

Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Bagstreet Boys

vzorák MatusH, opravoval MatusH

Najskôr sa pozrime, aké veličiny by sme vedeli v dave definovať. Očividná je rýchlosť, ktorú si vieme definovať ako nejakú priemernú rýchlosť, ktorou sa hýbu ľudia v dave na danom mieste. Okrem toho aj hustota, ktorá popisuje, koľko ľudí sa nachádza na jednotke plochy. Tieto dve veličiny sú definované úplne rovnakým spôsobom, ako sú definované v tekutine.

Zaujímavejšie je to s tlakom. V tekutine tlak súvisí so zrážkami častíc, ktoré tekutinu tvoria, respektíve ich narážanie do stien nádoby. Ľudia sú ale rozumnejší, a preto dobrovoľne nenarážajú do seba. Ak je dav naozaj hustý, ľudia do seba začnú aj narážať, lebo medzi sebou nemajú miesto. Preto by ale takáto definícia tlaku nebola analogická s definíciou tlaku v tekutinách, lebo tlak by bol nenulový až pri veľkej hustote a vo všeobecnosti by závisel od hustoty.

Definícia teploty má podobný problém, lebo teplota, nie len pri tekutinách ale všeobecne látkach, popisuje mieru pohybu jednotlivých častíc, ktoré tvoria látku. Pri veľkej teplote majú preto vo všeobecnosti tieto častice väčšiu veľkosť rýchlosti náhodného pohybu. To pri ľuďoch moc nefunguje. Pri troche fantázie by sme možno vedeli prepojiť nervozitu davu s teplotou, no týmto smerom sa nebudeme uberať.

Pozrime sa teraz na to, ako sa dav správa pri prechode cez priechod. Keď je človek na priechode, tak mu už nič nebráni prejsť na ďalšiu stranu, nakoľko všetci ľudia na priechode majú rovnaký cieľ.¹ Zaujímavé to bude pred priechodom. K priechodu vedú ľudia v dave prísť z hocikakého smeru. Všetci títo ľudia sa následne musia dostať cez priechod, no priechod je úzky oproti priestranstvu pred prechodom, a teda cez priechod vie prejsť za jednotku času menej ľudí ako k nemu prísť. To bude znamenať, že pred priechodom sa ľudia začnú hromadiť a postupne bude vznikať niečo, čo by sa dalo nazvať zápchou. Ľudia v zápche sa budú pohybovať pomalšie, tak aby počet ľudí, ktorý k priechodu príde, a ktorý cezeň prejde, bol rovnaký. Rovnaký efekt nastane napríklad na ceste, kde je zúženie.

Pri slove zúženie sa priam ponúka porovnanie s Bernoulliho rovnicou, ktorú poznáme z hydrodynamiky a má tvar

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konst.},$$

kde p je tlak, ρ je hustota a v je rýchlosť. Hydrodynamika študuje správanie nestlačiteľných kvapalín, a teda v tejto rovnici je hustota konštantná. Ak sa na ňu pozrieme, tiež opisuje podobné správanie ako sme my opísali v dave. Tam, kde je rýchlosť menšia, sa tlak zväčší a naopak. Rozdiel oproti dave je však ten, že dav je stlačiteľný, a preto rovnica z hydrodynamiky určite nemôže platiť. Dav sa preto skôr podobá na plyn. Aj pre stlačiteľné tekutiny však platí obdobná Bernoulliho rovnica, no má iný tvar.

Podme sa teraz pozrieť na druhý pohyb davu. Ak je dav na veľkom priestranstve, ľudia sa rozchádzajú do náhodných smerov. Pre jednoduchosť uvažujme, že po skončení protestu všetci ľudia zamieria smerom presne od miesta konania protestu. Keď sa teda pozrieme z miesta konania protestu a vyberieme si nejakú

¹Uvažujeme, že dav je na jednej strane a snaží sa prejsť na druhú.

vzdialenosť r_1 , tak v nejakom čase je v tej vzdialenosti n ľudí na kružnici s polomerom $2\pi r_1$. Títo ľudia sa hýbu rovnakou rýchlosťou od miesta konania, takže ak sa pozrieme po nejakom čase na tých istých ľudí a uvidíme ich v dvojnásobnej vzdialenosti, budú na kružnici s polomerom $2 \cdot 2\pi r_1$, a teda budú mať dvojnásobne menšiu hustotu. Vidíme, že takýto pohyb ľudí bude mať hustotu závislú ako $1/r$.

Podme sa ešte pozrieť, či takéto prúdenie davu spĺňa Patrikovu podmienku pre oblasť. Ak sa znova pozrieme z miesta konania nejakým konkrétnym smerom, vidíme od nás ísť prúd ľudí v tom smere nejakou rýchlosťou. Ak si teraz niekde vytýčime oblasť, tak tá je pretínaná takýmito prúdmi smerujúcimi z miesta konania. Každý takýto prúd našu oblasť však pretne presne dvakrát (respektíve párny počet krát) pričom predpokladáme, že miesto konania protestu neleží v našej oblasti. Tým, že každý prúd pretne oblasť práve párny počet krát vidíme, že všetky prúdy ľudí, ktoré do oblasti vstúpia, z nej zároveň aj vystúpia, a teda celkový počet ľudí v oblasti ostáva rovnaký.

Táto posledná úvaha s oblasťami pripomína niečo, čomu sa hovorí rovnica kontinuity a pre prúdenie kvapaliny v trubici má tvar

$$Sv = \text{konšt.},$$

kde S je obsah prierezu trubice. Táto rovnica hovorí, že objem kvapaliny, ktorý prejde za jednotku času trubicou, je vo všetkých miestach trubice rovnaký. V našom prípade je celé prúdenie len v dvoch rozmeroch, takže ekvivalent S je krivka kolmá na smer prúdu, čiže kružnica. Ďalší rozdiel je, že v hydrodynamike je hustota konštantá, no v našom prípade nie je, takže aby sme zistili, koľko ľudí prejde nejakým miestom za jednotku času, musíme to vynásobiť ešte koncentráciou ľudí v danom mieste. Tým dostávame opravenú rovnicu

$$V\ell\rho = \text{konšt.},$$

kde ℓ je dĺžka krivky. Ako sme spomenuli, táto krivka je kolmá na prúd, takže to je kružnica, alebo ak sa obmedzíme na uhlový výsek, tak časť kružnice, ktorej dĺžka rastie lineárne s r , no ρ zase klesá ako $1/r$, takže dohromady dajú konštantu.

Na základe týchto úvah teda dav má isté podobnosti s kvapalinami, no jeho stlačiteľnosťou je oveľa podobnejší plynom.

2.2 Hladká jazda

vzorák Martin, opravoval Péder

Lanovky nám okrem vodorovného presunu výrazne pomáhajú prekonávať výškové rozdiely. Energia dodaná pasažierom teda bude potenciálna gravitačná energia. V našom prípade sa nachádzame blízko povrchu Zeme a výškový rozdiel nie je výrazný, takže ju môžeme vypočítať ako

$$E_p = mgh,$$

kde m je hmotnosť pasažierov a h prevýšenie.

Lanovky na pohon využívajú elektrickú energiu. Za predpokladu, že výkon je konštantný, môžeme vypočítať prácu vykonanú lanovkou ako

$$W = Pt,$$

kde P je výkon lanovky a t čas jazdy.

Účinnosť η je podiel energie dodanej cestujúcim, ktorá je v našom prípade rovná potenciálnej gravitačnej energii dodanej cestujúcim, k celkovej investovanej energii, ktorá je v našom prípade rovná elektrickej energii

spotrebovanej lanovkou krát 100 %. V našom prípade teda účinnosť vypočítame ako

$$\eta = \frac{mgh}{Pt} \cdot 100 \, \%.$$

Za konkrétny príklad si môžeme zobrať napríklad Visutú lanovku Skalnaté pleso - Lomnický štít. Podľa [zdroja](#) má lanovka prepravnú kapacitu 16 osôb (čo za predpokladu, že človek váži v priemere okolo 70 kg, bude spolu približne 1120 kg), prevýšenie 868 m, má pohon s výkonom 132 kW a čas jazdy je 528 s. Po dosadení konkrétnych údajov nám pre lanovku vyjde účinnosť 13,98 %.

2.3 Deficit defektov

vzorák MatusH, opravoval MatusH

Najskôr sa zamyslime, čo sa fyzikálne deje pri brzdení. Na to, aby auto zmenilo svoju rýchlosť, musí naň pôsobiť nejaká sila. Gravitačná to v tomto prípade nemôže byť, lebo to by auto muselo zrýchľovať v smere do zeme, no v tom mu bráni samotná zem. Okrem toho, na auto pôsobí aerodynamická odporová sila, valivý odpor a statické, respektíve dynamické trenie od cesty. Aerodynamická odporová sila a valivý odpor sú pri brzdení zanedbateľné oproti treniu (tento fakt odporúčame overiť výpočtom). Rozhodujúce je preto trenie.

Zamyslime sa, či pri brzdení hrá úlohu statické alebo dynamické trenie. Statické trenie, ako vieme, je väčšie a dochádza k nemu v momente, ak sa dve telesá voči sebe nehýbu. Na to, aby sa tieto telesá začali navzájom hýbať, je treba pôsobiť silou, ktorá toto trenie prekoná. K dynamickému treniu dochádza naopak vtedy, ak sú dve telesá už vo vzájomnom pohybe. Keď auto brzdí, využíva pri tom statické trenie, lebo to je väčšie. Dokonca majú autá aj systém ABS, ktorý zabezpečuje, aby nedošlo k šmyku, kedy sa prejde zo statického trenia na dynamické. Ako ale dochádza k statickému treniu, keď sa auto očividne hýbe voči ceste? Auto sa síce hýbe a s ním aj stred kolesa, no koleso sa točí tak, aby bod, ktorý je práve v kontakte s cestou bol nehybný, a tak sa mohlo využívať statické trenie.

Podme odhadnúť, koľko trvá normálnemu autu, kým zastaví na asfaltovej ceste. Pri brzdení pôsobí na auto trecia sila, ktorá mu odoberá energiu. Okrem kinetickej energie je energia uložená aj v rotačnej energii kolies. Auto zastaví vtedy, keď príde o všetku túto energiu. Tú mu zoberie práca, ktorá je konaná statickým trením, takže môžeme písať

$$F_t s = m g f s = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (2.3.1)$$

kde F_t je trecia sila, ktorá je rovná kolmej prítlačnej sile vynásobenej koeficientom trenia, s je dráha, ktorú prejde auto pri brzdení, v je rýchlosť auta v momente, keď začne brzdiť, I je moment zotrvačnosti kolies a ω je uhlová rýchlosť, ktorou sa kolesá točia. Kolesá môžeme aproximovať ako plné valce. Moment zotrvačnosti valca vypočítame ako $I = m_k r^2 / 2$, kde m_k je hmotnosť kolesa a r je jeho polomer. Uhlovú rýchlosť kolesa si vieme vyjadriť z toho, že body na jeho okraji musia mať vzhľadom na jeho stred rýchlosť v (keďže bod dotyku sa nehýbe vzhľadom na cestu). Uhlová rýchlosť je teda $\omega = v / r$.

