

Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 FKSák v aute

vzorák **MatusH**, opravoval **Hovorca**

Druhý Newtonov zákon nám hovorí, že ak Patrik rovnomerne brzdí (t.j. zrýchlenie a je konštantné), tak naňho musí pôsobiť konštantná výsledná sila $F = ma$. Rovnako nám aj povie, že ak už stojí, tak výsledná sila naňho pôsobiaca je nulová, lebo nezrýchluje. To znamená, že v okamžiku ubrzdzenia sa sila naňho pôsobiaca zmení skokovo. Práve táto zmena spôsobí trhnutie. Prirovnáť by sme to vedeli napríklad k drgnutiu.

3.2 Pľyšový ventilátor

vzorák **MatusH**, opravovala **Nina**

Na vyriešenie tohto príkladu nám stačí si uvedomiť, že jedno vyvetranie vieme popísať jednou kalorimetrickou rovnicou

$$(T_{b1} - T_v)c_v\rho_v V_v = (T_{b0} - T)c_b\rho_b V_b, \quad (3.2.1)$$

pričom T_{b1} je výsledná teplota betónu, T_{b0} resp. T_v je počiatočná teplota betónu resp. vzduchu a indexy v resp. b pri c , ρ a V označujú tepelnú kapacitu, hustotu a objem vzduchu, resp. betónu. Z rovnice 3.2.1 vyjadriť iteratívny vzťah pre teplotu betónu po n meraniach

$$T_{bn} = \frac{T_v c_v \rho_v V_v + T_{b(n-1)} c_b \rho_b V_b}{c_v \rho_v V_v + c_b \rho_b V_b}. \quad (3.2.2)$$

Už nám stačí len opakovať výpočet novej teploty betónu, dokým neklesne pod 25°C . Pomôcť si môžeme výpočtovým softvérom, ako je napríklad Microsoft Excel.

Pre hustotu vzduchu $\rho_v = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ¹, hmotnostný tepelnú kapacitu vzduchu $0,724 \text{ kJ}/(\text{kgK})$ ² a hustotu betónu 2400 kg/m^3 ³ dostaneme 804 vetraní.

3.3 Legendárny labužnícky lekvár

vzorák **MatusH**, opravoval **MatusH**

Najskôr si povedzme, ako také zaváranie vlastne funguje. Ako prvé dáme do pohárov jedlo, ktoré chceme zavariť. To môže byť ovocie, zelenina ale napríklad aj mäso. Poháre následne prikryjeme viečkom a dáme do hrnca s vodou. Následne vodu zohrievame. Takto spracované jedlo je pripravené na skladovanie, takže nám stačí počkať kým poháre vychladnú a môžeme ich preniesť do komory, kde počkajú na naplnenie svojho osudu.

Ak sme niekedy v živote otvárali zavaráninu, tak sme si mohli všimnúť, že viečko tam veľmi dobre drží. Spravidla vždy pri otvorení počujeme zasyčanie a v prípade ak nie, tak je veľa krát zaváranina pokazená.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Density_of_air

²https://sk.wikipedia.org/wiki/Hmotnostn%C3%A1_tepeln%C3%A1_kapacita

³https://en.wikipedia.org/wiki/Properties_of_concrete

Toto známe zasyčanie vzniká tak, že vo fľaši je podtlak a pri naddvihnutí viečka tam teda vnikne vzduch. Prečo je tam ale podtlak?

Z procesu zaváranie s môžeme všimnúť, že keď dávame poháre do vody, tak vzduch v nich má izbovú teplotu. Následne sa zohreje, čím sa rozťahne. To spôsobí, že vnútri je väčší tlak ako vonku a teda vzduch zo zaváraniny vyjde, aby bol systém v rovnováhe. Keď sa poháre chladia, tak viečko už pevne drží, takže vzduch nevie vniknúť naspäť.⁴ Keď sa teda vzduch vnútri schladí znova na izbovú teplotu, tak je v ňom menej vzduchu ako na začiatku. Veci ktoré zavárame sa štandardne nevedia veľmi rozťahovať a teda vzduch vyplňa rovnaký objem ako na začiatku.

Pri chladnutí teda dochádza ku izochorickému deju, pre ktorý platí rovnica

$$\frac{p_1}{T_1} = \text{konšt} = \frac{p_2}{T_2},$$

kde p značí tlak a T teplotu. Uvažujme, že všetok prebytočný vzduch z pohára odyšiel a bol v ňom izbový tlak $p_1 = 100\,000$ Pa. Pri zaváraní sa zaváraniny zohrievajú na teplotu priblyžne $T_1 = 358$ K⁵ a na konci vychladnú na izbovú teplotu $T_2 = 293$ K. Z toho dostávame tlak po vychladnutí

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} \approx 82\,000 \text{ Pa.}$$

To je priblyžne o $\Delta p = 18\,000$ Pa menej ako atmosférický tlak. Ak má viečko polomer priblyžne $r = 4$ cm, tak viečko bude pritláčaný silou priblyžne

$$F = \Delta p S = \Delta p \pi r^2 = 90 \text{ N.}$$

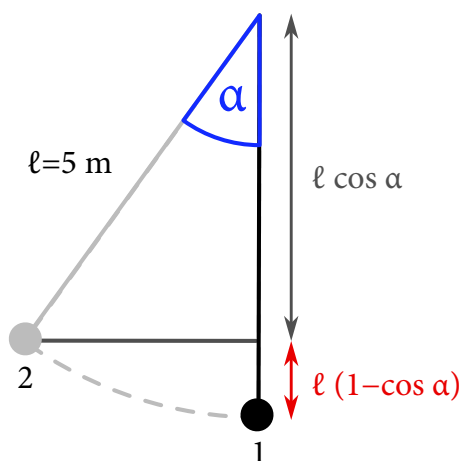
3.4 Masívny zvon

vzorák Katka N., opravoval MatusH

Táto úloha sa dá riešiť viacerými spôsobmi. Najjednoduchšie je pozrieť sa na problém cez energie. Vieme, že súčet kinetickej a potenciálnej energie musí byť počas celého deja konštantný, pričom v polohe jedna na obrázku má srdce maximálnu kinetickú energiu a v polohe dva maximálnu potenciálnu energiu.

