

Riešenia 3. kola zimnej časti

3.1 Diskriminované električky

vzorák Martin, opravoval Martin

Trolejbus je vozidlo poháňané elektrickým pohonom. Spravidla býva poháňané jednosmerným prúdom s napätím 500 až 600 V. Čoraz bežnejšie je, že trolejbus má aj batériu a môže sa tak v prípade potreby pohybovať aj **bez pripojenia na trakčné vedenie**. Existuje viacero typov trakčného vedenia: pantograf, často používaný vlakmi a električkami, tyčové vedenie, využívané trolejbusmi, alebo napríklad **lýrové vedenie**, dnes už málo používané a zväčša nahradené vyššie zmienenými typmi trakčného vedenia. Miesto trakčného vedenia je v metre často využívaná **tretia koľajnica**, kde je obvod taktiež uzavretý jazdnými koľajnicami. Londýnske metro má až **štyri koľajnice**, čo má oproti trakčnému vedeniu a tretej koľajnici tú výhodu, že cez jazdné koľajnice neprechádza elektrický prúd. Ak by bol cez ne odvádzaný do zeme, mohol by sa dostať do kovovej konštrukcie tunela a poškodiť ju.

Trolejbus používa tyčový zberač prúdu. Aby elektrickým obvodom prechádzal prúd, obvod musí byť uzavretý. Trolejbusy preto majú dva zberače prúdu napojené na dva rovnobežné drôty trakčného vedenia. Druhý zberač slúži pre uzavretie elektrického obvodu.

Električky využívajú spravidla pantograf, no niektoré pre zber prúdu využívajú tyčový zberač prúdu, ktorý je pre ne v porovnaní s pantografom z viacerých dôvodov menej výhodný. Električka má však narozdiel od trolejbusu iba jeden zberač a je napojená len na jeden drôt trakčného vedenia, čo platí taktiež pri použití pantografu. Ako je už vyššie spomenuté, koľajové vozidlá, medzi ktoré patrí aj električka, často pre uzavretie obvodu využívajú práve jazdné koľajnice, ktoré, keďže sú vodivé, sú na tento účel ideálne a električka tak nepotrebuje dva zberače prúdu napojené na dva drôty trakčného vedenia. Trolejbus sa však pohybuje na kolesách s gumenými pneumatikami a keďže guma je **elektrický izolant**, nie je možné ju použiť pre uzavretie obvodu. Preto trolejbus pre uzavretie obvodu potrebuje druhý tyčový zberač prúdu a druhý drôt trakčného vedenia.

Môžeme sa dotknúť jazdných koľajníc, aj keď sa používajú ako súčasť elektrického obvodu? Áno, dokonca aj viackrát ako raz. Koľajnice sú totižto uzemnené a my, stojaci na zemi, sme uzemnení tiež. Obaja teda máme rovnaký elektrický potenciál, čiže po dotknutí sa koľajníc nami žiadny prúd tiecť nebude. Ale ak sa miesto trakčného vedenia používa tretia či štvrtá koľajnica, ktoré uzemnené nie sú, nie je bezpečné sa ich dotýkať.

3.2 Neposedné acidko

vzorák Marek, opravoval Marek

Nech hustota acidka je ρ a jeho objem v krabici V . Potom naň pôsobí tiažová sila

$$F_g = mg = V\rho g,$$

kde m je hmotnosť acidka a g tiažové zrýchlenie.

Acidko sa neprevrhne vtedy, keď zostáva v rovnováhe, čiže keď je vektorový súčet síl aj momentov síl nulový.

$$F_g = F_p + N,$$

$$\mathbf{N} + \mathbf{N}' = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}'_p = \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{N}'$ je sila, ktorou lavica pôsobí na krabicu acidka a je reakciou na silu rovnakého smeru a veľkosti ako $\mathbf{N}$, ktorou na lavicu pôsobí acidko v dôsledku tiažovej sily (ale nie je reakciou na tiažovú silu), $\mathbf{F}_p$ je zložka tiažovej sily rovnobežná s rovinou lavice a $\mathbf{F}'_p$ je sila, ktorou zarážka pôsobí na krabicu.

Acidko sa počas prevracania bude otáčať okolo hrany, ktorá sa dotýka zarážky, preto ju budeme nazývať os otáčania. Pretože acidko považujeme za homogénne, ak jeho ťažisko kolmo premietneme do roviny lavice a následne na os otáčania, dostaneme bod, ktorý si zvolíme za počiatok súradnicovej sústavy (lebo neskôr zistíme, že je to výhodné, takouto voľbou sa zjednodušia niektoré vzťahy). Budeme sa preto zaoberať dvojrozmerným prípadom, t. j. predstavme si prierez acidkom kolmý na lavicu a prechádzajúci ťažiskom (takže aj počiatkom nami zvolenej súradnicovej sústavy) a súradnicovú sústavu S zvolíme tak, aby os x ležala v rovine lavice v smere $\mathbf{F}_p$ a os y bola na ňu kolmá a orientovaná opačne ako $\mathbf{N}$ (os z by bola totožná s osou otáčania, orientácia nie je dôležitá, lebo smer otáčania je zrejmy, ale uvažujme zaužívanú orientáciu, teda „pred nákresňu“).

Moment sily je určený ako

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

kde $\mathbf{M}$ je moment sily vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy a $\mathbf{r}$ je polohový vektor bodu, na ktorý pôsobí sila $\mathbf{F}$. Zavedme novú súradnicovú sústavu S' tak, že os x' je priemetom osi x do vodorovnej roviny, os y' priemetom osi y do zvislého smeru a $z' \equiv z$. Poznamenajme, že počiatok sa nezmenil. Vektory rozpíšeme na zložky:

$$\mathbf{M}' = (r'_x, r'_y, 0) \times (F'_x, F'_y, 0) = (0, 0, r'_x F'_y - r'_y F'_x).$$

$$\mathbf{F}_g = (0, -F_g, 0),$$

preto

$$\mathbf{M}' = (0, 0, -R'_x F_g),$$

kde R'_x je x' -ová súradnica ťažiska (a v absolútnej hodnote aj kolmá vzdialenosť vektorovej priamky sily od osi otáčania). Pretože F_g je konštantné, moment sily bude nulový práve vtedy, keď

$$R'_x = 0,$$

teda keď sa ťažisko nachádza nad osou otáčania.

K rovnakému záveru možno prísť uvažovaním skutočnosti, že acidko sa prevrhne vtedy, keď jeho ťažisko klesá, teda keď už nie je potrebné vykonať ďalšiu prácu na zdvíhanie ťažiska do dosiahnutia maximálnej výšky, t. j. keď už cez bod s maximálnou výškou prešlo. Inými slovami, ak chceme preklopiť kváder okolo jednej z jeho strán, je potrebné postaviť ho na hranu, okolo ktorej by sa mal otáčať, takže dostať ho do stavu, kedy je vzhľadom na zvolenú os otáčania ťažisko najvyššie a ak ho posunieme o veľmi malý kúsok ďalej, spadne sám.

Keď je krabica plná, acidko má tvar kvádra, ktorý má ťažisko v svojom strede súmernosti, preto jeho poloha vzhľadom na súradnicovú sústavu S (tretí rozmer sme uvažovali len kvôli momentu sily, teraz je už zbytočný a sústavu bez neho budeme označovať rovnako ako s ním, ak bude zrejmé, že sa nepomýlia) je určená polohovým vektorom

$$\mathbf{R} = (-a/2, a),$$

kde mínus je len kvôli voľbe smeru osi x .