Teraz nám ostáva už len odhadnúť veličiny. Auto váži približne $m = 1 \, \text{t}$. Ak si pozrieme ponuku diskov a pneumatík, zistíme, že dohromady jedno koleso váži približne 30 kg, hmotnosť všetkých kolies dohromady je preto približne $m_k = 120 \, \text{kg}$. Polomer kolesa môžeme odhadnúť na $r = 0,3 \, \text{m}$. Koeficient trenia medzi asfaltom a gumou je približne 0,5. Už nám len stačí vyjadriť si brzdnú dráhu predelením rovnice 2.3.1 súčinom $m g f$, čím dostaneme

$$s = \frac{v^2}{2 g f} + \frac{v^2}{4 g f} \frac{m_k}{m}.$$

Môžeme si všimnúť, že pre klasický prípad je pomer hmotností kolies a auta asi 1/10. Tým dostávame brzdnú dráhu v meste pri rýchlosti 50 km/h približne 20 m. Pre rýchlosť 130 km/h na diaľnici dostávame brzdnú dráhu približne 138 m.

Podme sa pozrieť, ako sa to zmení, ak by sme mali oceľové kolesá a oceľové cesty. V prvom rade by sa zmenil koeficient statického trenia, ktorý je medzi oceľou a oceľou 0,4 (čo ale nie je významná zmena). Taktiež by sa ale zmenila hmotnosť kolies. Ak uvažíme, že oceľové kolesá by boli valce s rovnakým polomerom ako majú normálne kolesá a šírkou 10 cm, znamenalo by to, že jedno koleso by vážilo okolo 220 kg. To znamená, že pomer hmotností by bol okolo jednej polovice.² Tým dostávame brzdnú dráhu v meste približne 30 m a na diaľnici 204 m.

2.4 FKSák vo vlaku

vzorák Matko, opravoval Matko

V prvom rade sa pozrime na to, ako vyzerá profil trate. Sklon 10 ‰ znamená, že 1000 m horizontálnej dĺžky vystúpa o 10 m, rovnako 20 ‰ klesanie znamená –20 m na 1 km. Označme si dĺžku, na ktorej vlak stúpa ako L , celá trať má 6 km. Vieme, že vlak musí nastúpať rovnako veľa ako potom klesne, takže

$$L \cdot 10 \text{ m} = (6 \text{ km} - L) \cdot 20 \text{ m},$$

$$\Rightarrow L = 4 \text{ km}$$

Na dráhe 4 km vlak nastúpa $4 \cdot 10 \text{ m} = 40 \text{ m}$.

Skôr než sa pustíme do riešenia, spravíme zopár aproximácií. Uvažujeme, že výška³ a šírka vlaku neovplyvnia trajektóriu, a preto berieme vlak ako úsečku dlhú 500 m. Zároveň uvažujeme, že vlak je dokonale ohybný, teda nemá vagóny, ktoré by nedovoľovali ohyb. V úlohe celý čas pracujeme s veľmi malými sklonmi ($< 5^\circ$), a preto spravíme aproximáciu $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$ a $\tan x \approx x$ pre x v radiánoch. Schválne! Hodte si to do kalkulačky a zistíte, o koľko sa približná hodnota líši od tej skutočnej! Toto nám veľmi pomôže, lebo x -ovú súradnicu vlaku v kopci nemusíme uvažovať ako $\cos \alpha \cdot x$ ale iba x ⁴.

Teraz sa už pozrime na trajektóriu ťažiska vlaku. Čaro tejto úlohy spočíva práve v tom, ako sa bude správať ťažisko, keď vlak bude prechádzať cez vrchol kopca alebo bude na úpäť. Ak totiž vlak bude ležať na jednej priamke, tak ťažisko je, samozrejme, uprostred vlaku. Predstavme si ale situáciu, keď nastáva nejaký zlom. Časť vlaku už prešla vrcholom kopca a časť ešte nie. Kde bude ťažisko? Intuitívne niekde pod vrcholom.

Spočítať, kde presne je ťažisko, môžeme pomocou váženého priemeru ťažísk jednotlivých jeho častí. Hmotnosť je priamo úmerná dĺžke, lebo máme homogénny vlak. Označme časť prednú časť 1 a zadnú 2, hmotnosť celého vlaku M , dĺžku vlaku l a dĺžku časti vlaku za zlomom d . Pre hmotnosti platí

$$M_1 = M \frac{d}{l},$$

$$M_2 = M \frac{l - d}{l}.$$

²Musíme si uvedomiť, že s hmotnosťou kolies by sa zvýšila aj hmotnosť celého auta.

³Ak by sme uvažovali výšku vlaku, tak sa nám trajektória iba všade posunie o pol výšky vlaku smerom hore, tvar ani dĺžku trajektórie to však nezmení.

⁴Pre ilustráciu, keď celý vlak vyšiel z prvej dediny, skutočná x -ová súradnica predku je 499,975 m a s týmto priblížením to zaokrúhlime na 500 m.

Ťažiská týchto rovných častí ležia presne uprostred. Keď zlom je v bode $[x_0, y_0]$ a sklon kopca za zlomom je α a pred zlomom β , tak jednotlivé ťažiská sú v bodoch

$$T_{1x} = x_0 + \frac{d}{2},$$

$$T_{1y} = y_0 + \frac{d}{2} \sin \alpha \approx y_0 + \frac{d}{2} \alpha,$$

$$T_{2x} = x_0 - \frac{l-d}{2},$$

$$T_{2y} = y_0 - \frac{l-d}{2} \sin \beta \approx y_0 - \frac{l-d}{2} \beta.$$

Vážený priemer, a teda polohu ťažiska $[T_x, T_y]$ spočítame ako

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{M_1 T_{1x} + M_2 T_{2x}}{M}, \\ &= \frac{M \frac{d}{l} (x_0 + \frac{d}{2}) + M \frac{l-d}{l} (x_0 - \frac{l-d}{2})}{M}, \\ &= \frac{d(x_0 + \frac{d}{2}) + (l-d)(x_0 - \frac{l-d}{2})}{l}, \\ &= x_0 + \frac{d^2 - (l-d)^2}{2l} = x_0 + d - \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

Rovnako pre T_y

$$\begin{aligned} T_y &= \frac{M_1 T_{1y} + M_2 T_{2y}}{M}, \\ &= \frac{M \frac{d}{l} (y_0 + \alpha \frac{d}{2}) + M \frac{l-d}{l} (y_0 - \beta \frac{l-d}{2})}{M}, \\ &= \frac{d(y_0 + \alpha \frac{d}{2}) + (l-d)(y_0 - \beta \frac{l-d}{2})}{l}, \\ &= y_0 + \frac{d^2 \alpha - (l-d)^2 \beta}{2l}. \end{aligned}$$

Dostali sme teda vyjadrenie polohy ťažiska v závislosti od d , teda časti ktorá už prešla bod zlomu.

Odteraz budeme všetky dĺžky a súradnice dosádzať v metroch. Na našej trajektórii máme tri zlomové body, konkrétne $[0, 0]$, $[4000, 40]$ a $[6000, 0]$. Pre začiatok vlaku x v intervale $[0, 500]$ je

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \alpha = 0.01, \quad \beta = 0, \quad d = x,$$

čiže

$$T_x = 0 + x - 250 \quad \text{a} \quad T_y = 0 + \frac{0.01x^2}{1000}.$$

Pre začiatok vlaku x v intervale $[500, 4000]$ ide ťažisko vlaku po priamke $y = \alpha x = 0.01x$, aby priamka prechádzala bodmi $[0, 0]$ a $[4000, 40]$.

Pre začiatok vlaku x v intervale $[4000, 4500]$ je

$$x_0 = 4000, \quad y_0 = 40, \quad \alpha = -0.02, \quad \beta = 0.01, \quad d = x - 4000,$$

čiže

$$T_x = x - 250 \quad \text{a} \quad T_y = 40 + \frac{-0.02(x - 4000)^2 - 0.01(500 - (x - 4000))^2}{1000}.$$

Pre začiatok vlaku x v intervale $[4500, 6000]$ ide ťažisko vlaku ide po priamke $y = 120 - 0.02x$, aby priamka prechádzala bodmi $[4000, 40]$ a $[6000, 0]$.

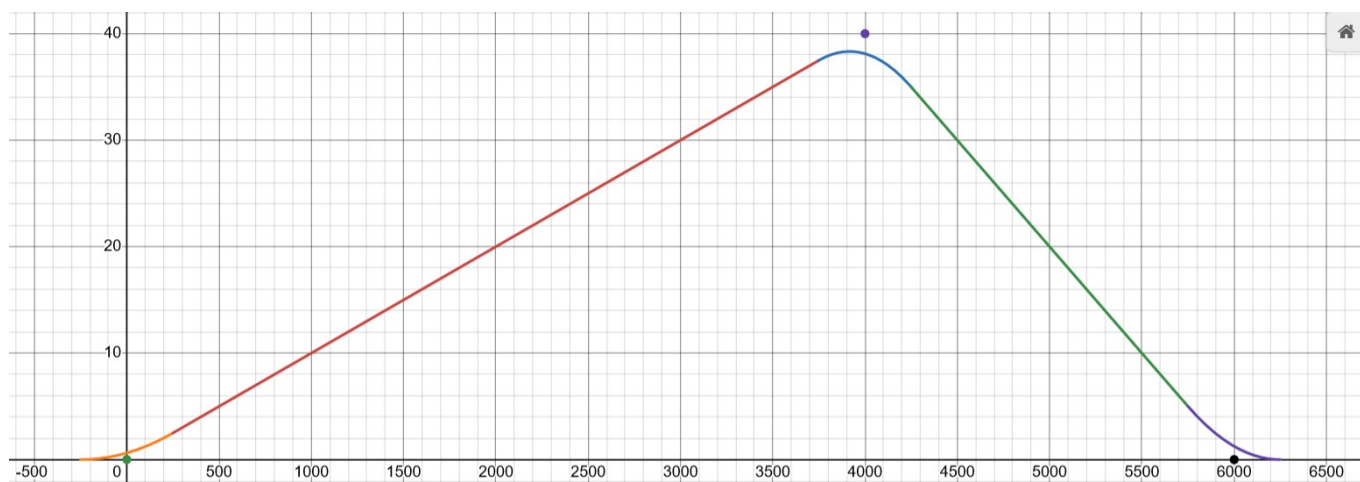
Pre začiatok vlaku v intervale $[6000, 6500]$ je

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = -0.02, \quad d = x - 6000,$$

čiže

$$T_x = x - 250 \quad \text{a} \quad T_y = 0 + \frac{0.02(500 - (x - 6000))^2}{1000}.$$

Trajektória ťažiska je zobrazená na obrázku 2.4.1.



Obrázok 2.4.1: Trajektória ťažiska vlaku

Môžeme si teda všimnúť to čaro, že v zlomových bodoch je trajektória parabolická, teda pekne hladko sa zmení.

2.5 Optimalizácia chodníčkov

vzorák Jaro, opravoval Martin

Ach tie preklepy. Alebo žeby nie?

Zadanie nám hovorí, že Matúš je tak vytrénovaný, že si pri prechode do protiľahlého rohu parčíka zvolí vždy optimálnu trajektóriu – teda takú, po ktorej mu to bude trvať čo najkratšie. Ale presne tak sa správa aj

svetlo. Hovorí o tom Fermatov princíp⁵. Ďalej vieme, že Matúš sa cez parčík pohybuje n -krát pomalšie ako po chodníku po obvode. Parameter n tu teda funguje presne ako index lomu v optike. Úlohu teda možno transformovať na hľadanie lúčov v optike.

Rozoberme si najskôr extrémne prípady:

- Ak je „index lomu“ rovný jednej, tak neexistujú žiadne rozhrania a najrýchlejšia je, pochopiteľne, priama trajektória do protiľahlého rohu parčíka.
- Ak je „index lomu“ dostatočne veľký, teda ak sa Matúš cez parčík pohybuje veľmi pomaly, je pre neho výhodnejšie ísť po jeho obvode.