⁴Niekedy sa poháre na chladnutie dokonca otáčajú, aby vzduch nemal prístup ku viečku.

⁵<https://sk.wikipedia.org/wiki/Zav%C3%A1ranie>



Obrázok 3.4.1: Srdce zvona

Srdce zvona má v polohe 2 (teda pre $\alpha = 5^\circ$) voči polohe 1 potenciálnu energiu väčšiu o $\Delta E_p = mgl(1 - \cos \alpha)$. Využijeme to, že celková potenciálna energia v krajnom bode je vlastne celková kinetická energia v najnižšom bode (kam sme kvôli jednoduchosti posadili nulovú hodnotu E_p).

Teraz energie odložíme a pozrieme sa na to, o čom nám hovorí *impulz sily*. V prípade, že nepoznáme vzťah $I = F\Delta t$, vieme si dopomôcť jednotkovou analýzou (impulz sily má jednotku 1 Ns). Trocha si tento vzťah rozpíšme

$$I = F\Delta t = ma\Delta t = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta t = m\Delta v = \Delta p$$

Impulz sily teda hovorí o zmene hybnosti.

Vyjadriť si teraz, akú rýchlosť musí mať srdce na spodku svojej dráhy. Využijeme to, že celková kinetická energia na spodku dráhy sa premení na celkovú potenciálnu energiu v krajnom bode

$$E_{p_{max}} = E_{k_{max}}$$

$$mgl(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}$$

Každý Jonkin úder udelí srdcu zvona rovnakú rýchlosť $v = \frac{I}{m}$. Jednoducho predelíme potrebnú výslednú rýchlosť rýchlosťou udelenou každým úderom

$$n = \frac{m\sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}}{I}$$

$$= \frac{1000 \text{ kg} \sqrt{9,81 \text{ m/s}^2 10 \text{ m} (1 - \cos 5^\circ)}}{200 \text{ Ns}} \approx 3.055$$

Na rozhojdanie zvonu teda budú potrebné 4 údery. Vieme, že počas každého kyvu stíha udeliť len jeden úder. Taktiež vieme, že dĺžka periódy závisí jedine od dĺžky závesu. Pomocou vzťahu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

už jednoducho dopočítame, ako dlho bude trvať rozhojdanie srdca. Do jednej periódy, teda jedného kmitu, sa zmestia dva kyvy. A teraz si predstavme, čo sa deje: zvon stojí. Jonka doňho udrie prvý raz. Ubehne pol periódy, udrie druhý raz. Po ďalšej polperióde udrie tretí raz. A po ďalšej polperióde štvrtý raz. Srdce sa ale teraz nachádza v najnižšom bode svojej trajektórie a kým sa dotkne pláštia zvonu a rozozvučí ho, musí vykonať ešte polovicu kyvu, teda štvrtinu kmitu. Rozozvučať zvon bude Jonke dokopy trvať

$$(3 \cdot 0,5 + 0,25)T = 1,75 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{5 \text{ m}}{9,81 \text{ m/s}^2}} \approx 7,85 \text{ s}$$

3.5 Neurčitost' hĺbky

vzorák Majo, opravoval Majo

Máme dve tvarovo rovnaké telesá, ktoré hádzeme do studne. Na všetky pôsobí tiažové zrýchlenie smerom nadol, takže obe telesá by mali zrýchľovať zrýchlením g smerom nadol. Čiže dopadnú naraz. Zadanie nám však hovorí, že to tak nebude. Čo je teda ináč?

Najdôležitejšia vec, ktorá bude ináč, je odpor vzduchu. Tak ako ani parašutista donekonečna nezrýchľuje so zrýchlením g , keď zoskočí z lietadla, tak aj naše telesá budú brzdené vzduchom. Konkrétne si vezmeme zvyčajný model, že odporová sila má veľkosť $F_{\text{odpor}} = \frac{1}{2}CS\rho_{\text{vzduch}}v(t)^2$. V tomto vzťahu je C konštanta súvisiaca s tvarom telesa (pre guľu $C = 0,47$), S je účinný prierez (pre guľu s polomerom r je to kruh s rovnakým polomerom, čiže $S = \pi r^2$), ρ_{vzduch} je hustota vzduchu a napokon $v(t)$ je okamžitá rýchlosť telesa v čase t .

V našej situácii tak na každé teleso pôsobí tiažová sila $F_G = mg$ (kde m je hmotnosť telesa) smerom nadol a odporová sila $F_{\text{odpor}} = \frac{1}{2}CS\rho_{\text{vzduch}}v(t)^2$ smerom nahor. Zvoľme si súradnicovú sústavu tak, že na začiatku je teleso vo výške $x(0) = 0$, a potom pôjde do záporných hodnôt. V takom prípade spomínané sily vyvolávajú zrýchlenie $a(t)$ dané vzťahom

$$ma(t) = -mg + \frac{1}{2}CS\rho_{\text{vzduch}}v(t)^2.$$

Aby sme si trochu zjednodušili život, predeľme rovnicu m a označme $k = \frac{CS\rho_{\text{vzduch}}}{2m}$, čím dostaneme

$$a(t) = -g + kv(t)^2. \quad (3.5.1)$$

Rozmyslime si, prečo by mal byť rozdiel medzi žulovým kamienkom a železnou guľôčkou. Jediné, v čom sa líšia, je ich hustota, resp. hmotnosť. Železná guľôčka je ťažšia, takže jej zodpovedajúce k je menšie. To znamená, že odporová sila menej brzdí železnú guľôčku ako žulový kamienok. A čím menšie brzdenie, tým viac sa dané teleso bude správať akoby iba voľne padalo (čo nastane pre $k = 0$). **Meranie vykonané Matúšovou železnou guľôčkou preto bude presnejšie.**