Zo zadania vieme, že plné acidko sa prevrhne, preto z neho treba časť objemu odstrániť. Označme ju V_1 . Acidko je v nádobe tvaru kvádra, preto nám stačí uvažovať plošný obsah čelného prierezu pri pohľade v smere osi z , ktorý označíme S_1 a platí vzťah:

$$V_1 = S_1 h,$$

kde h je hrúbka nádoby, v našom prípade $h = a$. Označme $b = 2a$. Vidíme, že $S = ab$.

Rozlíšme 3 prípady:

1. prierez odstráneným objemom má tvar trojuholníka,
2. prierez odstráneným objemom má tvar pravouhlého lichobežníka,
3. prierez odstráneným objemom má tvar päťuholníka a zostávajúci objem má tvar trojuholníka.

V nasledujúcom texte budeme pracovať so súradnicovou sústavou S .

Odstránenie objemu s prierezom tvaru trojuholníka

Na začiatok uvedieme konštatovania zrejme z obrázka. Veľké písmená v rovniciach reprezentujú polohové vektory bodov, nie samotné body.

$$E = [E_x, E_y] = [-a, b]$$

$$\tan \alpha = \frac{q}{p}$$

$$T_1 = \frac{P - Q'}{3} + Q' = \frac{P}{3} + \frac{2}{3}Q'$$

$$P = [E_x + p, E_y] = [p - a, b]$$

$$Q = [E_x, E_y - q] = [-a, b - q]$$

$$Q' = \left[-a, b - \frac{q}{2}\right]$$

$$T_1 = \left[\frac{p-a}{3} - \frac{2}{3}a, \frac{b}{3} + \frac{2}{3}\left(b - \frac{q}{2}\right)\right] = \left[\frac{p}{3} - a, b - \frac{q}{3}\right]$$

$$T_1 S_1 + T_2 S_2 = TS = Tab$$

$$S_1 = \frac{1}{2}|P - E||Q - E| = \frac{1}{2}pq = \frac{1}{2}p^2 \tan \alpha = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\tan \alpha}$$

$$q = \sqrt{\frac{2S_1}{\tan \alpha}}$$

$$p = \sqrt{2S_1 \tan \alpha}$$

$$T_2 = \frac{TS - T_1 S_1}{S - S_1} = \frac{1}{S - S_1} \left[-\frac{Sa}{2} - S_1 \frac{p}{3} + S_1 a, \frac{Sb}{2} - S_1 b + S_1 \frac{q}{3} \right]$$

(pozn.: v okamihu prevrhnutia je ťažisko nad osou otáčania, teda:)

$$\tan \alpha = \frac{-T_{2x}}{T_{2y}} = \frac{\frac{Sa}{2} + S_1 \frac{p}{3} - S_1 a}{\frac{Sb}{2} - S_1 b + S_1 \frac{q}{3}} = \frac{a^3 + S_1 \frac{\sqrt{2S_1 \tan \alpha}}{3} - S_1 a}{2a^3 - 2aS_1 + S_1 \frac{\sqrt{\frac{2S_1}{\tan \alpha}}}{3}}$$

Triviálnou úpravou, ktorú pre jednoduchosť nechávame na čitateľa, dostaneme nasledujúci vzťah pre jediný reálny koreň, kde kvôli lepšej čitateľnosti $r = \tan \alpha$. (Počítal WolframAlpha, trochu upratal ChatGPT, no je to tak grcné, že sa mi nechce overovať platnosť takéhoto výsledku, nuž verím „kolegom,“ lebo sedia aj jednotky, aj niektoré limitné prípady, ale i napriek tomu je to zle)

$$S_1 = \frac{3(4a^2 r^2 - 4a^2 r + a^2)}{8r} - \frac{3^{1/3} (16\sqrt{6}\sqrt{-64a^{12}r^9 + 288a^{12}r^8 - 432a^{12}r^7 + 304a^{12}r^6 - 108a^{12}r^5 + 18a^{12}r^4 - a^{12}r^3})^{1/3}}{8r} + \dots$$

Ak sa Vám substitúcia nepáči, tu je výsledok bez nej.

$$S_1 = \frac{3(4a^2 \tan^2 \alpha - 4a^2 \tan \alpha + a^2)}{8 \tan \alpha} - \frac{3^{1/3} (16\sqrt{6}\sqrt{-64a^{12} \tan^9 \alpha + 288a^{12} \tan^8 \alpha - 432a^{12} \tan^7 \alpha + 304a^{12} \tan^6 \alpha - 108a^{12} \tan^5 \alpha + 18a^{12} \tan^4 \alpha - a^{12} \tan^3 \alpha})^{1/3}}{8 \tan \alpha} + \dots$$

Odstránenie objemu s prierezom tvaru lichobežníka

sem prepíšem riešenie z náboja 2018

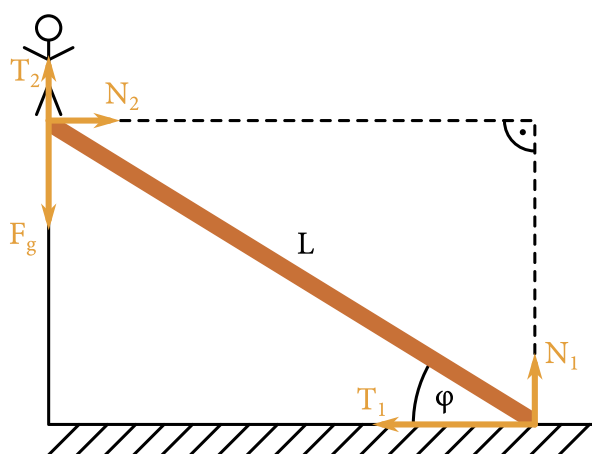
Odstránenie objemu s prierezom tvaru päťuholníka

Teraz má prierez zostávajúcim acidkom tvar trojuholníka. Ako vyplýva z 1. prípadu, jeho ťažisko sa bude nachádzať na polpriamke prechádzajúcej bodom na osi otáčania, preto ak sa dostaneme do tohto stavu, odpiť viac už nepomôže.

3.3 Momentová výpomoc

vzorák KatkaM, opravovala KatkaM

Matúšovi tak veľmi chýbalo lezenie, že sa odhodlal riskovať a preskúmať správanie rebríka v závislosti od jeho sklonu voči zemi. My vieme, že miesto tohto nebezpečného riskovania dokážeme dopredu určiť minimálny uhol sklonu rebríka voči zemi, ktorý Matúša bezpečne udrží. Počítame popritom s informáciou, že hmotnosť rebríka je zanedbateľná a koeficient statického trenia medzi rebríkom a zemou a rebríkom a stenou je f .



Obrázok 6.1.1: Situácia bez Mareka na rebríku

Na obrázku 6.1.1 si môžeme všimnúť všetky sily pôsobiace na Matúšov rebrík. Sú to trecie sily T_1 a T_2 , ktoré pôsobia v Matúšov prospech. Ďalšími vystupujúcimi silami sú sila od podložky N_1 a sila od steny N_2 . Posledná, tiažová sila $F_g = mg$ pôsobí smerom nadol a je vyvolaná prítomnosťou Matúša na rebríku.