Niekde medzi tým bude zrejme existovať prípad, že Matúš prejde čiastočne po chodníku a čiastočne si to strihne krížom cez park. Teraz sa budeme podrobnejšie venovať tejto situácii.

Z optiky vieme, že svetlo sa v homogénnom prostredí šíri priamočiario a na optických rozhraniach sa láme, dodržiujúc pritom Snellov zákon

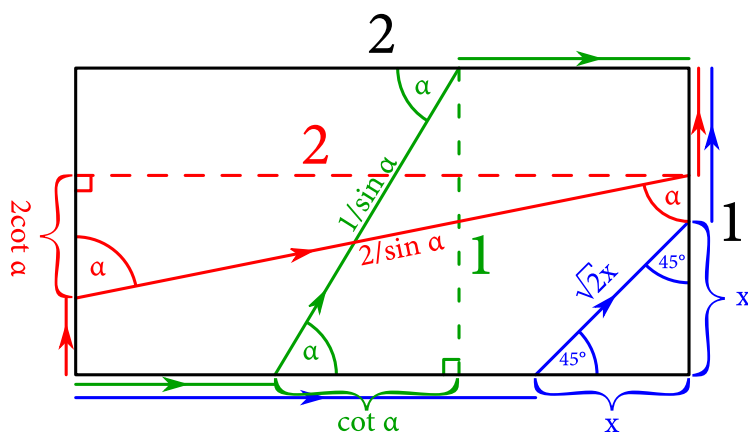
$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (2.5.1)$$

kde α_1, α_2 sú uhly dopadu lúčov voči kolmici na rozhranie. V našom prípade $n_1 = 1, n_2 = n$ a $\alpha_1 = 90^\circ$. Ak si označíme α uhol, pod ktorým vchádza Matúš do parku, tak $\alpha = 90^\circ - \alpha_2$, teda

$$\cos \alpha = \frac{1}{n}. \quad (2.5.2)$$

Je zrejmé, že Matúš môže do parčíka vstúpiť i vystúpiť z neho len pod uhlom spĺňajúcim túto podmienku.

Okamžite vidíme, že ak Matúš spĺňa podmienku pri vstupe, automaticky ju spĺňa aj pri výstupe cez protiľahlú stranu.



Obrázok 2.5.1: Možné triedy trajektórií prechádzajúcich čiastočne cez parčík

⁵Podľa Fermatovho princípu sa svetlo šíri po takej trajektórii, že čas potrebný na prejde po tejto trajektórii je extrémny. Vo väčšine prípadov ide o lokálne minimum, preto sa zvykne označovať aj ako Fermatov princíp najkratšieho času.

Podme si teraz zrátať, ako dlho mu bude takýto prechod cez parčík trvať (zelená trajektória). Pre jednoduchosť uvažujme, že $a = 1$ a Matúš sa po chodníku tiež pohybuje rýchlosťou 1⁶. Potom čas pochodu chodníkom bude rovný dĺžke úseku chôdze po chodníku a čas pochodu cez parčík bude n krát dĺžka úseku chôdze cez parčík. S použitím jednoduchšej trigonometrie dostaneme

$$\tau = \underbrace{\frac{n}{\sin \alpha}}_{\text{cez parčík}} + \underbrace{2 - \cot \alpha}_{\text{po chodníku}}. \quad (2.5.3)$$

Po dosadení podmienky pre vstupný uhol 2.5.2 a následnej úprave dostávame

$$\tau = 2 + \sqrt{n^2 - 1}. \quad (2.5.4)$$

Ešte potrebujeme určiť, za akých okolností tento vzťah platí.

V prvom rade musíme zabezpečiť, aby Matúš, nasledujúc Snellov zákon, vyšiel cez protilahlú stranu parčíku. K tomu dôjde, len ak priemet vzdialenosti na stranu parčíka, cez ktorú vošiel dnu, bude nanajvyš rovný dĺžke tejto strany, čiže

$$\cot \alpha \leq 2. \quad (2.5.5)$$

Odtiaľ po dosadení podmienky 2.5.2 dostávame

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad (2.5.6)$$

Ak táto podmienka nie je splnená, najvýhodnejšia trasa je prechod priamo naprieč parkom do protilahlého rohu, ktorá trvá $\sqrt{5}n$.

Vzťah 2.5.2 nám hovorí, že čím je index lomu väčší, tým je väčší aj vstupný uhol. Pre veľmi veľký „index lomu“ je vstupný uhol skoro pravý. To znamená, že Matúš v takom prípade musí prejsť skoro pozdĺž celej jednej strany po chodníku a o niečo viac ako dĺžku druhej strany cez parčík. V takom prípade okamžite vieme povedať, že by bolo efektívnejšie, ak by šiel po obvode, pretože prejde takmer takú istú vzdialenosť, ale väčšou rýchlosťou. Preto môžeme tvrdiť, že od istej veľkosti „indexu lomu“ je pre neho výhodnejšie ísť po obvode. Nájsť tento medzný uhol nie je problém. Vieme, že po obvode mu bude trvať prejsť do protilahlého rohu čas 3. Preto cez parčík pôjde len v takom prípade, ak čas prechodu 2.5.4 nebude dlhší, teda

$$2 + \sqrt{n^2 - 1} \leq 3 \quad \Rightarrow \quad n \leq \sqrt{2}. \quad (2.5.7)$$

Konečne si to môžeme všetko zhrnúť. Pre čas prechodu v závislosti od „indexu lomu“ platí

$$\tau(n) = \begin{cases} \sqrt{5}n, & \text{ak } n < \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ 2 + \sqrt{n^2 - 1}, & \text{ak } n \in \left[\frac{\sqrt{5}}{2}; \sqrt{2}\right], \\ 3, & \text{ak } n > \sqrt{2}. \end{cases} \quad (2.5.8)$$

Doteraz sme uvažovali, že Matúš vyjde cez protilahlú stranu parčíka. Nemohol by ale vyjsť cez susednú? – Mohol, ale... Aby platil Snellov zákon pri vstupe do parčíka i pri výstupe z nehu, musel by do parčíka vstupovať i vystupovať pod uhlom 45° (modrá trajektória). To je ale možné len pre $n = \sqrt{2}$.

⁶Ušetríme si tým písanie podielu $\frac{a}{v}$ vo všetkých vzťahoch.

Pripustíme na chvíľu túto možnosť a povedzme, že si Matúš skrátil cestu tak, že urezal z rohu vzdialenosť x . V takom prípade by mu cesta trvala

$$\tau_x = 3 - 2x + \sqrt{2}xn \Big|_{n=\sqrt{2}} = 3. \quad (2.5.9)$$

To je ale presne toľko, koľko by mu cesta trvala po obvode i cez protilahlú stranu, čo vidíme zo vzťahu 2.5.4 po dosadení $n = \sqrt{2}$, takže vtedy je úplne jedno, ktorú z množiny týchto trajektórií si vyberie.

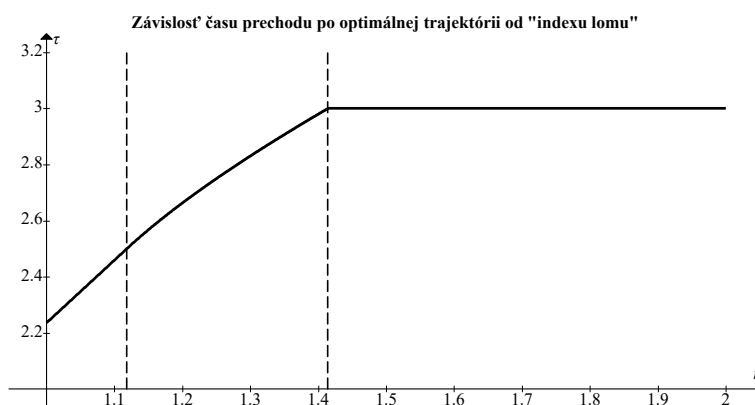
Ešte by sme sa mohli pýtať, že či je nutné, aby pri urezaní rohu platil Snellov zákon pri vstupe do parčíka i pri výstupe z neho. A odpoveď je, že áno. Snellov zákon je dôsledok Fermatovho princípu, takže ak neplatí Snellov zákon pri vstupe i pri výstupe, určite existuje susedná trajektória, ktorá je rýchlejšia. Ak by sme sa rozhodli iteratívne prechádzať na susednú, rýchlejšiu, trajektóriu, postupne by sme dokonvergovali na niektorú z trajektórií spĺňajúcich Snellov zákon – teda takú, ktorú sme už našli.

Na záver ešte pre úplnosť uvedme, že sme uvažovali chôdzu po chodníku pozdĺž dlhšej strany parčíka a krosovali sme ho v smere, v ktorom je užší. Toto už intuitívne dáva zmysel – chcem prejsť viac tadiaľ, kde som rýchlejší a menej tadiaľ, kde som pomalší. Pre tých, čo neveria, uvedieme aj výsledok pre prípad, že by sme parčík krosovali cez väčšiu hrúbku (červená trajektória), ale už ho nebudeme podrobne vysvetľovať, pretože výpočet je úplne analogický,

$$\tau(n) = \begin{cases} \sqrt{5}n, & \text{ak } n < \sqrt{5}, \\ 1 + 2\sqrt{n^2 - 1}, & \text{ak } n \in \left(\sqrt{5}; \sqrt{2}\right), \\ 3, & \text{ak } n > \sqrt{2}. \end{cases} \quad (2.5.10)$$

Okamžite vidíme, že mód prechodu cez protilahlé kratšie strany nikdy nenastane, pretože ak má platiť Snellov zákon, môže k nemu dôjsť až pre „indexu lomu“ $n \geq \sqrt{5}$, ale už od „indexu lomu“ $n = \sqrt{2}$ je výhodnejšie ísť naokolo.

Trvanie prechodu po optimálnej trajektórii v závislosti od „indexu lomu“ je zobrazené na obrázku 2.5.2.



Obrázok 2.5.2: Čas prechodu po ideálnej trajektórii v závislosti od „indexu lomu“. Pre „index lomu“ $n < \frac{\sqrt{5}}{2}$ je optimálna trajektória priama do protilahlého rohu, pre „index lomu“ $n \in \left(\frac{\sqrt{5}}{2}; \sqrt{2}\right)$ prechádza krížom cez park cez dlhšie strany a pre „index lomu“ $n > \sqrt{2}$ vedie po obvode parku.

2.6 Ohlušujúca havária

vzorák MatusH, opravoval MatusH

Keďže električka narazí do steny nepružne, prvý vozeň stratí všetku svoju kinetickú energiu a zastaví. No druhý vozeň stena nezastavila, a tak sa v momente nárazu stále hýbe rýchlosťou v . Preto dôjde k stláčaniu pružiny v dôsledku zmenšovania vzdialenosti medzi vozňami. Pružina bude pri stáčaní pôsobiť na vozne silou veľkosti $k\Delta x$, kde Δx je zmena vzájomnej vzdialenosti vozňov⁷. Prvý vozeň je pružinou tlačенý do steny, takže sa nebude hýbať. Druhý vozeň je silou od pružiny spomaľovaný. Dochádza preto k premene kinetickej energie druhého vozňa na potenciálnu energiu uloženú v pružine. Maximálnu zmenu vzdialenosti pružiny teda vieme vypočítať ako

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\Delta x_{\max}^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x_{\max} = v\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.6.1)$$

Uvedomme si, že pohyb druhého vozňa je od začiatku až do tohto bodu úplne rovnaký ako pohyb závažia s hmotnosťou m na pružinke tuhosti k , ktoré je na začiatku v rovnovážnej polohe a udelíme mu rýchlosť v . O takomto prípade vieme, že závažie bude konať kmitavý pohyb a jeho okamžitá výchylka je $y = y_{\max} \sin \omega t$, kde $\omega = \sqrt{k/m}$. Preto aj výchylka vozňa bude opísaná úplne rovnakou rovnicou, kde za maximálnu výchylku dosadíme maximálnu výchylku z rovnice 2.6.1. Čas, v ktorom dôjde k maximálnej výchylke, bude taký čas, kedy bude sínus maximálny, a teda rovný 1. Prvý takýto čas je $t_{\max} = \pi/(2\sqrt{k/m})$.