Na tomto mieste upozorníme na jednu vec, ktorú sme mierne zámerne doteraz ignorovali. Ak by Zuzka s Matúšom postupovali spôsobom „pustím teleso súčasne so stopkami a stopky zastavím, až keď počujem zvuk dopadnutia“, tak by sa hneď dopúšťali chyby – zvuk z dna k nim totiž nejaký čas putoval a to možno treba započítať⁶. Predpokladajme však, že o tomto Zuzka s Matúšom vedia a že to zvládnu započítať⁷. Well, aj tak budú mať pri hlbších studniach dosť veľkú chybu už len kvôli odporu vzduchu. Takže predpokladajme, že Zuzka s Matúšom sú dokonalí až na to, že zabudli na odpor vzduchu.

Zadanie od nás ešte chce, aby sme zostrojili graf chyby merania. Na to však budeme potrebovať najšť skutočný prepočet medzi časom pádu telesa a hĺbkou studne. Čiže v podstate chceme s využitím rovnice 3.5.1 najšť funkciu $x(t)$. To sa samozrejme dá, no vyžaduje to pomerne drsnú matematiku – na konci tohto riešenia to je spravené, ale odporúčame čítať len na vlastnú zodpovednosť.

Zvolíme preto iný prístup. Ako nám aj zadanie radí, máme použiť nejaký výpočtový softvér, tak to aj spravme. Aby sme to počítaču vedeli nejako dať, potrebujeme počítať iba konečne veľa operácií, a tak si musíme diskretizovať čas⁸. Predpokladajme teda, že sa v čase hýbeme s časovým krokom Δt . Na začiatok nastavme $x(0) = 0$ (začínáme vo výške 0), $v(0) = 0$ (na začiatku sa teleso nehýbe). Zrýchlenie $a(0)$ vypočítame z rovnice 3.5.1, na začiatku to bude $a(0) = -g$.

Teraz ešte potrebujeme induktívne popísať, ako z polohy, rýchlosti a zrýchlenia v čase t prejdeme k týmto veličinám v čase $t + \Delta t$. Predpokladajme, že v tomto čase sa pohybujeme rovnomerne zrýchlene so zrýchlením $a(t)$. Takže nová rýchlosť bude $v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t$. Zároveň je teda priemerná rýchlosť na tomto časovom úseku $\frac{v(t+\Delta t)+v(t)}{2}$, takže poloha sa zmení na $x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{v(t+\Delta t)+v(t)}{2}\Delta t$. Súčasne vieme z novej rýchlosti spočítať aj zrýchlenie do ďalšieho kroku. To spravíme z rovnice 3.5.1, odkiaľ vyjde $a(t + \Delta t) = -g + kv(t + \Delta t)^2$. Dokopy v každom kroku o Δt postupne spočítame nasledovné tri hodnoty:

$$\begin{aligned}v(t + \Delta t) &= v(t) + a(t)\Delta t, \\x(t + \Delta t) &= x(t) + \frac{v(t + \Delta t) + v(t)}{2}\Delta t, \\a(t + \Delta t) &= -g + kv(t + \Delta t)^2.\end{aligned}$$

Týmto nakrmíme náš oblúbený výpočtový softvér a spravíme dostatočne veľa takýchto krokov, aby sme dostali také veľké $x(t)$, ako chceme. Výsledkom bude celkom slušná aproximácia funkcie⁹ $x(t)$.

My sme počítali v Exceli s hodnotami¹⁰ $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $C = 0,47$, $r = 0,01 \text{ m}$, $\rho_{\text{vzduch}} = 1,225 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{žula}} = 2700 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{železo}} = 7874 \text{ kg/m}^3$. Pre obe telesá sme spravili 1000 krokov s časovým krokom $\Delta t = 0,01 \text{ s}$. Pre predstavu, v porovnaní s presnými hodnotami získanými z analytického riešenia na konci je relatívna chyba takejto simulácie stále výrazne menšia ako 0,1 % (pričom väčšia je pre žulový kamienok), čiže naša simulácia je naozaj veľmi presná.

⁶Napríklad pri stometrovej studni to robí rozdiel približne 0,3 s, čo vie výrazne ovplyvniť člen t^2 vo vzťahu $\frac{1}{2}gt^2$.

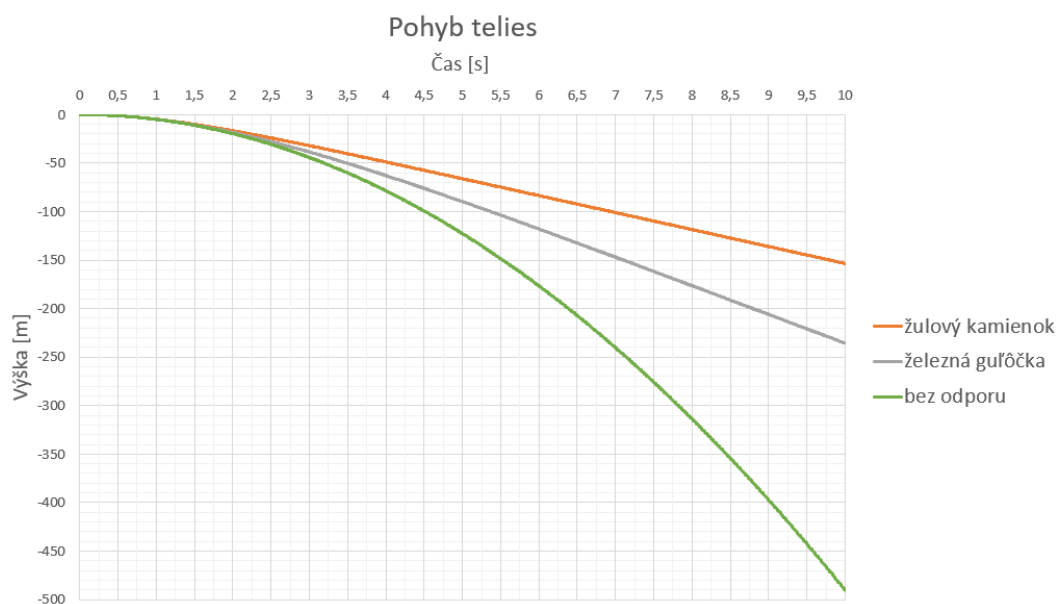
⁷Alternatívne môžeme predpokladať, že rýchlosť zvuku je veľmi veľká.