Po spísaní všetkých pôsobiacich síl je čas písať rovnice. Našou požiadavkou je, aby sa rebrík nehýbal, a tým zostával v rovnovážnej polohe. Na to, aby sa nehýbal, musí byť súčet síl naň pôsobiacich nulový. Z tejto požiadavky dostávame dve rovnice pre súčet síl: v x -ovom smere $\sum F_x = 0$ a v y -ovom smere $\sum F_y = 0$. Platí teda

$$N_2 - T_1 = 0 \quad (6.1.1)$$

a

$$N_1 + T_2 - F_g = 0. \quad (6.1.2)$$

Zo zadania dostávame rovnakú hodnotu f pre koeficient statického trenia medzi rebríkom a zemou a rebríkom a stenou. Potom pre trecie sily T_1 a T_2 platí

$$T_1 = N_1 f, \quad (6.1.3)$$

a

$$T_2 = N_2 f. \quad (6.1.4)$$

Aby rebrík zotrval v pokoji, je potrebné aj to, aby súčet momentov síl naň pôsobiacich bol nulový

$$\sum M = 0.$$

Veľkosť momentu sily vypočítame ako súčin veľkosti sily a dĺžky jej ramena, teda $M = Fr$. Výpočet si urýchlíme, keď si zvolíme za bod otáčania bod dotyku rebríka so stenou, kde pôsobí najviac síl (momenty síl N_2 , T_2 a F_g sa budú rovnať nule, pretože voči tomuto bodu má rameno sily nulovú dĺžku, a teda nebudeme potrebovať k výpočtu vzťahy 6.1.1, 6.1.2 a 6.1.4.

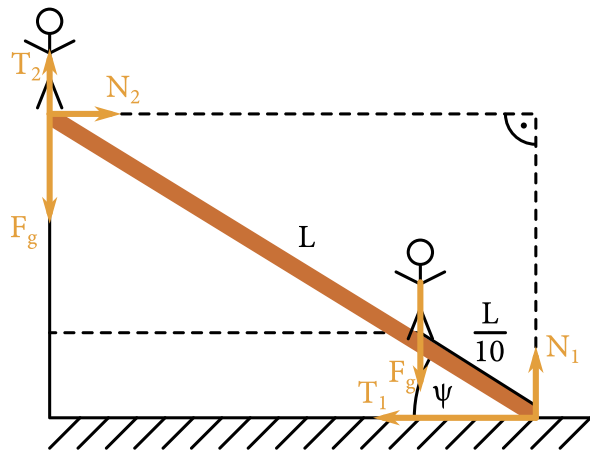
Veľkosť ramien pre jednotlivé sily vypočítame ako dĺžky kolmého priemetu rebríka dĺžky L na podlahu, resp. na stenu. Dostávame potom rovnicu

$$T_1 L \sin \varphi - N_1 L \cos \varphi = 0. \quad (6.1.5)$$

Tu si môžeme všimnúť, že uhol nezávisí od dĺžky rebríka L . Po predelení rovnice 6.1.5 $\cos \varphi$ a dosadení 6.1.3 dostávame rovnicu, z ktorej si priamo vieme vyjadriť náš hľadaný uhol φ

$$N_1 f \tan \varphi - N_1 = 0, \quad (6.1.6)$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \cot \varphi = f \quad \Rightarrow \quad \varphi = \operatorname{arccot} f.$$



Obrázok 6.1.2: Situácia s Marekom na rebríku

V druhej časti postupujeme veľmi podobne. Matúš si zavolať Mareka, ktorý sa postavil do desatiny dĺžky rebríka od zeme. Ako sa zmení najmenší uhol rebríka voči zemi, ktorý ešte udrží Matúša? Prirodzený je predpoklad, že prítomnosť Mareka na zadanom mieste zvýši stabilitu rebríka a hľadaný uhol sa zmenší. Je to ale naozaj pravda a aká bude hodnota nového najmenšieho uhla ψ ?

Na obrázku 6.1.2 nám pribudla tiažová sila Mareka $F_g = mg$, ktorá sa z dôvodu rovnakých hmotností Matúša a Mareka rovná tiažovej sile Matúša. Opäť si napíšeme pohybové rovnice pre sily v x -ovom a y -ovom smere

$$N_2 - T_1 = 0, \quad (6.1.7)$$

$$N_1 + T_2 - 2F_g = 0.$$

Prostredníctvom pohybových rovníc a vzťahov pre trecie sily 6.1.3 a 6.1.4 si vieme vyjadriť F_g ako

$$F_g = N_1 \frac{1 + f^2}{2}. \quad (6.1.8)$$

V tomto prípade si z rovnakého dôvodu ako minule volíme za bod otáčania bod dotyku rebríka so stenou. Pribudol nám moment sily F_g od Mareka, ktorý sa rovná $\frac{9}{10}F_g L \cos \psi$. Potom pre $\sum M = 0$ dostávame

$$-N_1 L \cos \psi + T_1 L \sin \psi + \frac{9}{10} F_g L \cos \psi = 0. \quad (6.1.9)$$

Po predelení $\cos \psi$ a s využitím rovníc 6.1.3 a 6.1.8 to vieme upraviť na tvar, z ktorého si vyjadríme $\tan \psi$ a následne samotné ψ

$$\begin{aligned} -N_1 + N_1 f \tan \psi + \frac{9}{10} N_1 \frac{1+f^2}{2} &= 0, \\ f \tan \psi &= \frac{11}{20} - \frac{9}{20} f^2, \\ \tan \psi &= \frac{11-9f^2}{20f}, \\ \psi &= \arctan \frac{11-9f^2}{20f}. \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

Pre najmenšie možné uhly dostávame hodnoty $\varphi = \operatorname{arccot} f$, resp. $\varphi = \arctan \frac{1}{f}$ a $\psi = \arctan \frac{11-9f^2}{20f}$. Po vykreslení si týchto funkcií môžeme vidieť, že pre všetky $f > 0$ platí $\varphi > \psi$, a teda Marekova prítomnosť Matúšovi skutočne pomáha.

3.4 Stratený v Bratislave

vzorák Martin, opravoval Martin

Ak máme určiť čas len s pomocou fotky samotnej, ako prvé nám dosť možno napadne určiť ho s pomocou dĺžky, ktorú vidíme na fotke.

Dúha vzniká, keď sa Slnko nachádza za nami a pred nami sa nachádzajú dažďové kvapky. Nezáleží na tom, v akej vzdialenosti sú kvapky, dôležité je, že sa k nim slnečné svetlo môže dostať bez prekážok, akými môžu byť napríklad mraky. Lúč slnečného svetla sa po prechode do vnútra kvapky láme a rozkladá na farebné zložky. Červené svetlo sa láme najmenej, fialové najviac. Časť svetla opustí kvapku a časť svetla sa vnútri kvapky opäť odrazí. Tieto odrazené lúče sa pri prechode z kvapky do vzduchu opäť lámu. Uhol, ktorý zvierajú lúče červeného svetla vychádzajúce z kvapky s pôvodnými slnečnými lúčmi je približne 42° . Pre fialovú farbu je to zase 40° . Ľahšie však v dúhe rozoznáme modré svetlo, ktorého so slnečným svetlom zvierá uhol o trochu väčší než fialové svetlo. V skutočnosti však tieto uhly nie sú jediné, aké svetlo danej farby zvierá so slnečnými lúčmi. Napríklad červené svetlo opúšťa kvapku pod uhlom 0° až 42° , nikdy nie viac. Podobne, fialové svetlo opúšťa kvapku pod uhlom 0° až 40° a nikdy nie väčším. Pri najväčšom uhle, pri akom možno svetlo danej farby vidieť, však daná farba prevažuje. Napríklad pod uhlom 40° možno vidieť prevažne fialovú, avšak taktiež k nám pod daným uhlom prichádza napríklad červená, keďže je tento uhol menší než 42° . Červená farba je jediná, ktorú pod uhlom 42° môžeme vidieť, pretože všetky ostatné farby majú najväčší uhol, pod ktorým ich možno vidieť, menší než 42° . Keďže pod uhlami menšími než 40° môžu kvapku opúšťať všetky farby a žiadna z farieb (aspoň čo sa týka viditeľného svetla) pod týmito uhlami neprevažuje, pri uhloch menších než tento k nám tak prichádza biele svetlo.