V maximálnej výchylke už vozeň nemá žiadnu rýchlosť, takže ho pružina začne odtláčať naspäť (stále pôsobí na prvý vozeň silou, ktorá ho tlačí do steny, takže sa nehýbe). Môžeme si uvedomiť, že tento pohyb bude, čo sa týka zrýchlenia, úplne rovnaký tomu, čo sme riešili doteraz, lebo v každom čase bude pôsobiť rovnaká sila. Tento raz ale opačným smerom. Preto druhý vozeň električky bude stále vykonávať kmitavý pohyb. Teda od začiatku, kedy $t = 0$, po čas $t = \pi\sqrt{m/k}$ bude prvý vozeň stáť a druhý sa bude hýbať podľa rovnice

$$\Delta x = v\sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t. \quad (2.6.2)$$

Ako vyzerá situácia na konci tohto času? Prvý vozeň sa stále nehýbe a druhý vozeň je práve v takej polohe, v akej bol na začiatku, akurát jeho rýchlosť má opačný smer – od steny. Uvedomme si, že v tomto momente už stena nepôsobí žiadnou silou na sústavu a zároveň sústava má hybnosť v smere od steny, takže vo zvyšku riešenia už stena nebude hrať žiadnu úlohu⁸.

Potrebovali by sme zistiť, ako sa bude hýbať každý z vozňov, no keďže sú spojené pružinkou, tak ich pohyby sa navzájom ovplyvňujú. Takejto komplikácii sa odborne hovorí previazanie a znamená to, že nemôžeme vyriešiť najskôr jeden pohyb a potom druhý, ale musíme ich riešiť oba naraz. My ho ale prefíkane obídeme tak, že prejdeme do ťažiskovej sústavy električky. Ťažisko električky sa momentálne hýbe rýchlosťou $v/2$, a keďže zanedbávame trenie a odpor vzduchu, tak sa už naveky bude hýbať touto rýchlosťou.

Po prechode do ťažiskovej sústavy máme zrazu iný problém. Máme dva vozne električky spojené pružinkou s pokojovou dĺžkou a udelili sme im rýchlosti $v/2$ každému v smere od toho druhého vozňa. (Ak tento prechod nie je jasný, odporúčame si celú situáciu nakresliť.) Toto je oveľa jednoduchšia úloha, nakoľko môžeme využiť symetriu problému. Uvedomme si, že stredný bod pružinky sa v ťažiskovej sústave nehýbe. Ak by sme

⁷Uvažujeme, že keď električka išla, tak bola v rovnovážnom stave a pružina mala pokojovú dĺžku.

⁸Toto nie je úplne nepriestrelný argument, no správnosť tohto predpokladu si vieme overiť, ak riešenie nájdeme a zistíme, že vozeň sa steny už nikdy nedotkne.

teda pružinku v tomto mieste rozstrihli, vložili tam stenu a pružinky pripojili na stenu, riešenie by sa vôbec nezmenilo. Tým sme dostali problém, ktorého riešenie sme tu už raz využili, a teda v ťažiskovej sústave budú vozne vykonávať kmitavý pohyb a ich výchylka od stredu pružiny bude

$$\Delta x = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin \sqrt{\frac{2k}{m}} t, \quad (2.6.3)$$

kde čas t tento krát meriame od začiatku tejto fázy pohybu sústavy.

Za poznámku stoja dvojky, ktoré sa nám v riešení objavili. V prvom rade musíme predeliť rýchlosť dvojkou, lebo vozne majú na začiatku polovičnú rýchlosť. Druhá dvojka sa objavila pri k . Tá je kvôli tomu, že pružina sa efektívne dvakrát skrátila, a teda má dvojnásobnú tuhosť⁹. Tým máme riešenie v ťažiskovej sústave. Na riešenie v sústave človeka, ktorý stojí na chodníku a celú zrážku pozoruje, musíme ešte prejsť naspäť tým, že k rýchlosti oboch vozňov pripočítame, ako sa pohlo ťažisko. To sa hýbe rýchlosťou $v/2$ v opačnom smere ako bol pôvodný pred zrážkou, preto po čase t sa pohne o $vt/2$. Pohyb po čase $t = \pi\sqrt{m/k}$ prvého vozňa preto bude

$$x = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin \sqrt{\frac{2k}{m}} t - \frac{vt}{2} \quad (2.6.4)$$

a druhého

$$x = -\frac{v}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin \sqrt{\frac{2k}{m}} t - \frac{vt}{2}, \quad (2.6.5)$$

kde nulová poloha obidvoch je v tom mieste, kde sa nachádzali v momente zrážky.

2.7 Ukrytý náboj

vzorák MatusH, opravoval MatusH

Keď Krtko dá svoj náboj do vodivej dutej gule, náboje sa nejako budú hýbať, kým celá sústava nenadobudne ustálený statický stav. Ak by takýto stav nenadobudla, tak by vo vodiči do nekonečna tiekol prúd. To by ale znamenalo, že by sa donekonečna konala práca, a teda by sme vyrobili perpetuum mobile, čo nevieme. Preto po istom čase¹⁰ nabodudne sústava ustálený stav a elektróny sa nebudú hýbať. Z toho vieme usúdiť prvý dôležitý záver a to, že elektrické pole vo vodivom medzigulí bude v takomto stave nulové. Ak by nebolo, tak by pôsobilo silou na voľné elektróny a tie by sa začali hýbať, čím by vznikol prúd, čo nemôže.

Pozrime sa teraz konkrétne na vnútorný povrch kovového medzigulia. Na situáciu sa budeme pozeráť z pohľadu siločiar, ktoré reprezentujú smer elektrického poľa v danom mieste a ich hustota znázorňuje veľkosť elektrického poľa. Vo vnútornom priestore máme náboj Q , z ktorého vychádzajú siločiar (alebo vchádzajú, ak je záporný, zmena znamienka spôsobí akurát zmenu znamienka všetkých ostatných nábojov a intenzít, no kvalitatívne riešenie ostane rovnaké, pre jednoduchosť budeme uvažovať kladný náboj). Aby vo vnútri vodivého medzigulia bolo nulové elektrické pole, tak doň žiadne siločiar nemôžu vchádzať. To je ale problém, lebo siločiar z náboja sa nemôžu križovať¹¹, takže k okraju prísť musia. Tam ale musia aj skončiť. To znamená, že na vnútornom povrchu sa indukuje záporný náboj. Dokonca aj vieme, že musí mať rovnakú veľkosť, lebo všetky siločiar musia skončiť na okraji.

⁹Ak tento fakt nie je jasný, odporúčame sa zamyslieť nad natiahnutím jednej pružiny o nejaký kúsok a natiahnutím dvoch takých istých pružín zapojených za sebou o ten istý kúsok a o dvojnásobný kúsok.

¹⁰Ktorý je v skutočnosti prakticky ihneď.

¹¹Ak by sa križovali, spôsobilo by to nejednoznačný smer elektrického poľa v nejakom mieste.

Vieme povedať aj to, že siločiar na povrch prídu kolmo, lebo inak by mali zložku rovnobežnú s povrchom, a teda by rozpoobybovali indukovaný náboj po povrchu.

Celé kovové medzigulie je ale neutrálne, a to znamená, že na vonkajšom povrchu sa musí indukovať kladný náboj Q . Keďže vo vodiči je nulové pole (čo znamená, že bodový náboj Q vnútri je odizolovaný indukovaným nábojom $-Q$ na vnútornom povrchu), tak indukovaný náboj Q na vonkajšom okraji necíti bodový náboj vnútri, a teda sa musí rozložiť rovnomerne. Tým máme vyriešené, čo sa deje na vnútornom povrchu, v samotnom medzigulí a na vonkajšom povrchu. Ostáva už len jedna otázka zo zadania, ako bude vyzeráť elektrické pole mimo kovového medzigulia?

Pozrime sa opäť na siločiar. Z kladného náboja na povrchu musia vychádzať nejaké siločiar. Určite nemôžu smerovať smerom do kovového medzigulia, lebo to by opäť znamenalo nenulovosť elektrického poľa v kovovom medzigulí. Kvôli rovnomernému rozloženiu náboja na vonkajšom guľovom povrchu, môžu siločiar smerovať len kolmo preč od povrchu. Ak by smerovali inak, nastal by rozpor so symetriou celého problému. Z toho istého dôvodu pôjdu týmto smerom až do nekonečna.

Keď si zoberieme myslenú sféru so stredom v strede medzigulia, tak hustota siločiar prechádzajúcich cez jednotku plochy na tejto pomyslenej sfére klesá ako $1/r^2$ kde r je polomer sféry. Môžeme to vidieť z faktu, že celkový počet pretínajúcich siločiar bude stále rovnaký, no plocha bude rásť s r^2 . To nám pripomína elektrostatické pole bodového náboja. Ak by sme uvážili, že ideme celé medzigulie zmenšovať, tak náboj na povrchu ostane stále rovnaký, no povrch sa bude zmenšovať s r^2 , takže intenzita bude rásť s r^2 (uvedomme si, že v tomto prípade zmenšujeme r). Ak by sme takto zmenšovali medzigulie limitne do nuly, tak prakticky dostaneme bodový náboj, a teda môžeme povedať, že elektrické pole mimo medzigulia je ako keby tam medzigulie vôbec nebolo a Krtkov náboj bol umiestnený v strede medzigulia.

Riešenie pomocou Gaussovho zákona

Ak poznáme Maxwellove rovnice, vieme si pomôcť aj nimi. Toto riešenie si však vyžaduje znalosti výrazne presahujúce stredoškolské učivo, a preto ho uvádzame len ako zaujímavosť. Jedna z Maxwellových rovníc je Gaussov zákon, ktorý v diferenciálnom respektíve integrálnom tvare hovorí

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad \text{respektíve} \quad \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon}.$$

My pri našich úvahách využijeme integrálnu formu. Vieme, že elektrické pole vo vodičoch je nulové z rovnakej úvahy ako sme využili predtým. Ak si teda zoberieme S ako sféru tesne väčšiu ako vnútorný povrch, vieme hneď povedať, že integrál je rovný 0, a teda celkový náboj ohraničený touto plochou musí byť rovný 0. Preto sa na vnútornom povrchu medzigulia musí nahromadiť náboj $-Q$.

Rovnakými úvahami ako predtým vieme dospieť k tomu, že na vonkajšom povrchu bude rovnomerne rozložený náboj Q , z čoho získavame guľovú symetriu. Vďaka tejto symetrii môžeme povedať, že elektrické pole bude radiálne. Ak si teda zvolíme ako povrch S teraz sústrednú sféru s polomerom R okolo nášho medzigulia, intenzita elektrického poľa bude všade kolmá na povrch a bude mať rovnakú veľkosť. Plošný integrál teda vieme jednoducho vypočítať a dostávame rovnicu

$$4\pi R^2 E = \frac{Q}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{R^2},$$

z ktorej rovno vidíme, že intenzita je rovnaká ako od bodového náboja.

Použitím Gaussovho zákona sme sa teda vyhli úvahám so siločiarami. Gaussov zákon ale vyžaduje znalosť pokročilej matematiky a fyziky, zatiaľ čo prístup cez siločiaru je matematicky oveľa jednoduchší a intuitívnejší, no možno zdĺhavejší.