⁸T. j. rozdeliť čas na konečne veľa krokov.

⁹Máme ju síce definovanú v konkrétnych bodoch, medzi nimi ju však môžeme dodefinovať lineárne a dostaneme stále dobrú presnosť.

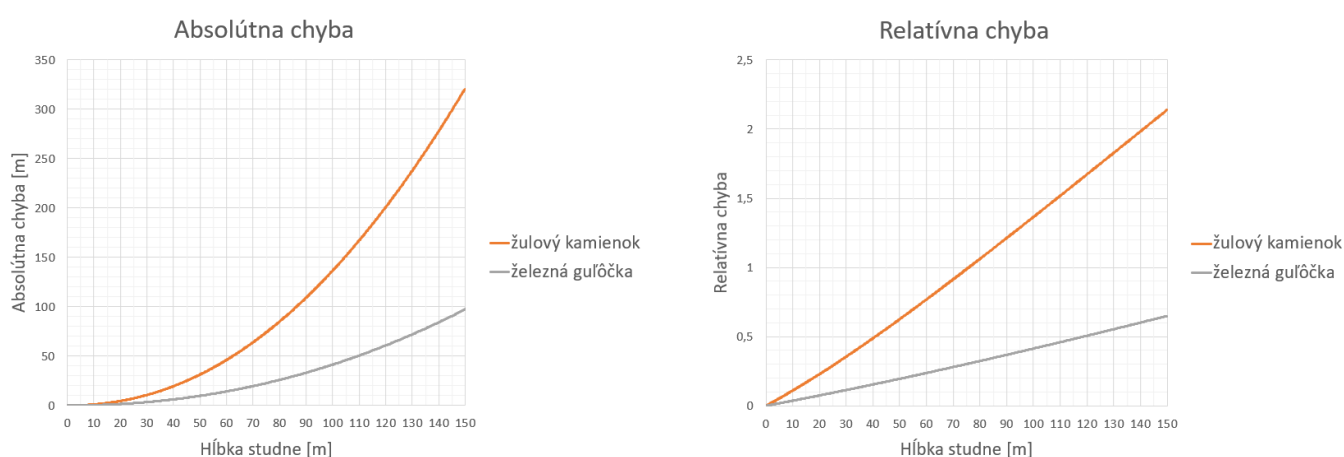
¹⁰Hodnoty sme brali z týchto zdrojov: koeficient aerodynamického odporu C , hustota vzduchu ρ_{vzduch} pri teplote 15°C , hustota žuly $\rho_{\text{žula}}$ a hustota železa $\rho_{\text{železo}}$.

Pohyby oboch telies možno vidieť na grafe 3.5.1. Pre porovnanie je v grafe vykreslený aj pohyb bez odporu vzduchu¹¹.



Obrázok 3.5.1: Pohyby telies

Zadanie od nás chce niečo v podstate opačné – aby sme určili chybu Zuzky a Matúša v závislosti od x . Keďže máme rozumne spočítané $x(t)$ len pre nejaké konkrétne hodnoty t , tak pre tieto hodnoty t spočítajme, akú hĺbku studne $h(x)$ dostanú Zuzka resp. Matúš. Spočítajme absolútnu chybu $|h(x) - x|$, aj relatívnu chybu $\left| \frac{h(x) - x}{x} \right|$ a vykreslime ich do grafu.



Obrázok 3.5.2: Chyby

¹¹Všimni si, že pohyb telies na začiatku dosť dobre kopíruje pohyb bez odporu vzduchu (to je očakávané, keďže rýchlosť je malá). Neskôr sa však rýchlosť približuje maximálnej možnej (terminálnej), a tak pohyb prechádza do rovnomerného priamočiareho, ktorého grafom je priamka.

Vidíme, že pre hlbšie studne je chyba oboch už fakt veľká. Napríklad pre osemdesiatmetrovú studňu na Trenčianskom hrade by Zuzka spočítala hĺbku približne 165 m s relatívnou chybou 106 %. Matúš by bol presnejší, lebo by spočítal hĺbku približne 106 m, ale stále je to 32-percentná chyba.

Ponaučenie teda je, že ak by ste to chceli vyskúšať aj vy, tak si vyberte nie až tak hlbokú studňu, alebo použite dostatočne hustú guľôčku. Ale ak ste túto úlohu riešili, tak načo by ste to robili ako Zuzka s Matúšom – už totiž máte k dispozícii presnú simuláciu, ktorá vám povie, aká hlboká studňa je¹².