V našej vzdialenosti od Slnka a našich škálach sú slnečné lúče prakticky rovnobežné. Vieme, že červené svetlo vychádzajúce z dažďovej kvapky zvierá s lúčmi slnečného svetla uhol približne 42° . Ak teda vidíme dúhu,

znamená to, že ak si predstavíme priamku smerujúcu od nás k ľubovoľnému bodu na červenom páse dúhy, tak táto priamka zvierá so slnečnými lúčmi uhol 42° . Vidíme teda, že poloha dúhy na oblohe závisí od toho, kde na oblohe sa nachádza Slnko. Ešte nápomocnejšie nám bude, ak si predstavíme priamku smerujúcu od Slnka cez našu hlavu až po jej tieň. Po tejto priamke taktiež prechádza slnečné svetlo. Túto priamku môžeme predĺžiť aj ďalej, pod povrch Zeme. Práve táto priamka smeruje k tzv. antisolárnemu bodu, čo je bod, ktorý je vlastne stredom dúhy a na oblohe sa nachádza presne na opačnej strane voči Slnku. Ak sú teda vhodné podmienky pre vznik dúhy, môžeme si predstaviť túto priamku a odhadnúť tak polohu antisolárneho bodu na oblohe a 42° ľubovoľným smerom od neho môžeme vidieť dúhu.

To je návod, ako hľadať dúhu. Pre potreby našej úlohy sa na to môžeme pozrieť aj opačne. Na fotke vidíme dúhu, môžeme teda odhadnúť polohu antisolárneho bodu, odhadnúť jeho azimut, odkiaľ vieme polohu Slnka, jeho azimut a následne tak odhadnúť čas.

Ak chceme s pomocou dúhy určiť čas, potrebujeme ešte vedieť, akým smerom je fotka orientovaná. Na fotke vidíme 1065ku, Bratislavský hrad, Vyhliadkovú vežu UFO a ešte napríklad Dóm sv. Martina. Keď sa pozrieme na mapy, môžeme vidieť, že Dóm sv. Martina sa nachádza približne smerom na sever od UFA. Môžeme vidieť, že fotoaparát, UFO a Dóm sv. Martina sa nachádzajú na jednej priamke. Sever sa na fotke teda nachádza približne smerom k UFU a fotografia bola zhotovená približne na $48,133151^\circ\text{N}$, $17,104424^\circ\text{E}$.

Už vieme, akým smerom je fotka orientovaná. Zo vzdialeností medzi fotoaparátom, Dómom sv. Martina a ľavou vežou Bratislavského hradu vieme určiť, že uhol Dóm-fotoaparát-ľavá veža je asi 20° , čo nám umožňuje merať azimuty na fotografii. Preto možno odhadom určiť azimut antisolárneho bodu na približne 20° . Azimut Slnka teda bude približne 200° . Čas tak môže byť približne jedna až dve hodiny poobede. Každopádne však aj letným pohľadom môžeme vidieť, že antisolárny bod sa s istotou nachádza smerom na východ od severu, čiže Slnko sa nachádza smerom na západ od juhu a teda s istotou môžeme povedať, že fotka bola urobená v poobedných hodinách.

Iný spôsob, ako môžeme určiť čas, je pozrieť sa na tieň. Ak sa pozrieme na Dóm sv. Martina, vidíme, že jeho západná strana, mierne otočená smerom na juh, je v tieni. S istotou teda môžeme povedať, že fotka bola urobená v doobedných hodinách. Ak sa pozrieme na piliere UFA, tiež vidíme, že ich západná strana je v tieni. Aj tieň, ktorý vrhá UFO na jeho piliere, napovedá, že Slnko sa nachádza smerom na východ od juhu. Čas tak môžeme odhadnúť približne na jedenáť hodín.

Avšak tu nám nastal problém. S pomocou dúhy sme s istotou vyvodili záver, že fotka bola urobená v poobedných hodinách. S pomocou tieňov sme zase s istotou vyvodili záver, že fotka bola urobená v doobedných hodinách. Medzi časom vytvorenia fotky určeným s pomocou dúhy a časom vytvorenia fotky určeným s pomocou tieňov nemožno nájsť prienik. Z toho možno usúdiť, že dúha na fotke je dorobená. Skutočný čas, v akom bola fotka odfotená, je teda ten, ktorý sme určili s pomocou tieňov a to je spomínaných približne **jedenáť hodín**.

3.5 Hula hoop

vzorák Majo, opravoval Majo

Skôr, ako sa pustíme do riešenia úlohy, tipnime si riešenie. Určite predpokladáme, že nejaká rovnovážna poloha bude v najvyššom bode obruče (a pravdepodobne bude labilná). Ďalej by mohla byť nejaká rovnovážna poloha v najnižšom bode obruče (tá bude asi stabilná¹). Bude rovnovážna poloha aj niekde

¹SPOILER ALERT: Nebude vždy stabilná.

inde? Ešte by možno mohla byť niekde medzi a asi bude najzaujímavejšia časť úlohy spočítať, či a aká to je rovnovážna poloha a kde presne je.

Na celú situáciu sa budeme pozeráť z pohľadu pozorovateľa, ktorý sa otáča spolu s obručou. Tento pozorovateľ vidí obruč ako statickú. Cena za to je, že hmotný bod bude vnímať odstredivú silu.

Na náš hmotný bod tak pôsobia v podstate tri sily – tiažová, odstredivá a nejaká sila od obruče. Sila od obruče je však len nejaká taká sila, ktorá spôsobuje, že hmotný bod bude stále pripevnený k obruči. To zariadi tak, že akonáhle by na hmotný bod mala pôsobiť nejaká sila v radiálnom smere (t. j. do stredu alebo od stredu obruče), obruč bude na bod pôsobiť tak, aby sa táto sila vyrušila. Preto nás z tiažovej a odstredivej sily budú zaujímať iba ich zložky v smere dotýčnice ku kružnici tvorenej obručou.

Tieto zložky nie je náročné vypočítať pomocou elementárnej geometrie. Trochu krajšie to však ide analytickou geometriou. Zavedme súradnice tak, aby stred obruče bol v bode $(0, 0)$ a smer tiažového zrýchlenia bol klasicky $(0, -g)$. Potom bod, ktorý zodpovedá uhlu α , bude mať súradnice $\mathbf{r} = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$, kde r je polomer obruče. Jednotkový dotýčnicový vektor v tomto bode potom bude $\mathbf{n} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$. Celú situáciu nám stačí vyriešiť pre $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, pre druhú polovicu obruče to bude platiť rovnako.

Na hmotný bod s hmotnosťou m pôsobí tiažová sila $\mathbf{F}_g = (0, -mg)$ a ak sa hmotný bod nachádza v bode $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$, zložku tiažovej sily v smere dotýčnice spočítame pomocou skalárneho súčinu

$$\mathbf{F}_{g_t} = (\mathbf{F}_g \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = -mg \cos(\alpha)\mathbf{n}.$$

Táto sila tak má veľkosť $mg \cos \alpha$ a pôsobí v smere² $-\mathbf{n}$.