2.8 Laserové pravítko

vzorák Jaro a Marek, opravovali Jaro a Marek

Zrkadlo je dostatočne hladká plocha odrážajúca väčšinu dopadajúceho svetla v súlade so zákonom odrazu, pričom dopadajúci svetelný zväzok rozptyľuje len minimálne. Odrážajúcou plochou je zvyčajne vyleštený materiál – najčastejšie kov. Podľa polohy odrazivej plochy existujú dva typy zrkadiel – zrkadlá s prednou odrazivou plochou a zrkadlá so zadnou odrazivou plochou.

Zrkadlo s prednou odrazivou plochou vyrobíme tak, že len vyleštíme povrch materiálu a k odrazu dochádza od tohto povrchu. Ak sa predmetom dotkneme takéhoto zrkadla, budú sa predmet a jeho odraz dotýkať v mieste kontaktu predmetu so zrkadlom.

Zjavnou nevýhodou zrkadiel s prednou odrazivou plochou je, že odrazivý povrch je vystavený okoliu, takže sa veľmi ľahko poškodí či už mechanicky (napr. poškrabanie) alebo chemicky (napr. oxidácia). Preto sa bežne stretáme skôr s druhým typom zrkadiel – so zrkadlami so zadnou odrazivou plochou. Najčastejšie ide o tenkú sklenenú (prípadne inú priehľadnú) platňu s tenkou kovovou (alebo inou) vrstvičkou na zadnej strane. Pri tomto type zrkadla nedochádza k odrazu na prednej strane,¹² teda na skle, ale až na kovovej vrstvičke na zadnej strane. Môžeme sa o tom ľahko presvedčiť tak, že priložíme hrot pera na povrch zrkadla a pozrieme sa naň pod uhlom. Uvidíme, že hrot sa nedotýka svojho obrazu, ale je medzi nimi medzera.¹³ Veľkosť tejto medzery zrejme závisí od uhla, pod ktorým sa pozeráme, a od hrúbky skla zrkadla.

To je ale návod na vyriešenie tejto úlohy. Ak sa nám podarí nájsť vzťah medzi vzdialenosťou hrotu od jeho obrazu a hrúbkou zrkadla, tak meraním tejto vzdialenosti dokážeme určiť hrúbku zrkadla.¹⁴

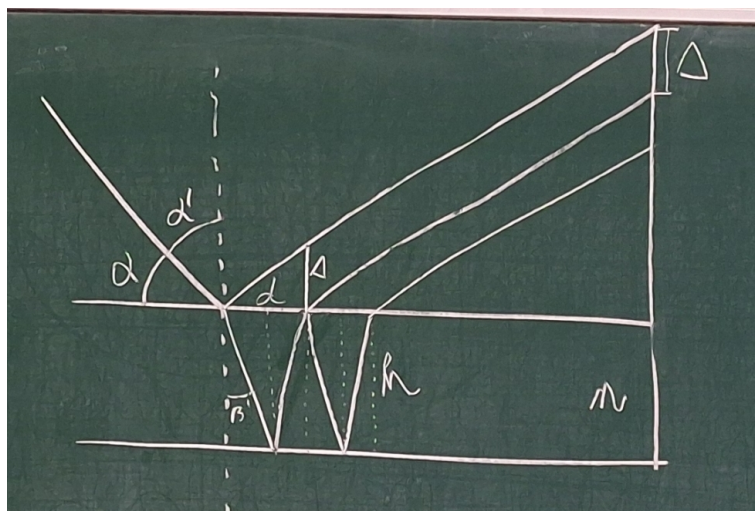
Ako vzniká medzera medzi hrotom a jeho obrazom, je zjavné z obrázka 2.8.1. Lúč odrazený z hrotu nám dopadá do oka priamo. Zároveň nám ale do oka dopadá aj lúč, ktorý po odraze z hrotu prechádza do skla, pričom sa láme podľa Snellovho zákona, dopadá na zadnú plochu, od ktorej sa odráža, a vychádza zo zrkadla cez jeho prednú plochu, opäť v súlade so Snellovým zákonom. Veľkosť medzery medzi hrotom a obrazom je vlastne kolmá vzdialenosť týchto dvoch lúčov. Z praktického hľadiska je ale jednoduchšie merať horizontálnu vzdialenosť týchto dvoch lúčov, teda vzdialenosť hrotu od miesta na povrchu zrkadla, z ktorého vychádza odrazený lúč.

Ak sme od zrkadla dostatočne ďaleko, priamy lúč a lúč odrážajúci sa od zrkadla môžeme považovať za rovnobežné. V takom prípade je hľadanie vzťahu medzi veľkosťou medzery a hrúbkou zrkadla len vecou jednoduchšej geometrie.

¹²Aby sme boli úplne presní, nejaká malá časť dopadajúceho svetla sa odrazí aj tu, ale veľká väčšina prechádza cez sklo a odráža sa až na kovovej vrstvičke. Intenzita svetla odrážajúceho sa od zadnej vrstvičky je pritom oveľa väčšia než intenzita svetla odrážajúceho sa od predného povrchu, preto odraz od predného povrchu je prehlúšený odrazom od zadnej strany a my vidíme len ten.

¹³https://en.wikipedia.org/wiki/First-surface_mirror#/media/File:Specchi.jpg

¹⁴Presnejšie hrúbku skla zrkadla. Ako sme povedali, zrkadlo má na zadnej strane tenkú vrstvičku, ktorej hrúbku takto nezmeriame. Jej hrúbka je však voči hrúbke skla zanedbateľná.



Obrázok 2.8.1: Priamy a odrazený lúč dopadajúci do oka (objektívu).

Označme si hrúbku zrkadla h a horizontálnu vzdialenosť lúčov d . Ďalej nech uhol medzi lúčom vo vzduchu a povrchom zrkadla je α a v skle α' . Index lomu skla je n a vzduchu 1.

Podľa Snellovho zákona platí

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = n \quad (2.8.1)$$

Zároveň z pravouhlého trojuholníka určeného lúčom v skle, povrchom zrkadla a normálou v mieste odrazu vidíme, že

$$\frac{h}{\frac{d}{2}} = \tan \alpha'. \quad (2.8.2)$$

Vylúčením uhla α' dostávame¹⁵

$$\frac{2h}{d} = \frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}. \quad (2.8.3)$$

Uhol lúča sa bude merať dosť neprakticky. Čo vieme ale zmerať pomerne jednoducho, je výška a horizontálna vzdialenosť, z ktorej sa pozeráme. Ak označíme výšku H a horizontálnu vzdialenosť D , potom

$$\cos \alpha = \frac{D}{\sqrt{H^2 + D^2}} \quad (2.8.4)$$

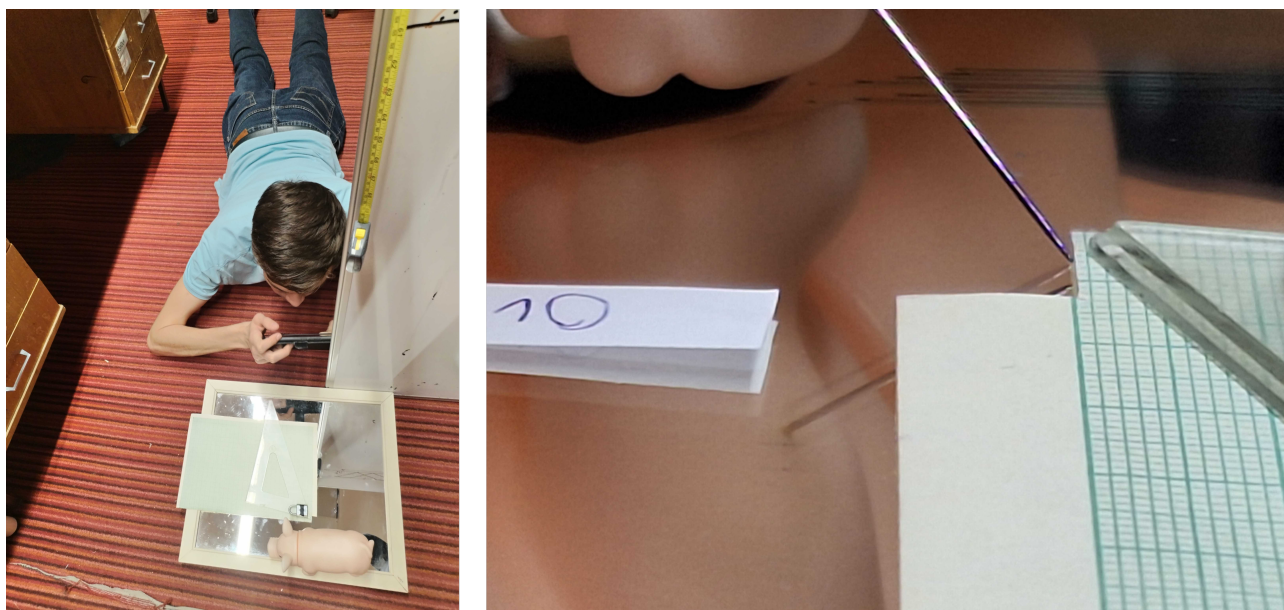
¹⁵ $\tan \alpha' = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha'}}{\cos \alpha'}$

a konečne

$$h = \frac{d}{2} \frac{\sqrt{(H^2 + D^2)n^2 - D^2}}{D}. \quad (2.8.5)$$

Pre potreby spracovávania dát tento vzťah ešte napíšeme v tvare

$$d = \frac{2hD}{\sqrt{(H^2 + D^2)n^2 - D^2}}. \quad (2.8.6)$$



Obrázok 2.8.2: Ukážka z priebehu merania a jedna z vyhotovených snímok, z ktorých sa odčítavali dáta.

Vybavení touto teóriou, môžeme pristúpiť k meraniu. Našu aparatúru je vidieť na priloženej fotografii (obrázok 2.8.2).

1. Zrkadlo umiestnime na vodorovnú zem.
2. V jeho blízkosti si vytýčime zvislicu a vyznačíme si na nej výšky, z ktorých budeme merať veľkosť medzery medzi hrotom a obrazom. V našom prípade je touto zvislicou whiteboard, ktorý sme nastavili do zvislého smeru vodováhou. Na určovanie výšok nám slúži meter, ktorý sme pripevnili k okraju. Merania budeme robiť z výšok odstupňovaných po 5 cm v rozpätí 10 cm až 1 m.
3. Na zrkadlo priložíme hrot, ktorý by mal byť čo najtenší. Z toho dôvodu použijeme hrot ihly. Ako stojan použijeme gumené prasa, do ktorého ihlu zapichneme.
4. Zmeriame vzdialenosť hrotu ihly od zvislice, z ktorej vykonávame merania.
5. Vedľa hrotu ihly umiestnime milimetrový papier, pomocou ktorého budeme merať horizontálnu veľkosť medzery.
6. Z vybraných výšok na zvislici odfotografujeme medzeru a z fotografie odčítame počet štvorčekov milimetrového papiera medzi hrotom a jeho obrazom.

Vzdialenosť zvislice od hrotu ihly bola $D = 32$ cm. A hoci vieme vzdialenosť teoreticky merať s presnosťou na milimetre, chybu merania odhadneme na ± 1 cm, pretože nevieme zaručiť, že objektív fotoaparátu bol počas fotenia presne na zvislici, a nevieme ani povedať, kde presne sa vo fotoaparáte tvorí obraz. Podobne aj pri určovaní výšky budeme uvažovať chybu ± 1 cm. Pri určovaní šírky medzery budeme uvažovať chybu ± 1 mm, pretože musíme uvažovať chybu pol milimetra pri určovaní polohy hrotu a taktiež pol milimetra pri určovaní polohy obrazu.



