dt mali nastaviť tak, aby bol výsledok dostatočne presný. Ak by sme napríklad porovnali výsledok s $dt = 0,1 \text{ s}$, tak by sa výsledok líšil o $0,16 \text{ s}$. Ak nám teda stačí presnosť na sekundy, potom je nami zvolený krok dt očividne postačujúci.

```
# Nastavenie zadaných konštánt
V = 6*6*3
v = 1
S = 2

# Deklarovanie premenných pre výpočet
dt = 0.001
t = 0
Vn = 0

# Postupné iterovanie dokým nedosiahneme požadovaný pomer
while Vn/V < 0.99:
    Vn = Vn*(V - v*S*dt)/V + v*S*dt
    t += dt
```

```
# Vypísanie času vetrania
print(t)
```

1.6 Snívanie

vzorák MatusH, opravoval MatusH

Najskôr si uzrejmime, čo sa bude diať kvalitatívne. Na voľné teleso pôsobí modifikovaná gravitačná sila. Tá ho začne otáčať. Keďže je teleso voľné a Newtonove zákony sa nezmenili, os otáčania bude prechádzať cez stred hmotnosti. Tu je dôležité si uvedomiť rozdiel medzi stredom hmotnosti a ťažiskom.

Stred hmotnosti je priemer polôh jednotlivých elementov objektu váhovaný ich hmotnosťou. Teda stred hmotnosti sa nezmení zmenením gravitačného zákona.

Ťažisko je taký bod, v ktorom keď podoprieme teleso, tak bude v rovnováhe. Inými slovami, momenty síl, ktorými pôsobia jednotlivé elementy objektu sa navzájom vynulujú.

V našom svete s klasickým gravitačným zákonom a uvažovaním homogénneho gravitačného poľa tieto dva body splyvajú, no je dobré mať na pamäti, že nutne nie sú to isté.

Vyskúšajme teraz spraviť naivný výpočet pre teleso B. Najskôr vypočítame hmotný stred. Stačí nám uvažovať len horizontálnu súradnicu kvôli symetrii zvyšných dvoch. Ak dáme počiatok do ľavého hmotného bodu s hmotnosťou m_1 , tak hmotný stred bude (kde L je dĺžka tyče)

$$x = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot L}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} L.$$

Teraz vypočítajme polohu ťažiska

$$m_1^2 g y = m_2^2 g (L - y) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{m_2^2}{m_1^2 + m_2^2} L.$$

Máme dva ekvivalentné spôsoby uvažovania. Buď môžeme vypočítavať momenty závažia m_1 a m_2 vzhľadom na bod x , alebo môžeme celú hmotnosť telesa dať do ťažiska a vypočítavať moment takým spôsobom. Ak budeme vedieť moment, tak uhlové zrýchlenie vypočítame ako $\varepsilon = M/I$, kde M je moment sily a I je moment zotrvačnosti.

Prvým prístupom dostávame

$$M = x m_1^2 g - (L - x) m_2^2 g = \frac{m_2}{m_1 + m_2} m_1^2 g L - \frac{m_1}{m_1 + m_2} m_2^2 g L.$$

Druhým spôsobom dostávame

$$M = (y - x)(m_1 + m_2)^2 g = \left(\frac{m_2^2}{m_1^2 + m_2^2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) (m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2) g L.$$

Porovnaním týchto dvoch výsledkov zisťujeme, že sa líšia. Toto je ale zásadný problém. Na rovnaký problém by sme narazili pri výpočte ťažiska kužeľa. Očividne poloha ťažiska (a teda aj momenty síl) je ovplyvnená našou ľubovôľou pri delení telesa. Ak by sme si napríklad povedali, že namiesto hmotného bodu s hmotnosťou m_1 máme v tom bode dva hmotné body s polovičnou hmotnosťou, tak efektívne sa

nič nezmenilo, no oba výpočty dajú iný výsledok. Preto vidíme, že nie je problém len vo výpočtoch, ale v samotnom gravitačnom zákone.