Pokračujme odstredivou silou. Bod s polohovým vektorom $\mathbf{r}$ sa z pohľadu nerotujúceho pozorovateľa pohybuje po kružnici s polomerom $r \cos \alpha$. Odstredivá sila pôsobiaca v tomto bode je preto $\mathbf{F}_o = (m\omega^2 r \cos \alpha, 0)$. Jej zložka v smere $\mathbf{n}$ je

$$\mathbf{F}_{o_t} = (\mathbf{F}_o \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = -m\omega^2 r \cos(\alpha) \sin(\alpha)\mathbf{n}.$$

Táto sila má teda veľkosť³ $m\omega^2 r \cos \alpha |\sin \alpha|$.

Aby bol hmotný bod v rovnovážnej polohe, musí platiť $\mathbf{F}_{g_t} + \mathbf{F}_{o_t} = 0$. Upravujme túto podmienku

$$-mg \cos(\alpha)\mathbf{n} - m\omega^2 r \cos(\alpha) \sin(\alpha)\mathbf{n} = 0,$$

$$-m \cos \alpha (g + \omega^2 r \sin \alpha)\mathbf{n} = 0.$$

Označme $\mathbf{F}$ vektor na ľavej strane poslednej rovnice. Ten je nulový, ak platí $\cos \alpha = 0$, alebo ak $g + \omega^2 r \sin \alpha = 0$. Prvý vzťah má na uvažovanom intervale riešenia $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$.

Uhol $\alpha = \frac{\pi}{2}$ zodpovedá bodu hore na obruči. Toto je v zhode s očakávaniami o rovnovážnej polohe. Aby sme zistili, či je stabilná, pozrime sa na vektor $\mathbf{F}$ pre uhly blízke $\frac{\pi}{2}$. Pre uhol $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ má vektor $\mathbf{F}$ tvar $\mathbf{F} = -k\mathbf{n}$ pre nejakú kladnú konštantu k . Takže na bod, ktorý mierne vychýlime z rovnovážnej polohy, pôsobí sila v smere

²To je pre $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ podľa očakávania smerom nadol.

³A pre $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sínus mení znamienko v bode $\alpha = 0$, takže táto sila smeruje vždy smerom k bodu, v ktorom $\alpha = 0$.

opačnom ako n , čo je smerom z rovnovážnej polohy. Rovnako bude hmotný bod utekať od rovnovážnej polohy aj pri vychýlení na uhol $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$. Takže táto rovnovážna poloha je labilná.

Podobné úvahy môžeme spraviť aj pre $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, čo je ďalší bod, kde sme očakávali rovnovážnu polohu. Tu si už ale musíme uvedomiť, že pre veľké hodnoty ω môže už byť zátvorka $(g + \omega^2 r \sin \alpha)$ záporná. Uhly vieme voliť dostatočne blízke $-\frac{\pi}{2}$, čiže vieme spraviť $\sin \alpha$ ľubovoľne blízke -1 . Hraničná podmienka preto bude $g - \omega^2 r = 0$. Takže ak $g \geq \omega^2 r$, bude toto stabilná poloha. V opačnom prípade to bude labilná poloha⁴.

Zostáva prípad $g + \omega^2 r \sin \alpha = 0$, čiže $\sin \alpha = -\frac{g}{\omega^2 r}$. Ľavá strana je sínus niečoho, takže môže byť len z intervalu $[-1, 1]$. Vzhľadom na to, že pravá strana je určite záporná, musí platiť $-\frac{g}{\omega^2 r} \geq -1$, alebo po prenasobení -1 máme $\frac{g}{\omega^2 r} \leq 1$. Opäť sa tak dostáva do hry podmienka $g \leq \omega^2 r$. V tomto prípade máme novú rovnovážnu polohu v bode zodpovedajúcom uhlu $\alpha = \arcsin\left(-\frac{g}{\omega^2 r}\right)$. V prípade $g = \omega^2 r$ sa toto redukuje na rovnovážnu polohu z predošlého odseku. Predpokladajme preto $g < \omega^2 r$. Keďže robíme arkussínus z niečoho záporného, dostaneme uhol medzi 0 a $-\frac{\pi}{2}$. To ale nič nezmení na tom, že kosínus z tohto uhla bude kladný a rovnakým hrajkaním sa ako doteraz zistíme, že táto rovnovážna poloha je stabilná.

Aby sme to zhrnuli, rovnovážne polohy vyzerajú takto:

- Poloha navrchu ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) je vždy labilná rovnovážna poloha.
- Ak $g \geq \omega^2 r$, poloha naspodku ($\alpha = -\frac{\pi}{2}$) je stabilná rovnovážna poloha.
- Ak $g < \omega^2 r$, poloha naspodku ($\alpha = -\frac{\pi}{2}$) je labilná rovnovážna poloha a stabilná rovnovážna poloha je pre $\alpha = \arcsin\left(-\frac{g}{\omega^2 r}\right)$.

Pokročilejšie riešenie

Naznačíme ešte jedno riešenie, ktoré využíva derivácie. No aj ak si sa s nimi nestretol/-a, môže byť základná myšlienka poučná. Je založená na tom, že ak sme v statickej situácii, rovnovážne polohy sú v bodoch, kde potenciál⁵ nadobúda extrém – v minime je stabilná poloha, v maxime labilná poloha.

Ak sa na našu úlohu pozeráme vo vzťažnej sústave spojenej s obručou (ako sme to robili aj v predošlom riešení), sme skutočne v statickej situácii. Daň za to je v tomto prípade komplikovanejší potenciál. Tak ho poďme spočítať. Potenciál za gravitačnú silu je klasicky $V_g = gy$, kde y je zvislá súradnica, čiže v danom bode $\mathbf{r} = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ má veľkosť $V_g(\alpha) = gr \sin \alpha$.

S potenciálom od odstredivej sily to bude možno trochu komplikovanejšie. Typický riešiteľ sa s ním totiž ešte asi nestretol. Tak ho skúsime uhádnuť. Spomeňme si, že odstredivá sila má veľkosť $F_o = m\omega^2 x$. To je podozrivo podobný tvar ako tvar sily od pružiny, ktorá je $F = -kx$ a ktorej potenciál je $V = \frac{1}{2} \frac{k}{m} x^2$. Jediný rozdiel s našou odstredivou silou je, že v našom prípade je $k = -m\omega^2$. Takže potenciál odstredivej sily je⁶ $V_o = -\frac{1}{2} \omega^2 x^2$. Pre daný bod $\mathbf{r}$ je teda $V_o(\alpha) = -\frac{1}{2} \omega^2 (r \cos \alpha)^2$.

Pracujeme tak s potenciálom

$$V(\alpha) = V_g(\alpha) + V_o(\alpha) = gr \sin \alpha - \frac{1}{2} \omega^2 (r \cos \alpha)^2.$$

⁴Ak platí presne $g = \omega^2 r$, takže $(g + \omega^2 r \sin \alpha) \geq 0$, a teda aj v tomto prípade ide o stabilnú polohu.

⁵Teda potenciálna energia telesa vydelená jeho hmotnosťou. Riešenie by bolo rovnako správne, aj ak by sme miesto potenciálu rátali s potenciálnou energiou

⁶Prípadne sme si mohli tento fakt spočítať integrovaním odstredivej sily.