Obrázok 2.8.3: Namerané dáta a vykreslené teoretické závislosti pre niekoľko hrúbok skla.

Namerané dvojice dát $[H; d]$ sú zobrazené ako body na prvom grafe (obrázok 2.8.3). Už nám zostáva len určiť zodpovedajúcu hrúbku skla.

Keďže poznáme teoretickú závislosť $d(H)$ (rovnica (2.8.6)), mohli by sme použiť metódu najmenších štvorcov. Tá spočíva v tom, že zo sady kriviek podľa rovnice (2.8.6) pre rôzne h vyberie tú, pre ktorú je suma kvadrátov rozdielov medzi nameranými dátami a predpovedanými hodnotami pre dané h čo najmenšia.¹⁶ Nakolko je ale táto metóda pomerne matematicky náročná, nejdeme si ju bližšie vysvetľovať – možno niekedy nabadúce. Ak ale máte dobrý štatistický program, môžete ju nechať zbehnúť pre vaše dáta a počítač vám vyplýje hrúbku skla, pre ktorú dostanete najlepší fit medzi dátami a teoretickou predpoveďou. Len pre zaujímavosť, pre naše dáta dostávame najlepší fit pre $h \doteq 2,3486$ mm s koeficientom determinácie $R^2 = 0,8983$.¹⁷

¹⁶Matematicky vyjadrené, minimalizujeme výraz $\sum_{i=1}^N [d_i - d(H_i)]^2$, kde d_i je i -ta nameraná veľkosť medzery prislúchajúca výške fotenia H_i a $d(H_i)$ je teoreticky predpovedaná veľkosť medzery pre túto výšku podľa vzťahu (2.8.6).

¹⁷Koeficient determinácie 1 znamená, že teoretická krivka presne prechádza všetkými nameranými bodmi, koeficient 0 zase, že teoretická krivka vôbec nevysvetľuje dáta a tie sú v podstate náhodne rozptýlené.

My si ukážeme metódu, ktorá síce dáva menej presný odhad, ale napriek tomu je veľmi poučná. Najskôr si podľa vzťahu (2.8.5) pre každú nameranú dvojicu $[H_i; d_i]$ dopočítame príslušnú hrúbku skla h_i . Ak máme N nameraných dvojíc, dostaneme N hrúbok skla. Toto je priamočiare. Komplikáciou je, že jednotlivé veličiny, z ktorých hrúbku skla počítame, sú zaťažené chybou, a my potrebujeme odhadnúť, akú veľkú chybu to znamená pre vypočítané hrúbky skla. Na to si potrebujeme povedať, ako sa šíria chyby merania.

Uvažujme veličiny a a b . Predpokladajme, že ich poznáme len s nejakou nepresnosťou. Táto nepresnosť je ich absolútnou chybou merania – budeme ju značiť AEa , resp. AEb . Relatívna chyba merania je potom $REa = \frac{AEa}{a}$, resp. $REb = \frac{AEb}{b}$. Pre šírenie chýb platia nasledujúce vzťahy.

- Ak $c = a \pm b$, tak $AEc = AEa + AEb$ – absolútna chyba súčtu/rozdielu je súčtom absolútnych chýb.
- Ak $c = a \cdot b$ alebo $c = \frac{a}{b}$, tak $REc = REa + REb$ – relatívna chyba súčinu/podielu je súčtom relatívnych chýb.
- Ak $c = a^r$, $r \in \mathbb{R}$, tak $REc = r \cdot REa$ – relatívna chyba r -tej mocniny je r -násobkom relatívnej chyby základu mocniny. Keďže r je ľubovoľné reálne číslo, tak to implikuje, že relatívna chyba p -tej odmocniny je p -krát menšia než relatívna chyba základu.

Aplikujme tieto pravidlá na vzťah (2.8.5). Začnime zvnútra. Relatívna chyba H^2 je

$$REH^2 = 2REH$$

a absolútna chyba H^2 je

$$AEH^2 = REH^2 \cdot H^2 = 2REH \cdot H^2.$$

Podobne

$$AED^2 = 2RED \cdot D^2.$$

Absolútna chyba výrazu v zátvorke je teda

$$AE(H^2 + D^2) = 2(REH \cdot H^2 + RED \cdot D^2)$$

a relatívna chyba

$$RE(H^2 + D^2) = \frac{2(REH \cdot H^2 + RED \cdot D^2)}{H^2 + D^2}.$$

Ďalej relatívna chyba

$$RE(H^2 + D^2)^{n^2} = \frac{2(REH \cdot H^2 + RED \cdot D^2)}{H^2 + D^2} + 2REN$$

a absolútna chyba

$$AE(H^2 + D^2)^{n^2} = 2(REH \cdot H^2 + RED \cdot D^2)^{n^2} + 2REN \cdot (H^2 + D^2)^{n^2}.$$

Potom absolútna chyba výrazu pod odmocninou je

$$AE[(H^2 + D^2)^{n^2} - D^2] = 2(REH \cdot H^2 + RED \cdot D^2)^{n^2} + 2REN \cdot (H^2 + D^2)^{n^2} + 2RED \cdot D^2$$

a jeho relatívna chyba je

$$RE[(H^2 + D^2)^{n^2} - D^2] = 2 \frac{(REH \cdot H^2 + RED \cdot D^2)^{n^2} + REN \cdot (H^2 + D^2)^{n^2} + RED \cdot D^2}{(H^2 + D^2)^{n^2} - D^2}.$$

Konečne relatívna chyba h je

$$\text{RE}h = \text{RE}d + \frac{(\text{RE}H \cdot H^2 + \text{RE}D \cdot D^2)n^2 + \text{RE}n \cdot (H^2 + D^2)n^2 + \text{RE}D \cdot D^2}{(H^2 + D^2)n^2 - D^2} + \text{RE}D$$

a absolútna chyba

$$\text{AE}h = \text{RE}h \cdot \frac{d \sqrt{(H^2 + D^2)n^2 - D^2}}{2D}. \quad (2.8.7)$$

Už odvodiť tento vzťah je peklo, preto v záujme zachovania vlastného duševného zdravia odporúčame pri výpočte chýb použiť počítač.

No dobre, našli sme N hrúbok skla a N chýb. Čo s tým? Najprirodzenejšie by bolo hrúbky skla jednoducho spriemerovať. Aj to je možnosť, ale dá sa to aj lepšie. Všimnime si, že hrúbky skla vyplynuté z jednotlivých meraní sú zaťažené rôznou chybou merania. Je prirodzené požadovať, aby menej presné dáta ovplyvnili priemer menej. A toto sa dá dosiahnuť použitím váženého priemeru, kde ako váhu použijeme prevrátenú hodnotu absolútnej chyby hrúbky skla (2.8.7)

$$w_i = \frac{1}{\text{AE}h_i}. \quad (2.8.8)$$

Všimnime si, že čím je chyba väčšia, tým je váha tejto hodnoty menšia. Vážený priemer potom vyzerá nasledovne¹⁸

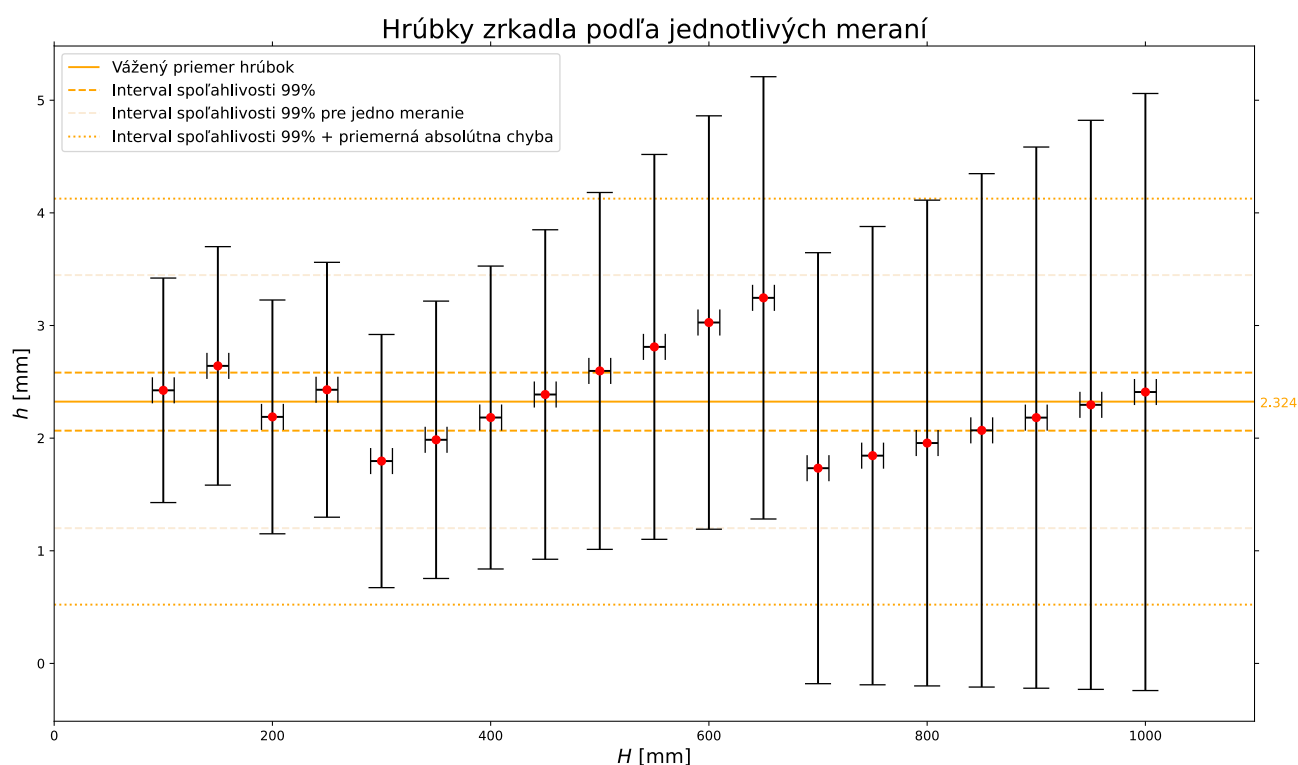
$$\bar{h}_w = \frac{\sum_{i=1}^N w_i h_i}{\sum_{i=1}^N w_i}. \quad (2.8.9)$$

Suma v menovateli slúži na nanormovanie váh na jednotku, aby nijako neovplyvnili priemer.¹⁹

Určiť priemer, samozrejme, nestačí. Musíme ešte odhadnúť, v akom intervale okolo tohto priemeru leží skutočná hrúbka zrkadla. Inými slovami, musíme určiť nepresnosť (chybu) merania. Hlavným zdrojom chýb v našom prípade je nepresnosť merania daná limitáciou meracích prístrojov (ako bolo diskutované vyššie), resp. nepresnosť znalosti indexu lomu – ten sme odhadli na $n = 1,5 \pm 0,05$ – vyplývajúca z našej neznalosti presného zloženia skla a jeho závislosti na vlnovej dĺžke svetla.

¹⁸Výraz $\sum_{i=1}^N w_i h_i$ znamená $w_1 h_1 + w_2 h_2 + \dots + w_N h_N$.

¹⁹Všimnime si, že ak by všetky váhy boli rovnaké, teda $w_i = w = \text{konšt.}$, vzťah (2.8.9) by prešiel na $\bar{h} = \frac{\sum_{i=1}^N w h_i}{\sum_{i=1}^N w} = \frac{w \sum_{i=1}^N h_i}{Nw} = \frac{\sum_{i=1}^N h_i}{N}$, čo je obyčajný aritmetický priemer.