Tento problém vieme vystihnúť aj inak. Predstavme si, že máme dve delové gule s hmotnosťou m , každá z nich padá so zrýchlením mg . Ak ich ale spojíme tenučkým lankom, tak sme zrazu vytvorili jeden objekt s hmotnosťou $2m$, a teda bude padať zrýchlením $2mg$. Lanko ale môže byť napríklad aj nitka pavučiny a teda systém nemá prečo ovplyvniť (ak by závažia boli napríklad delové gule). To ale znamená, že takýto gravitačný zákon nie je konzistentný sám so sebou. Zistili sme, že ak považujeme Newtonove zákony za správne, tak gravitačný zákon musí lineárne závisieť od hmotnosti. Zaujímavé je, že v tomto prípade sme na vylúčenie iných závislostí nepotrebovali experiment, ale stačili nám úvahy.

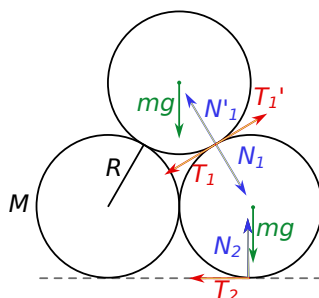
Ak by sme chceli zachrániť problém s delením, dalo by sa to tak, že gravitačná sila pôsobiaca na časť hmotnosti telesa Δm by bola $mg \Delta m$, kde m je hmotnosť celého telesa. Vidíme, že v tomto prípade by súčet všetkých častí naozaj dal $m^2 g$. Môžeme si ale všimnúť, že sila pôsobiaca na časť telesa Δm je v tomto prípade závislá od hmotnosti celého telesa. Dokonca, ak by dve telesá mali rovnakú časť, tak vo všeobecnosti by na tieto časti pôsobila iná gravitačná sila. Takýto vesmír by teda musel fungovať fundamentálne inak ako náš.

1.7 Zálohovanie

vzorák MatusH, opravoval MatusH

Z dôvodu prehľadnosti riešenia na začiatok prejdeme výpočtom potrebným na určenie koeficientov trenia. Následne uvedieme niekoľko poznámok, ktoré nemusia byť na prvý pohľad jasné.

Keďže ide o statický prípad, tak výslednica síl pôsobiacich na každú plechovku musí byť nulová a výsledný moment sily pôsobiacej na každú plechovku musí byť taktiež nulový. Keďže je celý problém symetrický podľa vertikálnej osi prechádzajúcej stredom vrchnej plechovky, stačí nám uvažovať len jednu zo spodných plechoviek.



Obrázok 1.7.1: Matúšova pyramída z plechoviek so zakreslenými silami

Z podmienok statiky vo vertikálnom smere pre hornú plechovku dostávame

$$Mg = 2N_1 \cos 30^\circ + 2T_1 \sin 30^\circ = 2 \left(N_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + T_1 \frac{1}{2} \right). \quad (1.7.1)$$

Z podmienok statiky vo vertikálnom smere pre dolnú plechovku dostávame

$$Mg + N_1 \cos 30^\circ + T_1 \sin 30^\circ = Mg + N_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + T_1 \frac{1}{2} = \frac{3}{2} Mg = N_2, \quad (1.7.2)$$

kde sme v druhej rovnosti využili rovnicu 1.7.1.