Hľadáme extrémny potenciálu ako funkcie uhla α , a tak derivujeme $V(\alpha)$ a položíme ho rovné nule

$$V'(\alpha) = gr \cos \alpha + \omega^2 r^2 \cos \alpha \sin \alpha \stackrel{!}{=} 0$$

Po úprave to je rovnaká podmienka na polohu rovnovážnej polohy ako v predošlom riešení.

Aby sme zistili, kedy ide o stabilnú a kedy o labilnú polohu, spočítajme ešte druhú deriváciu $V(\alpha)$ a zistujme znamienko v bodoch, kde bodá prvá derivácia nulová

$$V''(\alpha) = -gr \sin \alpha + \omega^2 r^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

Postupne dostávame

- $V''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -gr - \omega^2 r^2 < 0$, takže pre $\alpha = \frac{\pi}{2}$ nadobúda V lokálne maximum, a teda je táto poloha labilná.
- $V''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = r(g - \omega^2 r)$ vedie na rovnakú podmienku stability ako v predošlom riešení.
- $V''\left(\arcsin\left(-\frac{g}{\omega^2 r}\right)\right) = \frac{(\omega^2 r + g)(\omega^2 r - g)}{\omega^2}$, čo je vzhľadom na podmienku $g < \omega^2 r$ vždy (keď je toto vôbec rovnovážna poloha) kladné číslo, takže táto poloha je vždy stabilná.

Tým sme dostali rovnaký výsledok ako v predošlom riešení.

3.6 Marketingový trik

vzorák MatusH, opravoval MatusH

Vedenie tepla opisuje Fourierov zákon

$$j = \frac{\lambda}{d} \Delta T, \quad (6.4.1)$$

kde j je plošná hustota toku tepla, λ súčiniteľ tepelnej vodivosti opisujúci schopnosť materiálu viesť teplo, d je hrúbka materiálu a ΔT je rozdiel teplôt na koncoch materiálu.

Najskôr si podme vysvetliť, ako tento zákon vlastne máme chápať. Predstavme si, že máme stenu hrúbky d s tepelnou vodivosťou λ . Rozdiel teplôt na jednej a druhej strane steny je ΔT . Potom vieme vypočítať, aká je plošná hustota toku tepla, ktorá nám hovorí, koľko joulov tepla „pretečie“⁷ jednotkou plochy za jednotku času.

To, ako dobre hrnček izoluje, je dané tým, aká je hustota tepelného toku na jednotku rozdielu teploty. Preto nás zaujíma vlastne len koeficient úmernosti $\frac{\lambda}{d}$ z Fourierovho zákona 6.4.1, ktorý sa nazýva aj tepelná vodivosť daného objektu. Tento koeficient vieme jednoducho vypočítať len dosadením hodnôt, ktoré si vyhladáme na internete pre prípady b) a c).

Podme sa teraz pozrieť, ako sa mení tento koeficient, ak dáme k sebe dve vrstvy, prvú s λ_1 a d_1 a druhú s λ_2 a d_2 , pričom teplota na jednej strane je T_1 a na druhej $T_2 > T_1$. Vieme, že musí platiť rovnica

$$\frac{\lambda_1}{d_1} (T - T_1) = \frac{\lambda_2}{d_2} (T_2 - T), \quad (6.4.2)$$

⁷Výraz pretečie nie je úplne správny, lebo indikuje, že existuje niečo, čo sa pohybuje a tým vytvára tečenie tepla. Ako je to napríklad v prípade tečenia prúdu alebo tečenia rieky. Prečo to tak nie je, je na celú prednášku, preto buď prídte na sústredenie alebo podte študovať na Matfyz, ak chcete vedieť kde je problém.

kde T je teplota medzi dvomi vrstvami. Platnosť tejto rovnice vidíme napríklad z toho, že ak by plošná hustota tepelného toku medzi vrstvami nebola rovnaká, na ich rozhraní by sa zbieralo teplo, a teda by tam rástla teplota. Zo skúsenosti ale vieme, že nič také sa nedeje. Úpravou rovnice 6.4.2 dostávame

$$T\left(\frac{\lambda_1}{d_1} + \frac{\lambda_2}{d_2}\right) = T_1 \frac{\lambda_1}{d_1} + T_2 \frac{\lambda_2}{d_2},$$

$$T = \frac{T_1 \frac{\lambda_1}{d_1} + T_2 \frac{\lambda_2}{d_2}}{\frac{\lambda_1}{d_1} + \frac{\lambda_2}{d_2}}. \quad (6.4.3)$$

Na to, aby sme zistili hustotu toku cez jednu z vrstiev (a tým vlastne tok cez obe vstvy) nám teraz stačí dosadiť za T napríklad do ľavej strany rovnice 6.4.2. Tým dostávame

$$j = \frac{\lambda_1}{d_1} (T - T_1) = \frac{\frac{\lambda_1}{d_1} \frac{\lambda_2}{d_2}}{\frac{\lambda_1}{d_1} + \frac{\lambda_2}{d_2}} (T_2 - T_1). \quad (6.4.4)$$

Vidíme, že dávaním viacerých vrstiev za seba sa ich tepelná vodivosť skladá rovnako, ako sa skladá odpor paralelného zapojenia rezistorov. Ďalšie pozorovanie je, že výsledná tepelná vodivosť nezávisí na poradí vrstiev. Preto v prípade a) si vieme ušetriť rávanie a zmeniť situáciu z pohára s dvojitém sklom na pohár so sklom hrúbky $2h$ a následnou vrstvičkou vzduchu h .

Koeficient tepelnej vodivosti štandardného skla sa pohybuje medzi $0,9 - 1,2 \text{ W/(mK)}$ a pre vzduch s teplotou okolo 60°C je približne $0,03 \text{ W/(mK)}$. Izbovú teplotu neuvažujeme preto, lebo vzduch medzi sklami bude mať približne teplotu, ktorá je priemerom tej vonkajšej a teploty kávy⁸.

S týmito informáciami vieme už vypočítať približnú tepelnú vodivosť pre všetky typy zadáných pohárov, (pre jednoduchosť počítame s koeficientom tepelnej vodivosti skla 1 W/(mK))

- a) približne $\frac{1}{h} \cdot 0,028 \text{ W/(mK)}$,
- b) približne $\frac{1}{h} \cdot 0,5 \text{ W/(mK)}$,
- c) približne $\frac{1}{h} \cdot 0,33 \text{ W/(mK)}$,

a pre obyčajný pohár $\frac{1}{h} \cdot 1 \text{ W/(mK)}$.

Pohár so sklom dvojitej (resp. trojitej) hrúbky preto vedie teplo dvakrát (resp. trikrát) horšie než obyčajný pohár. Katkin nový pohár s dvojitém sklom ale vedie teplo tridsaťpäťkrát horšie ako obyčajný pohár. Preto pohár s dvojitém sklom nie je len marketingový ťah, ale reálne udrží nápoj o dosť dlhšie teplý (ak neuvažujeme straty cez vrch). Pre zaujímavosť, na rovnakom princípe fungujú aj termosky a tam je výsledok naozaj citeľný.

3.7 Fyzikálny spor

vzorák Rony, opravoval Rony

Táto úloha je zložitejšia, než sa na prvý pohľad zdá. Zadanie nebolo úplne jasné, avšak vyžadovalo nie len

- a) správny výsledok,

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_thermal_conductivities

- b) správne odôvodnenie tohto výsledku, ale aj
- c) odôvodnenie, prečo pozorovatelia nesúhlasia a jeden z nich nemá pravdu.