Obrázok 2.8.4: Vypočítané hrúbky skla s príslušnými nepresnosťami.

Vypočítaná chyba jednotlivých meraní hrúbky skla podľa už diskutovaných pravidiel pre šírenie chýb je na grafe vyznačená errorbarmi (obrázok 2.8.4). Ak chceme priemeru priradiť jednu chybu, tak najjednoduchšia vec, čo môžeme urobiť, je priradiť mu jednoducho priemernú chybu z týchto meraní. Ale to nestačí, pretože sme tým nepokryli náhodné chyby, ktorých sme sa mohli dopustiť pri meraní. Na to treba vyčíslieť ešte rozptyl, resp. štandardnú (smerodajnú) odchýlku.

Snáď každý softvér na prácu s dátami má vstavanú funkciu na počítanie štandardnej odchýlky, takže toto by sme mohli odbaviť rýchlo. Avšak, ak ste sa niekedy pozreli do dokumentácie, ako je táto štandardná odchýlka zadefinovaná, mohli ste naraziť na zdanlivú nekonzistentnosť medzi jednotlivými softvérmi, resp. na rôzne typy štandardných odchýlok. Preto teraz bude nasledovať trochu dlhšie pojednanie o tom, ako štandardnú odchýlku vypočítať, resp. ktorú z nich použiť.

Základným vzťahom na výpočet štandardnej odchýlky σ , ktorý ste už zrejme videli, je

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (h_i - h)^2, \quad (2.8.10)$$

kde h je skutočná hodnota hrúbky zrkadla, ktorú na výpočet tejto štandardnej odchýlky potrebujeme poznať. No ale, ak by sme ju poznali, načo by sme potom robili toto meranie, že? Namiesto nej sa teda používa tzv. výberová štandardná odchýlka s , ktorá sa počíta ako

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (h_i - \bar{h})^2. \quad (2.8.11)$$

Tu sme nahradili neznámu skutočnú hrúbku zrkadla h jej odhadom pomocou aritmetického priemeru $\bar{h}$. Daňou za to ale je, že ju musíme mierne nadhodnotiť, preto delíme $N - 1$ a nie N . To vyplýva z toho, že ak použijeme priemer, zmenšíme tým počet stupňov voľnosti o 1.²⁰

Uvedené dva vzťahy popisujú, ako veľmi sú rozptýlené jednotlivé dáta od skutočnej hodnoty, resp. od aritmetického priemeru. Preto sa tieto štandardné odchýlky nazývajú aj štandardnými odchýlkami jedného merania – popisujú, ako ďaleko v priemere leží každé jedno meranie od skutočnej hodnoty / aritmetického priemeru. Nás ale toto až tak nezaujíma. Nás zaujíma, ako ďaleko leží priemer od skutočnej hodnoty, resp. ako ďaleko leží skutočná hodnota od jej odhadu, t.j. priemeru.

Predstavte si, že mám dáta rozmiestnené rovnomerne v intervale $\langle 1; 3 \rangle$. Stredná hodnota je potom 2 a keď si ich vyznačím na číselnej osi, čiarky budú rozmiestnené rovnomerne v celom intervale. Teraz si ale predstavte, že vyberiete napríklad 5 náhodných hodnôt z tohto intervalu – t.j. realizujete meranie – a vypočítate ich aritmetický priemer. Je jasné, že tento priemer bude ležať taktiež v intervale $\langle 1; 3 \rangle$, ale je pravdepodobnejšie, že bude ležať niekde v strede tohto intervalu než niekde na jeho okraji.²¹ Keď si priemery rôznych päťíc (rôznych realizácií meraní) vyznačíte na číselnej osi, budú sa zhľukovať viac okolo dvojky – t.j. budú mať menší rozptyl, teda štandardná odchýlka aritmetického priemeru bude menšia než štandardná odchýlka jedného merania. Dá sa ukázať, že štandardná odchýlka aritmetického priemeru klesá ako $\frac{1}{\sqrt{N}}$, teda

$$\sigma_{\bar{h}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma = \left[\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N (h_i - h)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.8.12)$$

$$s_{\bar{h}} = \frac{1}{\sqrt{N}} s = \left[\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (h_i - \bar{h})^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8.13)$$

V našom prípade potrebujeme určiť, ako veľmi sa môže líšiť nami vypočítaný priemer od skutočnej hodnoty, preto nás zaujíma štandardná odchýlka priemeru. Zároveň ale skutočnú hodnotu nepoznáme, preto použijeme výberovú odchýlku $s_{\bar{h}}$. Nepoužijeme ale vzťah (2.8.12), pretože nezabúdajme, že sme používali vážený priemer namiesto klasického aritmetického. Preto potrebujeme použiť váženú verziu vzťahu (2.8.13), ktorá vyzerá takto:

$$s_{\bar{h}_w} = \left[\frac{\sum_{i=1}^N w_i (h_i - \bar{h}_w)^2}{(N-1) \sum_{i=1}^N w_i} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8.14)$$

²⁰Toto tvrdenie treba chápať tak, že jedno meranie predstavuje jeden stupeň voľnosti, čiže mám N stupňov voľnosti. To znamená, že aby ste dostali plnú informáciu, musím vám dodať N údajov. Ak vám ale oznámim ich aritmetický priemer, už vám musím povedať len $N - 1$ údajov, aby som vám podal plnú informáciu, pretože z priemeru a z tých $N - 1$ údajov už to N -té zvládnete dopočítať. Preto hovoríme, že sme znížili počet stupňov voľnosti o 1. Inými slovami, údaje sú previazané priemerom, čím znižujeme počet stupňov voľnosti.

²¹Napríklad priemer 1 by sme dostali len ak by všetkých 5 náhodných čísel boli jednotky.

Ak ste sa dočítali až sem, gratulujem. Môžete si vydýchnuť. To najťažšie už máte za sebou.²² Zostáva nám už len uviesť hodnoty, ktoré sme dostali a interpretovať si vyčíslené chyby. Takže poďme pekne po poriadku.

Hrúbka zrkadla vypočítaná podľa vzťahu (2.8.9) nám vyšla $\bar{h}_w = 2,324$ mm. Na grafe 2.8.4 je vyznačená plnou oranžovou čiarou. Smerodajná odchýlka vyšla $s_{\bar{h}_w} = 0,090$ mm. Ako túto hodnotu interpretovať? Tak, že do istého násobku tejto vzdialenosti od priemernej hodnoty s istou pravdepodobnosťou leží skutočná hrúbka zrkadla. Aký je ten násobok a aká je tá pravdepodobnosť, o tom hovorí Studentovo t -rozdelenie. Presnejšie povedané, pravdepodobnosť si zvolím ja – povedzme, že napr. 99 %. Otvorím si tabuľky a zistím, aký násobok zodpovedá tejto pravdepodobnosti. Pri Studentovom rozdelení treba zobrať koeficient pre správny počet stupňov voľnosti. Čo sú stupne voľnosti, to sme si už vysvetlili. Máme 19 meraní, takže je 18 stupňov voľnosti. Pre 18 stupňov voľnosti a pravdepodobnosť 99 % vyčítame koeficient 2,878. Teraz už len týmto koeficientom prenásobíme smerodajnú odchýlku, a tým dostaneme tzv. krajnú chybu pre 99-percentný interval spoľahlivosti. Na grafe je vyznačený oranžovou čiarkovanou čiarou.²³ Bodkovanou čiarou je potom vymedzený interval zväčšený o priemernú absolútnu chybu hrúbky skla (t. j. o priemernú veľkosť errorbaru), ktorá je 1,544 mm.²⁴

Pri odhadovaní chýb musíme počítať s najhorším scenárom, preto musíme krajnú chybu s priemernou absolútnou chybou sčítať, a tým dostaneme finálnu chybu merania. Zistili sme, že hrúbka zrkadla je $2,324 \pm 1,802$ mm. To predstavuje relatívnu chybu 77,54 %. Naše meranie teda bolo veľmi nepresné. Takáto veľká chyba je však pochopiteľná. Hlavným príspevkom je nepresnosť merania vzdialenosti hrotu od jeho obrazu, pretože tá je pri veľkých uhloch (pozorovacích výškach) len okolo jedného milimetra a samotná neistota merania je 1 mm, takže sa dalo očakávať, že dostaneme podobne veľkú chybu. Takáto vysoká chyba je spôsobená zlým dizajnom experimentu a opakovaním meraní by sa ju znížila nepodarilo.²⁵ Potrebujeme teda prísť s iným návrhom experimentu.

Ešte pred tým si ale vykreslime teoretickú závislosť pre nami nameranú hrúbku skla (viď obrázok 2.8.3). Čiernou plnou čiarou je zobrazená závislosť pre hrúbku skla $\bar{h}_w$. Pre porovnanie čiernou prerušovanou čiarou je zobrazená závislosť pre hrúbku skla vypočítanú ako obyčajný aritmetický priemer a sivou plnou čiarou je závislosť pre hrúbku skla určenú metódou najmenších štvorcov. Vidíme, že všetky tri závislosti ležia tesne pri sebe. Zelenou čiarou je pre porovnanie vykreslená závislosť pre skutočnú hrúbku zrkadla zmeranú priamym kontaktným meraním, ktorá je $h = 2,2 \pm 0,1$ mm.

Teraz sa môžeme pokúsiť navrhnúť nový experiment, ktorým by sme sa dopracovali k hrúbke zrkadla zaťaženej menšou chybou. Keďže sa nám podarilo identifikovať hlavný zdroj chýb, musíme sa zamyslieť, ako ho eliminovať.

Možným riešením by bolo nahradiť zobrazovanie hrotu ihly odrážaním úzkeho zväzku svetla. Ak vrchný povrch zrkadla odráža časť svetla, tak potom na tienidle by sme mali pozorovať dva body – jeden prislúchajúci lúču odrazenému od horného povrchu zrkadla a druhý lúču odrazenému od zadnej odrazivej plochy.

²²Teda aspoň nateraz.

²³To neznamená, že 99 % meraní má teraz spadnúť do tohoto intervalu. Pripomeňte si diskusiu o štandardnej odchýlke jedného merania vs. štandardnej odchýlke aritmetického priemeru. Pre porovnanie antique-white čiarkovanou čiarou je vyznačený interval spoľahlivosti 99 % pre jedno meranie a preň by toto už platilo malo, čo sa aj potvrdilo.

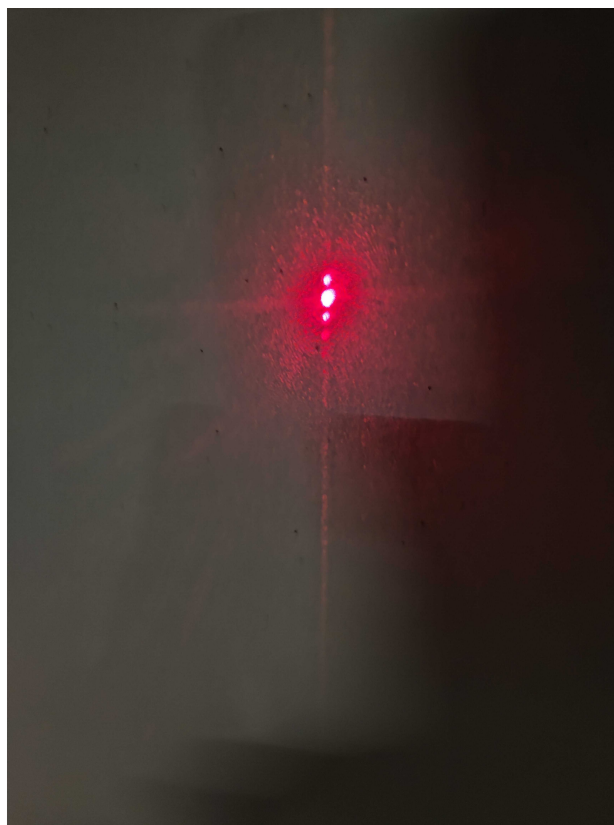
²⁴Môžeme použiť obyčajný aritmetický priemer alebo opäť vážený priemer. Vážený priemer v tomto prípade prejde na harmonický priemer $\overline{AEh}_w = \frac{\sum_{i=1}^N w_i AEh_i}{\sum_{i=1}^N w_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{AEh_i} AEh_i}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{AEh_i}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{AEh_i}} = \overline{AEh}_H$. Ten je vždy nanajvyš rovný aritmetickému, takže takto nedôjde k nadhodnoteniu chýb.