Z podmienok statiky v horizontálnom smere pre dolnú plechovku dostávame

$$N_1 \sin 30^\circ = T_1 \cos 30^\circ + T_2 \quad \Rightarrow \quad N_1 \frac{1}{2} = T_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + T_2 \quad (1.7.3)$$

a z podmienky statiky v rotácii

$$T_1 = T_2. \quad (1.7.4)$$

Ak dosadíme rovnicu 1.7.3 a 1.7.4 do rovnice 1.7.1 a upravíme, dostávame

$$T_1 = T_2 = \frac{Mg}{4 + 2\sqrt{3}}.$$

Spätným dosadením do rovnice 1.7.3 a použitím 1.7.4 dostávame

$$N_1 = \frac{1}{2}Mg.$$

Pre najmenšie možné koeficienty trenia f_1 a f_2 , musí platiť $T_1 = f_1 N_1$ a $T_2 = f_2 T_2$. Z toho napokon dostávame finálne podmienky pre koeficienty trenia

$$f_1 \geq \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \quad f_2 = \frac{1}{3(2 + \sqrt{3})}.$$

Poznámka 1: Rovnice statiky pre hornú plechovku v x-ovom smere a rotáciu sme nepísali. Zo symetrie na ňu pôsobiach síl vieme, že by nám nedali žiadnu novú informáciu.

Poznámka 2: Silu medzi spodnými dvoma plechovkami sme neuvažovali, nakoľko dopredu vieme, že bude nulová. Ak by totiž nebola, tak by existovala nenulová vzdialenosť, na ktorú vieme spodné dve plechovky vzdialiť tak, aby ich táto sila vrátila naspäť. Pri vzdialení sa ale zmenší potenciálna energia hornej plechovky, a teda opätovným priblížením by si sústava spontánne zvýšila energiu čo nie je možné.

Poznámka 3: Nevenovali sme sa smerom trecích síl s veľkosťou T_1 a T_2 pôsobiach na plechovky, hoci ich smery nie sú úplne triviálne. Najjednoduchšie sa dajú určiť z toho, že trenie s veľkosťou T_2 musí smerovať proti smeru prípadného pohybu. Dolná plechovka sa však môže kvôli symetrii začať hýbať jedine smerom von z pyramídy, a teda toto trenie musí smerovať dovnútra pyramídy. Trecia sila T_1 pôsobiaca na spodnú plechovku je jediná ďalšia sila, ktorá pôsobí nejakým momentom na spodnú plechovku a teda musí mať opačný moment sily ako trenie s veľkosťou T_2 . Nakoniec trecia sila T_1 pôsobiaca na hornú plechovku musí zo zákona akcia a reakcie mať opačný smer ako jej náprotivná sila pôsobiaca na spodnú plechovku.

Poznámka 4: Koeficient f_1 sa dá určiť aj z predpokladu, že ak by bol veľmi malý, tak by pyramída spadla spôsobom, v ktorom by sa spodné plechovky rozkotúlali na strany. Aby sa to stalo, moment sily vzhľadom na bod dotyku s podložkou musí roztáčať plechovku smerom von. Moment sily vzhľadom na tento bod majú len N_1 a T_1 . V limitnom prípade ich výslednica smeruje k bodu dotyku. To dáva podmienku $T_1/N_1 = f_1 \geq \tan 15^\circ$.

Poznámka 5 (Marián Koval): Druhý spôsob, ktorým vedia plechovky spadnúť je, že vrchná a spodné plechovky o seba neprešmyknú, ale spodné plechovky prešmyknú o zem. Keď vrchná plechovka klesne o dx , bočné plechovky sa posunú o $\sqrt{3} dx$ doľava a otočia o $2 dx/R$. Dokopy na zem pôsobí sila $3Mg$ (nadol),

teda dokopy trecia sila vykoná $3(\sqrt{3} + 2)Mg f_2 dx$ prácu. Aby sa energeticky oplatilo plechovke klesnúť o dx a vykonať tolko práce, musí $f_2 \geq 1/(3(\sqrt{3} + 2))$.

Vidíme, že úlohu teda rieši poznámka 4 a 5, čím sa dalo vyhnúť riešeniu sústavy rovníc. Vo všeobecnosti je však odporúčaný spôsob pomocou sústavy rovníc, nakoľko je systematickejší a je ťažšie prehliadnuť podstatnú úvahu.