Pozorovatelia diskutujú o odstredivej sile, čo je zdanlivá sila, a teda závisí od vzťažnej sústavy, v ktorej sa počíta. Avšak keďže sa pýtame, akú odstredivú silu *pocitujú* body na kolese, špecifikujeme vzťažnú sústavu kolesa. Teda je to rovnaké, ako keby sa na kolese držala blcha a pýtali by sme sa, aká odstredivá sila ju odtláča, resp. akou silou sa musí pridržovať.

Z tohto vyplýva, že odpoveď je len jedna a pozorovatelia nemôžu (racionálne) nesúhlasiť. Prv si ukážeme, prečo pozorovatelia aj tak nesúhlasia a v čom robia chybu.

Obaja pozorovatelia používajú vzorec $a = v^2/r$ na výpočet odstredivého zrýchlenia. Vo vzorci je r polomer krivosti trajektórie bodu, zatiaľ čo v je rýchlosť kolmá na tento polomer. Obe veličiny sa počítajú v nejakej inerciálnej vzťažnej sústave. Cyklista určil tieto hodnoty správne pre oba body kolesa – polomer je r a rýchlosť v . Okolostojaci chodec vidí pohyb ako cykloidu⁹. Bohužiaľ, neuhádol jej polomer krivosti v hornom bode, ktorý nie je rovný polomeru kolesa, ale jeho štvornásobku, čo by mu dalo rovnaký výsledok ako cyklistovi.

Spodný bod je pre chodca ešte zaujímavejší v tom, že tu môže r byť ľubovoľné (nenulové), ale chodec vidí $v = 0$, a teda odstredivé zrýchlenie $a = 0$. Problém je, že to, čo sa v sústave blchy javí ako odstredivá sila, sa môže javiť v inej sústave ako ľubovoľná iná zdanlivá sila, v tomto prípade nie odstredivá ale zotrvačná¹⁰. Vskutku, ak by si chodec vypočítal zotrvačnú silu pôsobiacu na spodný bod a zarátal ju, dospel by k rovnakému záveru ako cyklista.

Dosť bolo diskusie, poďme na výpočty, ale aj tie si skrátime diskusiou. Poloha bodu kolesa sa dá rozpísať v oboch vzťažných sústavách po zložkách. V sústave cyklistu napríklad ako $(r \sin \varphi, r - r \cos \varphi)$, čiže pohyb po kružnici, kde $\varphi \in (0, 2\pi)$. Potom si človek všimne, že medzi sústavami sa táto poloha líši len v tom, že v sústave chodca je v x -ovej zložke navyše aj lineárny člen vt kvôli pohybu cyklistu. To znamená, že po dvoch deriváciách je tento lineárny člen nulový, a že zrýchlenie bodu kolesa je konštantné na celom kolese a rovnaké v oboch sústavách.

3.8 Čaj o ôsmej

vzorák Soňa Vasilová, opravovala KatkaN

Ako vzorové riešenie uvádzame riešenie do veľkej miery inšpirované riešením Soničky Vasilovej.

Pomôcky a postup

Na začiatku som si vybrala situácie, ktoré som sa rozhodla pozorovať – tri rôzne poháre a dva až tri rôzne objemy (podľa toho, koľko vody sa do daného pohára vošlo). Používala som tieto tri poháre:

⁹<https://sk.wikipedia.org/wiki/Cykloida>

¹⁰https://sk.wikipedia.org/wiki/Zotrvačná_sila



Obrázok 6.6.1: Tri poháre

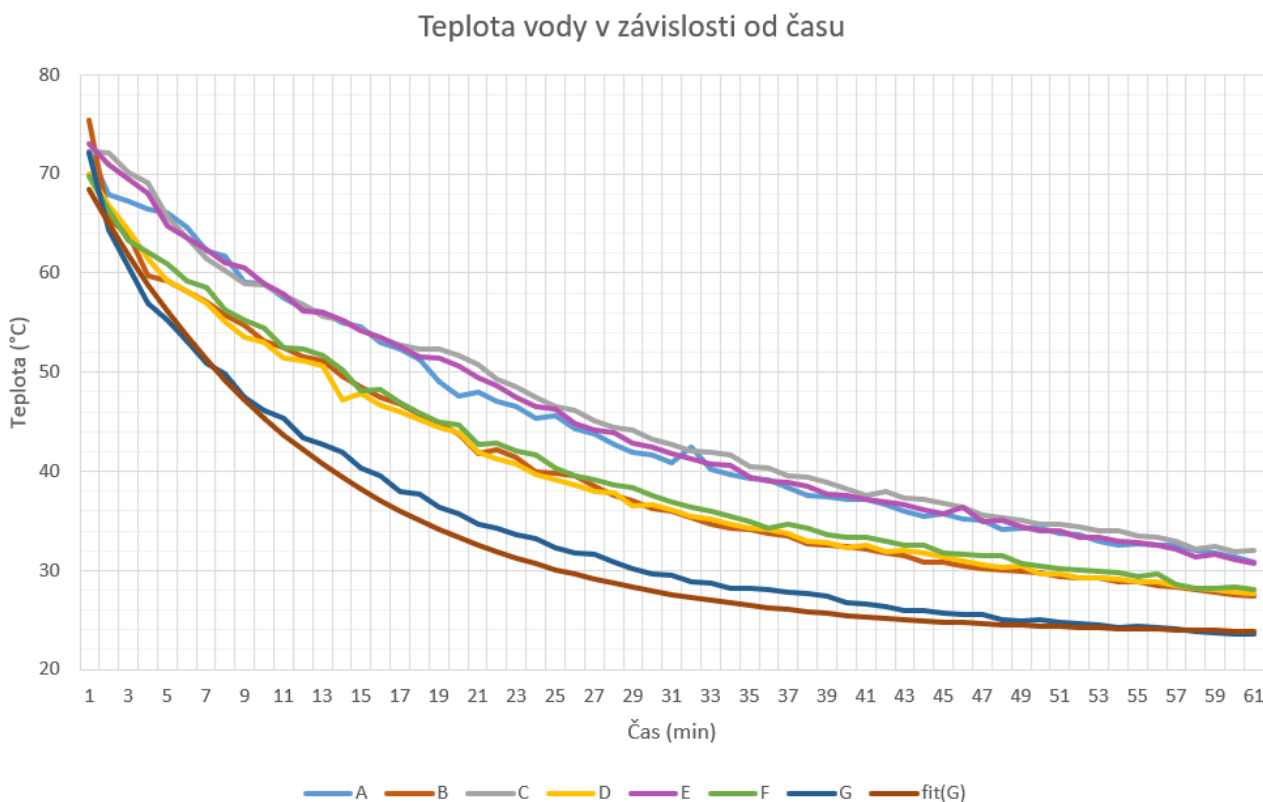
Základný objem bol 80 ml. Tu sú jednotlivé situácie:

- A – užší sklenený pohár, 160 ml
- B – užší sklenený pohár, 80 ml
- C – širší sklenený hrnček, 160 ml
- D – širší sklenený hrnček, 80 ml
- E – širší porcelánový/hlinený hrnček, 240 ml
- F – širší porcelánový/hlinený hrnček, 160 ml
- G – širší porcelánový/hlinený hrnček, 80 ml

Čas som merala pomocou stopiek na mobile a každú minútu som odmerala teplotu. Teplotu som merala pomocou bezkontaktného infračerveného teplomera.

Výsledky (Graf)

Tabuľku hodnôt priložím na záver.