Analytické riešenie

Pre záujemcov, ktorí vedia kopu drsnej matiky ešte uvádzame, ako z rovnice 3.5.1 vieme vyjadriť polohu guľôčky $x(t)$. Budeme pri tom však musieť vyriešiť túto diferenciálnu rovnicu. Preto si ju zapíšme pomocou derivácií $x(t)$. Dostaneme

$$\ddot{x}(t) = -g + k\dot{x}(t)^2.$$

Toto je síce diferenciálna rovnica druhého rádu pre $x(t)$, ale ono samo tam nevystupuje (iba jeho derivácie). To využijeme a vnímajme túto rovnicu ako diferenciálnu rovnicu prvého rádu pre $v(t) = \dot{x}(t)$:

$$\dot{v}(t) = -g + kv(t)^2.$$

Túto rovnicu riešime klasicky separáciou premenných, pričom integrál, ktorý pri tom potrebujeme spočítať, vieme spočítať napríklad cez parciálne zlomky¹³

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= -g + kv(t)^2, \\ \int \frac{dv(t)}{kv(t)^2 - g} &= \int dt, \\ \frac{1}{2\sqrt{kg}} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{k}{g}}v(t)}{1 + \sqrt{\frac{k}{g}}v(t)} \right| &= t + c_1. \end{aligned}$$

Konštantu c_1 rovno určíme z počiatočnej podmienky $v(0) = 0$. Dostaneme $c_1 = 0$. Po zopár úpravách vieme tento vzťah upraviť na

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \frac{1 - e^{2\sqrt{kg}t}}{1 + e^{2\sqrt{kg}t}}.$$

Už nám stačí len toto zintegrovať a dostaneme $x(t)$. Substitúciou $u = e^{2\sqrt{kg}t}$, následnými parciálnymi zlomkami, použitím počiatočnej podmienky $x(0) = 0$ a dostatočným mlátením dostávame

$$x(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \frac{1 - e^{2\sqrt{kg}s}}{1 + e^{2\sqrt{kg}s}} ds = \frac{1}{2k} \ln \left(1 - \left(\frac{1 - e^{2\sqrt{kg}t}}{1 + e^{2\sqrt{kg}t}} \right)^2 \right).$$

¹²Za predpokladu, že zvládnete odmerať parametre vašej guľôčky skôr, ako ju nenávratne hodíte do studne.

¹³Pri separácii premenných si vždy treba dávať pozor na to, či delením nedostaneme nulu. V našom prípade ju nedostaneme, lebo menovateľ by sa vynuloval práve vtedy, keď by guľôčka dosiahla terminálnu rýchlosť $v = \sqrt{g/k}$. Fyzikálne však vieme, že ju nedosiahne. Drobný problém ale nastane tým, že pri parciálnych zlomkoch začneme deliť k , ktoré je nulové v zjednodušenej situácii bez odporu vzduchu. Na konci aspoň čiastočne zdôvodníme, že to je v poriadku.

alebo ak poznáme všakovaké vzorčeky pre goniometrické funkcie, tak v argumente logaritmu spoznáme $\cosh(\sqrt{kgt})^{-2}$, čím dostaneme

$$x(t) = -\frac{1}{k} \ln(\cosh(\sqrt{kgt})).$$

a hoci to tak na prvý pohľad nevyzerá, v limite $k \rightarrow 0$ skutočne dostávame očakávané $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2$. Prítomnosť k v menovateli nám tak nevádi.

Komentár k riešeniam

Viacerí z vás použili na vyriešenie rovnice 3.5.1 Eulerovu metódu, čiže ste počítali¹⁴

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t,$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t,$$

$$a(t + \Delta t) = -g + kv(t + \Delta t)^2.$$

Ak by som bol numerický matematik, tak by som bol spokojný. Takýmto spôsobom sa totiž (vrámci nejakej rozumne malej chyby) skutočne dopracujeme k riešeniu. Takéto riešenie však využíva istú dávku šťastia v tom, že rýchlosť sa po istom čase zastabilizuje na nejakej hodnote (terminálnej rýchlosti)¹⁵. To spôsobí, že chyba takejto metódy nebude nejako extra veľká. Avšak, chyba tejto metódy sa prejaví hneď na začiatku. Po prvej iterácii totiž máme $x(\Delta t) = x(0) + v(0)\Delta t = 0$. To v konečnom dôsledku spôsobí, že po prvej iterácii je relatívna chyba 100 %, čo je fakt veľa. Vzťahy z uvedeného riešenia riešia tento problém¹⁶, keďže na každom časovom úseku Δt poctivo počítajú rovnomerne zrýchlený pohyb.

3.6 Pimp my ride

vzorák Jaro, opravovala KatkaM

Namiesto toho, aby sme sa hneď pustili do bezhlavého počítania, zamyslime sa najskôr nad tým, čo všetko potrebujeme počítať a čo máme očakávať.

Na prvý pohľad sa môže zdať, že máme riešiť tri úlohy. To však nie je pravda. V skutočnosti riešime len jednu úlohu v troch rôznych vzťažných sústavách. No a keďže je to tá istá úloha, vo všetkých troch častiach máme očakávať rovnaké výsledky. Predsa to, aké preťaženie cestujúci cíti, nemôže závisieť od toho, kto sa naňho pozerá. Ak cestujúci v dôsledku nadmerného preťaženia hodil šablú, tak to bude vidieť každý bez ohľadu na vzťažnú sústavu, z ktorej sa pozerá. Preto aj preťaženie pocítené cestujúcim počítané v rôznych vzťažných sústavách musí byť rovnaké. Preto ak ste v jednotlivých častiach tejto úlohy odovzdali rôzne výsledky, zrejme ste sa poriadne nad úlohou nezamysleli.

Takže už vieme, že máme vypočítať jedno preťaženie tromi rôznymi spôsobmi. Lenže čo to vlastne to preťaženie je? Mohli by sme povedať, že je to to, čo cítime, keď na nás pôsobia vonkajšie sily. A nech je táto definícia akokoľvek presná, nepovie nám veľa o tom, čo máme počítať. Tak to skúsme inak. Preťaženie je zrýchlenie nášho tela v dôsledku kontaktných síl vyjadrené v násobkoch tiažového zrýchlenia. Dobré, toto

¹⁴Rozdiel je iba v spôsobe počítania $x(t + \Delta t)$.

¹⁵Keby vzťah pre zrýchlenie bol taký, že by teleso rozbíhal na prakticky neobmedzenú rýchlosť, tak by sme dostali výrazne horší výsledok.

¹⁶Napríklad po prvej iterácii oprávnenne dostaneme chybu presne rovnú 0. Na tomto časovom úseku Δt totiž v oboch prípadoch počítame s rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením g . Takže to nesmie dopadnúť rôzne.

je už niečo, s čím sa dá pracovať. Čo je zrýchlenie, vieme; čo je tiažové zrýchlenie, vieme; ale čo sú kontaktné sily?

Vo všeobecnosti možno sily rozdeliť na dva typy – povrchové (kontaktné) a objemové. Objemové sily sú také, ktoré pôsobia na každý kúsok daného telesa. Príkladom je napríklad gravitácia alebo neinerciálne sily. Gravitácia priťahuje každý kúsok telesa nejakou malou silou a výsledná sila je súčtom týchto malých síl, ktorými sú priťahované jednotlivé kúsky telesa. Podobne napríklad odstredivá sila či iné neinerciálne sily pôsobia na každý kúsok telesa a výsledná sila je súčtom príspevkov od jednotlivých kusov. Súčet týchto príspevkov má rovnaký pohybový účinok na teleso, ako keby celá objemová sila pôsobila v jeho ťažisku, preto ich zakresľujeme práve do ťažiska. Na druhej strane, povrchové (kontaktné) sily sú také, ktoré, ako už názov napovedá, sa prenášajú kontaktným silovým pôsobením cez povrch telesa. Keď položíme teleso na stôl, tak cezeň neprepadne nadol, pretože stôl naň pôsobí silou smerom nahor. Táto sila nepôsobí v ťažisku, ale v mieste kontaktu. Iným príkladom kontaktných síl je napríklad trenie.

V súlade s našou definíciou, ak si teleso hovie na stole, pociťuje preťaženie 1 g. Ale nie je to kvôli tiažovej sile. Teleso je na stole v pokoji, preto ak naň pôsobí tiažová sila mg nadol, pôsobí stôl rovnako veľkou silou nahor. Tiažová sila je objemovou silou, preto podľa našej definície nespôsobuje preťaženie. Sila od stola je však kontaktnou silou, preto spôsobuje preťaženie $\frac{mg}{m} = 1$ g smerom nahor.

Niektó by sa mohol pýtať, že prečo uvažujem len kontaktné sily a ignorujem objemové. Zrejme nikto nebude namietat, keď priradím nulové preťaženie takej situácii, keď na mňa nepôsobia žiadne sily – napríklad keď sa vznášam v prázdnom vesmíre. No teraz si predstavte, že môj vesmír nie je úplne prázdny, ale nachádza sa v ňom čierna diera. Čierna diera nevyžaruje ani neodráža svetlo, takže ju nemôžem vidieť. Pôsobí na mňa však gravitačne, takže ja sa pohybujem rovnomerne zrýchleným pohybom¹⁷. Lenže keďže v prázdnom vesmíre nič nevidím, ani sa ničoho nedotýkam, tak neviem, že zrýchľujem. Pre mňa je to pocitovo rovnaká situácia, ako keby vesmír bol úplne prázdny¹⁸. Iná situácia – ak sa ocitnem v padajúcom výťahu, tak môžem cítiť strach, no nie preťaženie¹⁹.

Čo to znamená pre nášho cestujúceho v magleve T3000? Pôsobí naňho tiažová (t. j. gravitačná plus odstredivá) sila, ďalej v závislosti od vzťažnej sústavy prípadné neinerciálne sily – no obe tieto sú objemovými silami, preto nespôsobujú preťaženie – a sila od sedačky a bezpečnostného pásu, ktoré držia cestujúceho na jeho mieste. Jediné posledná menovaná sila je kontaktnou silou, preto na určenie preťaženia potrebujeme počítat práve ju²⁰.

Po tomto úvode môžeme pristúpiť k počítaniu. Uvažujme guľatú Zem s hmotnosťou M a polomerom R rotujúcu uhlovou rýchlosťou Ω . Ďalej uvažujme maglev premávajúci po rovnobežke na košírke²¹ θ rýchlosťou $\pm v$ ²² a cestujúceho vo vnútri s hmotnosťou m . Pre cestujúceho možno písať nezávisle na vzťažnej sústave pohybovú rovnicu

$$ma = F, \quad (3.6.1)$$

¹⁷Pokiaľ sa pohybujem na takých vzdialenostiach, že môžem gravitačné pole považovať za homogénne.

¹⁸Rozdiel by som začal pociťovať, keď by som sa dostatočne priblížil k čiernej diere. V blízkosti čiernej diery je obrovský gradient gravitačného poľa, takže časti môjho tela, ktoré by boli bližšie k čiernej diere, by boli priťahované viac než tie, ktoré by boli ďalej, a mňa by to v istom momente roztrhalo.

¹⁹Mierne preťaženie cítiť budem, pretože výťah je spomaľovaný odporom vzduchu, takže padá pomalšie než voľným pádom a ja som stále mierne pritláčaný o podlahu, preto cítim malé, no nenulové preťaženie.

²⁰No a tu opäť vidíme, že sila medzi cestujúcim a sedačkou nemôže závisieť od toho, kto sa pozerá, preto musia vyjsť preťaženia vo všetkých troch častiach rovnako.

²¹Košírka je uhol meraný od pólu k rovnobežke, t. j. doplnok k zemepisnej šírke do 90° .