Obrázok 6.6.2: Graf závislosti teploty od času pre všetky merania

Diskusia

Vidíme, že merania sa rozdelili do takých troch množín: {G}, {B, D, F} a {A, C, E}. Ale napriek tomu všetky sú to exponenciálne krivky (pre G je aj fit, pre ostatné nie kvôli prehľadnosti).

Exponenciálny tvar krivky vysvetľuje takzvaný Newtonov ochladzovací zákon. Ten hovorí, že rýchlosť zmeny teploty vieme vypočítať ako

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s),$$

kde T je teplota pohára s vodou, T_s je teplota okolia a k je súčiniteľ prestupu tepla medzi pohárom a vzduchom. Vyriešením tejto diferenciálnej rovnice dostávame vzťah pre závislosť teploty od času

$$T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt},$$

kde T_0 je počiatočná teplota vody. Odtiaľto sa teda berie exponenciálny tvar kriviek v grafe.

Rozdiel objemov

Tento je veľmi pekne viditeľný. Vždy, keď bol menší objem, tak voda omnoho rýchlejšie chladla a to pri všetkých troch pohároch. Vyplýva to z kalorimetrickej rovnice, v ktorej vystupuje hmotnosť vody (čo je priamo úmerné objemu). Čím viac vody, tým viac energie potrebuje na ohriatie alebo tým pomalšie sa ochladzuje.

Rozdiel materiálov

Z grafu vyplýva, že rovnaké množstvo vody vychladne omnoho rýchlejšie v porcelánovom/hlinenom pohári ako v sklenenom, čo je spôsobené práve rôznou tepelnou kapacitou pohárov, ktorá tiež vystupuje v kalorimetrickej rovnici. Dokonca až 240 ml v treťom hrnčeku chladlo rovnako rýchlo ako 160 ml v sklenenom. Na rýchlosť chladnutia taktiež vplýva aj to, že rôzne materiály majú rôzne súčinitele prestupu tepla.

Chyby merania

Chyby merania mohli nastať pri nepresnom meraní času, ale čo má omnoho väčší vplyv, je meranie teploty vody. Teplomer meria pomocou infračerveného žiarenia a v sklenených pohároch sa odráža, čo mohlo skresliť výslednú teplotu. Tieto chyby som sa snažila odstrániť hlavne veľkým množstvom meraní, kde rozdiely pol stupňa veľmi nezavážia, ako vidno z grafu.

Tabuľka hodnôt:

t (min)	A (°C)	B (°C)	C (°C)	D (°C)	E (°C)	F (°C)	G (°C)
1,0	72,3	75,4	72,3	70,0	73,1	69,8	72,2
2,0	67,9	65,4	72,2	66,8	70,9	66,3	64,3
3,0	67,2	63,9	70,2	64,4	69,5	63,3	60,7
4,0	66,4	59,8	69,1	61,5	68,0	62,1	56,9
5,0	66,1	59,2	65,7	59,2	64,7	60,9	55,3
6,0	64,6	58,2	63,6	58,1	63,5	59,2	53,1
7,0	62,2	57,1	61,4	56,9	62,4	58,6	50,9
8,0	61,7	55,8	60,3	55,1	61,1	56,3	49,8
9,0	59,1	54,7	59,0	53,5	60,5	55,2	47,5
10,0	59,0	53,2	58,8	53,0	59,0	54,4	46,1
11,0	57,5	52,5	57,7	51,4	57,9	52,5	45,3
12,0	56,4	51,5	56,8	51,2	56,2	52,3	43,4
13,0	56,1	51,1	55,7	50,6	56,1	51,7	42,7
14,0	55,0	49,6	55,3	47,2	55,3	50,2	41,9
15,0	54,6	48,5	54,3	47,9	54,2	48,1	40,3
16,0	53,0	47,4	53,4	46,7	53,5	48,3	39,5
17,0	52,4	46,8	52,8	46,0	52,6	46,9	38,0
18,0	51,3	45,8	52,4	45,2	51,6	45,9	37,7
19,0	49,0	44,8	52,4	44,4	51,4	45,0	36,4
20,0	47,6	43,8	51,7	43,9	50,6	44,7	35,7
21,0	48,0	41,8	50,8	41,9	49,4	42,7	34,7
22,0	47,1	42,2	49,3	41,3	48,6	42,8	34,3
23,0	46,5	41,4	48,5	40,7	47,5	42,0	33,6
24,0	45,4	40,0	47,5	39,7	46,6	41,6	33,2
25,0	45,6	39,8	46,6	39,1	46,3	40,3	32,3
26,0	44,3	39,5	46,1	38,6	44,8	39,5	31,8
27,0	43,8	38,5	45,1	38,0	44,1	39,2	31,6
28,0	42,7	37,5	44,4	37,8	43,9	38,6	30,8
29,0	41,9	37,0	44,1	36,5	42,8	38,4	30,2

t (min)	A (°C)	B (°C)	C (°C)	D (°C)	E (°C)	F (°C)	G (°C)
30,0	41,6	36,3	43,3	36,6	42,4	37,6	29,7
31,0	40,9	36,0	42,7	36,1	41,8	36,9	29,5
32,0	42,5	35,3	42,1	35,4	41,2	36,4	28,9
33,0	40,2	34,7	41,9	35,2	40,7	36,0	28,7
34,0	39,7	34,3	41,7	34,6	40,6	35,5	28,2
35,0	39,3	34,1	40,5	34,3	39,4	34,9	28,2
36,0	39,1	33,8	40,3	34,1	39,0	34,3	28,0
37,0	38,4	33,5	39,6	33,7	38,9	34,6	27,8
38,0	37,5	32,7	39,4	32,9	38,5	34,3	27,7
39,0	37,4	32,5	38,9	32,8	37,7	33,6	27,4
40,0	37,2	32,4	38,2	32,3	37,5	33,4	26,7
41,0	37,2	32,1	37,6	32,5	37,2	33,3	26,6
42,0	36,6	31,8	37,9	31,9	36,9	33,0	26,3
43,0	36,0	31,5	37,3	32,0	36,6	32,6	26,0
44,0	35,5	30,9	37,2	31,7	36,1	32,6	26,0
45,0	35,7	30,8	36,8	31,4	35,7	31,7	25,7
46,0	35,2	30,5	36,4	31,0	36,4	31,6	25,6
47,0	35,0	30,2	35,6	30,6	34,9	31,5	25,6
48,0	34,1	30,1	35,3	30,3	35,0	31,5	25,0
49,0	34,3	29,9	35,0	30,4	34,4	30,7	24,9
50,0	34,3	29,8	34,7	29,6	34,0	30,5	25,0
51,0	33,7	29,4	34,6	29,7	34,0	30,2	24,8
52,0	33,6	29,3	34,4	29,3	33,4	30,1	24,6
53,0	32,9	29,2	34,0	29,3	33,4	29,9	24,5
54,0	32,6	28,9	34,0	29,1	33,0	29,8	24,3
55,0	32,7	28,9	33,5	28,9	32,8	29,4	24,4
56,0	32,5	28,4	33,4	28,9	32,6	29,6	24,3
57,0	32,5	28,3	32,9	28,4	32,2	28,6	24,1
58,0	32,0	28,1	32,2	28,2	31,4	28,2	23,8
59,0	31,7	27,8	32,4	28,1	31,6	28,2	23,7
60,0	31,4	27,6	31,9	27,8	31,1	28,3	23,6
61,0	30,9	27,4	32,0	27,7	30,7	28,1	23,6