²²Rýchlosť bude kladná pri pohybe na východ a záporná pri pohybe na západ.

kde $\mathbf{a}$ je zrýchlenie cestujúceho v danej vzťažnej sústave a $\mathbf{F}$ je výsledná sila pôsobiaca na cestujúceho v tejto vzťažnej sústave.

Prvý prípad je najjednoduchší. Nachádzame sa v inerciálnej vzťažnej sústave. Vidíme, že cestujúci vykonáva pohyb po kružnici (rovnobežke) s polomerom $r = R \sin \vartheta$ rýchlosťou $w = \Omega r \pm v$, preto pozorujeme, že má dostredivé zrýchlenie

$$a_d = \frac{w^2}{r} = \frac{(\Omega R \sin \vartheta \pm v)^2}{R \sin \vartheta}. \quad (3.6.2)$$

Na cestujúceho pôsobia len inerciálne sily – gravitačná sila

$$F_g = \kappa \frac{mM}{R^2} \quad (3.6.3)$$

smerom do stredu Zeme a kontaktná sila od sedačky F_k , ktorú si rozdelíme na radiálnu zložku v zmysle cylindrických súradníc, t. j. zložku F_r ležiacu v rovine rovnobežky, a zložku F_z kolmú na túto rovinu, teda rovnobežnú so zemskou osou²³. Uvedené sily a zrýchlenie dosadíme do (3.6.1) a rozpišeme po zložkách:

$$\begin{aligned} m \frac{(\Omega R \sin \vartheta \pm v)^2}{R \sin \vartheta} &= \kappa \frac{mM}{R^2} \sin \vartheta - F_r; \\ 0 &= \kappa \frac{mM}{R^2} \cos \vartheta - F_z. \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Výsledná kontaktná sila bude

$$F_k = \sqrt{F_r^2 + F_z^2} = \left\{ \left[\kappa \frac{mM}{R^2} \sin \vartheta - m \frac{(\Omega R \sin \vartheta \pm v)^2}{R \sin \vartheta} \right]^2 + \left(\kappa \frac{mM}{R^2} \cos \vartheta \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.6.5)$$

V druhom prípade máme pasažiera maglevu v pokoji, teda

$$a = 0. \quad (3.6.6)$$

Okrem gravitačnej sily a kontaktnej sily rovnakých ako v predchádzajúcom prípade naňho ale pôsobí neinerciálna odstredivá sila. Keďže vzťažná sústava rotuje uhlovou rýchlosťou $\omega = \Omega \pm \frac{v}{R \sin \vartheta}$, má odstredivá sila veľkosť

$$F_o = m\omega^2 r = m \left(\Omega \pm \frac{v}{R \sin \vartheta} \right)^2 R \sin \vartheta = m \frac{(\Omega R \sin \vartheta \pm v)^2}{R \sin \vartheta} \quad (3.6.7)$$

a pôsobí v rovine rovnobežky smerom od osi otáčania. Po dosadení príslušných síl a zrýchlenia do (3.6.1) v tomto prípade dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa \frac{mM}{R^2} \sin \vartheta - F_r - m \frac{(\Omega R \sin \vartheta \pm v)^2}{R \sin \vartheta}; \\ 0 &= \kappa \frac{mM}{R^2} \cos \vartheta - F_z. \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

²³Pri riešení tejto úlohy zanedbávame sklon zemskej osi.

Kontaktná sila teda opäť bude

$$F_k = \sqrt{F_r^2 + F_z^2} = \left\{ \left[\kappa \frac{mM}{R^2} \sin \vartheta - m \frac{(\Omega R \sin \vartheta \pm v)^2}{R \sin \vartheta} \right]^2 + \left(\kappa \frac{mM}{R^2} \cos \vartheta \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.6.9)$$

Tretí prípad je najzložitejší. Tentokrát pozorujeme, že pasažier vykonáva pohyb po kružnici s polomerom $r = R \sin \vartheta$ rýchlosťou $\pm v$. Pozorujeme teda, že má dostredivé zrýchlenie

$$a_d = \frac{(\pm v)^2}{r} = \frac{v^2}{R \sin \vartheta}. \quad (3.6.10)$$

Okrem gravitačnej a kontaktnej sily, ktoré sú, samozrejme, rovnaké ako v predchádzajúcich dvoch prípadoch, pôsobí naňho tentokrát odstredivá sila

$$F_o = m\Omega^2 r = m\Omega^2 R \sin \vartheta. \quad (3.6.11)$$

No to nie je všetko. Tým, že sa pasažier pohybuje v rotujúcej vzťažnej sústave rýchlosťou v , pôsobí naňho ešte aj Coriolisova sila, pre ktorú platí

$$F_C = -2m\Omega \times v. \quad (3.6.12)$$

Keďže v prípade pohybu po rovnobežke sú Ω a v na seba kolmé, veľkosť Coriolisovej sily bude jednoducho

$$F_C = \pm 2m\Omega v, \quad (3.6.13)$$

bude kolmá na oba vektory Ω aj v , teda bude mať taktiež radiálny smer v zmysle cylindrických súradníc, a podľa pravidla pravej ruky určíme, že bude smerovať od osi rotácie²⁴, teda rovnako ako odstredivá sila. Teraz už konečne môžeme dosadiť všetky sily a zrýchlenie do (3.6.1) a dostaneme

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{R \sin \vartheta} &= \kappa \frac{mM}{R^2} \sin \vartheta - F_r - m\Omega^2 R \sin \vartheta \mp 2m\Omega v; \\ 0 &= \kappa \frac{mM}{R^2} \cos \vartheta - F_z. \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

Kontaktná sila tento raz teda bude

$$\begin{aligned} F_k &= \sqrt{F_r^2 + F_z^2} = \left[\left(\kappa \frac{mM}{R^2} \sin \vartheta - m\Omega^2 R \sin \vartheta \mp 2m\Omega v - m \frac{v^2}{R \sin \vartheta} \right)^2 + \left(\kappa \frac{mM}{R^2} \cos \vartheta \right)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \left\{ \left[\kappa \frac{mM}{R^2} \sin \vartheta - m \frac{(\Omega R \sin \vartheta \pm v)^2}{R \sin \vartheta} \right]^2 + \left(\kappa \frac{mM}{R^2} \cos \vartheta \right)^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

čo je presne rovnaká sila ako v predchádzajúcich dvoch prípadoch.

Keď už sme si našli veľkosť kontaktnej sily, zostáva nám len dopočítať, pre ktoré zemepisné šírky (košírky) je splnená podmienka

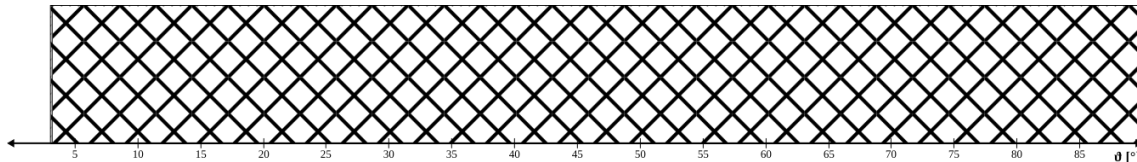
$$\left| \frac{F_k}{m} \right| \leq 1,5 \text{ g}, \quad (3.6.15)$$

²⁴Pre rýchlosť $+v$, pre rýchlosť $-v$ opačne.

čiže

$$\left[\kappa \frac{M}{R^2} \sin \vartheta - \frac{(\Omega R \sin \vartheta \pm v)^2}{R \sin \vartheta} \right]^2 + \left(\kappa \frac{M}{R^2} \cos \vartheta \right)^2 \leq 2,25 g^2. \quad (3.6.16)$$

Kedže riešiť túto rovnicu pre neznámy uhol ϑ analyticky by bola výzva aj pre Chucka Norrisa, na pomoc si zoberieme počítač a budeme ju riešiť numericky/graficky. Na grafe je vyšrafovaná oblasť, kde je nerovnica splnená, pričom „/“ šrafovanie zodpovedá pohybu na východ (t. j. rýchlosti $+v$) a šrafovanie „\“ pohybu na západ (t. j. rýchlosti $-v$). Limitná košírka je pre prvý prípad $3,207^\circ$ a pre druhý prípad $3,056^\circ$, čo zodpovedá vzdialenosti od pólu po povrchu Zeme 356,6 km, resp. 339,8 km.



Obrázok 3.6.1: Komfortná zóna pre jazdu maglevom T3000

3.7 Super Max

vzorák **Tomáš**, opravoval **Tomáš**

Hm, v najbližšej dobe možno opäť bude zaujímavé sa pýtať, kto vyhrá, ale zadanie úlohy je, aké je. Čo sa dialo na trati je, že Max sa od Landa vzdaloval, a preto pri každom ďalšom tiku jeho hodín bol od Landa ďalej ako pri predchádzajúcom tiku. Okrem toho, v Landovej sústave tikajú Maxove hodiny pomalšie, ako hodiny od sponzora, ktoré má Lando na svojej ruke. Možno to je tým, že je plný adrenalínu, ale v tomto vzoráku predpokladajme, že za to môže dilatácia času. Akiste ste teda pochopili, že táto úloha si vyžaduje používať špeciálnu teóriu relativity, ktorá je založená na tom, že Max aj Lando a akýkoľvek iný inerciálny pozorovateľ vidia svetlo šíriť sa rýchlosťou c .

Posaďme sa teda k Landovi do formuly, alebo inakšie povedané, nachádzajme sa v inerciálnej vzťažnej sústave spojennej s Landom. V nej sa od neho Max vzdaluje rýchlosťou v . Fotóny nesúce informáciu o tiku hodín sa šíria rýchlosťou c a v Landovej sústave trvá tik Maxových τ . Najprv nastane prvý tik. Potom, v čase druhého tiku o τ neskôr, fotóny prvého tiku prešli dráhu $c\tau$ smerom k Landovi a Max prešiel dráhu $v\tau$ smerom od Landa. Fotóny druhého tiku sú teda vzdialené o $(c + v)\tau$ od fotónov prvého tiku. Túto dráhu prejdú fotóny za čas

$$\Delta t = \frac{(c + v)\tau}{c} = \left(1 + \frac{v}{c}\right)\tau, \quad (3.7.1)$$

čo je čas, ktorý uplynie medzi príchodom prvých a druhých fotónov k Landovi. Týmto sme vybavili to, že Max sa od Landa vzdaluje.

Ale τ je dĺžka tiku Maxových hodín v Landovej sústave. Vypočítame ju ako

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (3.7.2)$$

kde τ_0 je dĺžka tiku Maxových hodín, ktorú vidí Max. Týmto už máme vybavenú aj dilatáciu času.

Dosadením rovnice 3.7.2 do rovnice 3.7.1 dostaneme

$$\Delta t = \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tau_0.$$

Zo zadania vieme, že $\Delta t = 2$ s a bežné hodiny tikajú s periódou $\tau_0 = 1$ s, čiže

$$2 = \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Po jednoduchej úprave dostávame kvadratickú rovnicu

$$5v^2 + 2cv - 3c^2 = 0,$$

ktorej riešením²⁵ je

$$v = \frac{3}{5}c,$$

čo je rýchlosť, ktorou sa Max vzdáva od Landa.

3.8 Čas polpeny

vzorák -, opravoval Marek

²⁵Druhé riešenie tejto kvadratickej rovnice je $v = -c$, ale potom by sme v rovnici 3.7.2 mali nulu v menovateli, čo nie je moc dobrý nápad.