²⁵Podarilo by sa ju znížiť vyhodnocovaním dát pomocou metódy najmenších štvorcov. V našom spracovaní sme z 19 meraní vypočítali 19 hrúbok zrkadla, preto sa chyby opakovaním nijako nezmenšovali. Pri použití metódy najmenších štvorcov by sme z 19 meraní dostali len jednu hrúbku zrkadla, takže chyba by sa s počtom meraní do istej miery zmenšovala.

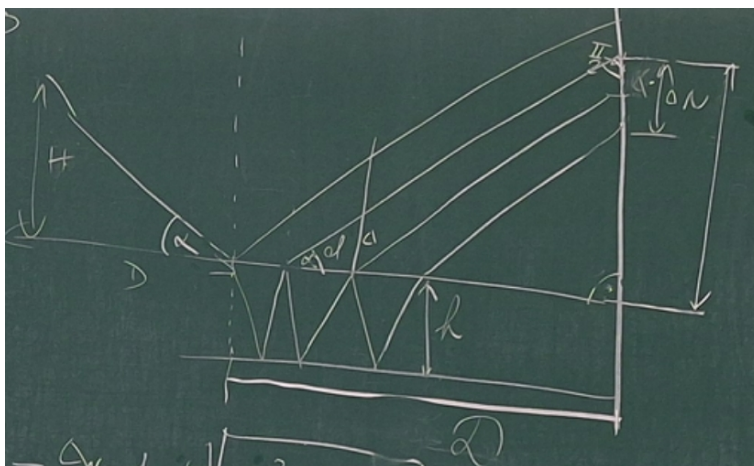
Nakláňaním tienidla by sme vedeli osvetlené body na tienidle od seba vzdialiť tak, aby ich vzájomná vzdialenosť bola väčšia než nepresnosť merania tejto vzdialenosti.

Prvotné pokusy s týmto konceptom však ukázali diery v našej stratégii. Tým, že náš zväzok svetla nebol dostatočne tenký, tak nakláňaním tienidla sa proporčne zväčšovali aj osvetlené body na tienidle, takže s ich vzájomnou vzdialenosťou rástla priamo úmerne aj nepresnosť merania tejto vzdialenosti.

Pri vykonávaní prvotných pokusov sme si však všimli iný jav, ktorý by sme mohli využiť. Na tienidle sa neobjavili len dva body, ale celý rad ekvidistančných bodov, ktorých jas postupne klesal. Ďalšie body v rade zodpovedali viacnásobne odrazeným lúčom medzi horným a zadným povrchom zrkadla (viď obrázok 2.8.5). Nám stačí odmerať vzdialenosť medzi prvým a posledným zreteľne viditeľným bodom. Tým zväčšíme vzdialenosti, ktoré meriame, a nijako výrazne tým neznížime presnosť merania.



Obrázok 2.8.5: Záber z merania pomocou lasera a detail na osvetlené body na stene.



Obrázok 2.8.6: Geometria odrazených lúčov od zrkadla.

Podme si pre takéto meranie odvodiť príslušné vzťahy. Označme si vzdialenosť stredov dvoch susedných osvetlených bodov na tienidle Δ . Vzťah medzi uhlom lúča, hrúbkou zrkadla a horizontálnou vzdialenosťou medzi dvoma susednými lúčmi sme si už odvodili – viď rovnica (2.8.3). Teraz nám už len z lichobežníka daného dvoma susednými lúčmi, povrchom zrkadla a tienidlom stačí prepočítať horizontálnu vzdialenosť lúčov d na vzdialenosť stredov osvetlených bodov Δ . Tento lichobežník si možno rozdeliť na rovnobežník a pravouhlý trojuholník – viď obrázok 2.8.6. Z pravouhlého trojuholníka okamžite vidíme, že

$$\tan \alpha = \frac{\Delta}{d}. \quad (2.8.15)$$

Dosadiac za d do (2.8.3), dostávame

$$\frac{2h}{\Delta} = \frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}}{\sin \alpha}. \quad (2.8.16)$$

Pre potreby spracovávania dát tento vzťah ešte uvedieme v tvaroch

$$h = \frac{\Delta}{2} \frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}}{\sin \alpha} \quad (2.8.17)$$

$$\text{a } \Delta = \frac{2h \sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}}. \quad (2.8.18)$$

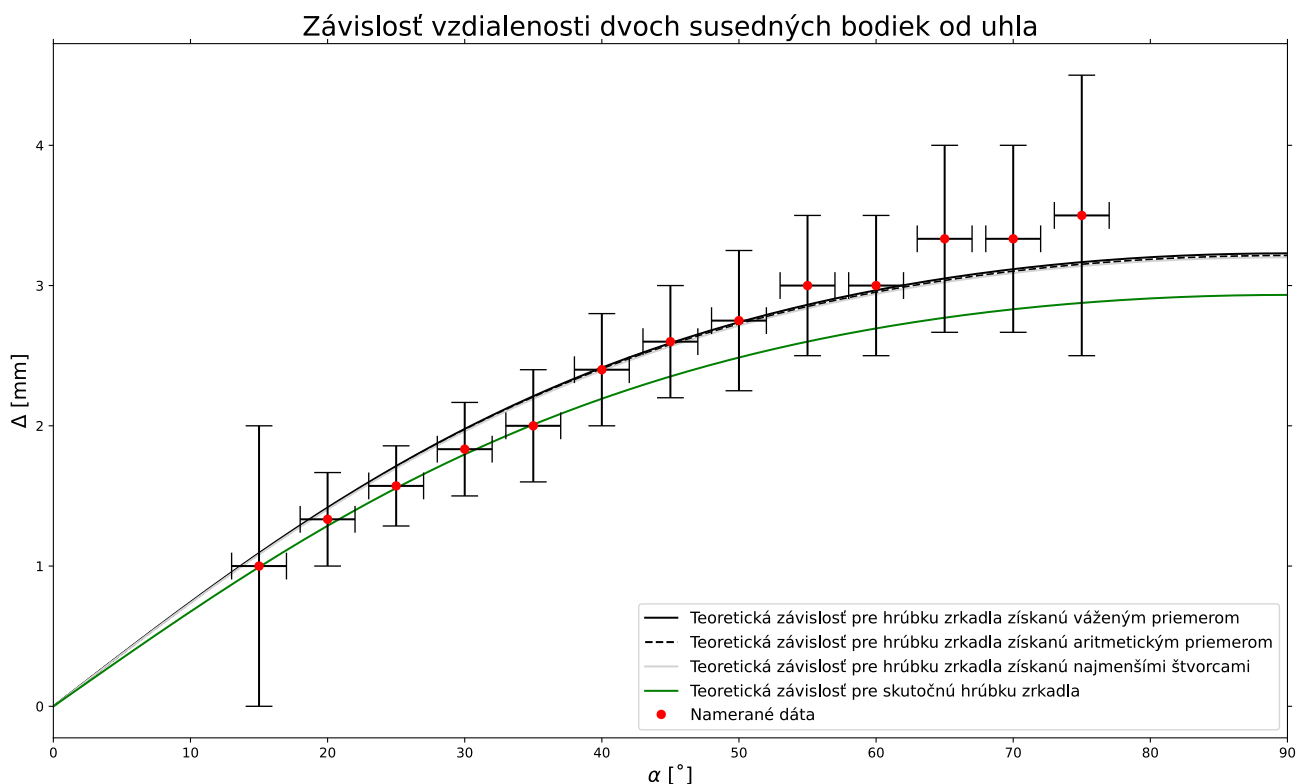
Uhol svietenia laserom sa dá kontrolovať pomerne dobre, preto teraz nemusíme prevádzať uhol na výšku, z ktorej svietime.

Vyzbrojení teóriou môžeme opäť pristúpiť k meraniu.

1. Z kartónu si vyrežeme uhly v rozpätí 15° až 75° odstupňované po 5° . Pomocou nich budeme kontrolovať uhol svietenia.

2. Zrkadlo položíme na vodorovnú podlahu k stene. Vodorovnosť zrkadla a zvislosť steny overíme vodováhou.
3. Zoberieme laser, priložíme ho ku kartónovému trojuholníku, pomocou ktorého zabezpečíme požadovaný uhol medzi podlahou a lúčom.
4. Pomocou pravítka odmeriame vzdialenosť stredov prvého a posledného zreteľného, osvetleného bodu na stene a spočítame počet medzier medzi týmito dvomi bodmi. Δ je potom podiel nameranej vzdialenosti a počtu medzier.

Namerané dvojice dát $[\alpha; \Delta]$ sú zobrazené na grafe 2.8.7. Nepresnosť uhla odhadneme na 2° z dôvodu nepresnosti vystrihovania uhlov z kartóna a nepresnosti pri prikladaní lasera k povrchu kartóna pri svietení. Nepresnosť merania vzdialenosti osvetlených bodov odhadneme na 2 mm z dôvodu nepresnosti určenia stredov osvetlených bodov a ich pohybu v dôsledku trasenia rúk. Zdôraznime ale, že toto je chyba merania vzdialenosti krajných bodov. Ak je medzi nimi m medzier, tak chyba merania vzdialenosti dvoch susedných bodov je $\frac{2}{m}$ mm.



Obrázok 2.8.7: Namerané hrúbky skla a vykreslené teoretické závislosti pre niekoľko hrúbok skla.

Pri spracovávaní dát budeme postupovať analogicky ako pri predchádzajúcom meraní. Z dvojíc dát $[\alpha_i; \Delta_i]$ opäť dopočítame hrúbky skla h_i a pre každú z nich podľa pravidiel šírenia chýb určíme absolútnu chybu. Jej prevrátenú hodnotu následne použijeme ako váhu do váženého priemeru. Nakoniec dopočítame váženú výberovú smerodajnú odchýlku priemernej hrúbky skla podľa vzťahu (2.8.14).

Hrúbku skla pre jednotlivé dvojice nameraných dát počítame podľa vzťahu (2.8.17). K tomuto vzťahu potrebujeme odvodiť príslušný vzťah na šírenie chýb. Oproti predchádzajúcemu prípadu je tu však

jedna komplikácia – nemáme tu len jednoduché sčítanie/odčítanie, násobenie/delenie a umocňovanie/odmocňovanie, ale uhol nám vystupuje ako argument funkcií sínus a kosínus. Bez dôkazu uvidíme, že ak je uhol zaťažený absolútnou chybou $AE\alpha$, sínus je zaťažený chybou $AE(\sin \alpha) = |\cos \alpha|AE\alpha$ a kosínus chybou $AE(\cos \alpha) = |\sin \alpha|AE\alpha$.²⁶ Pri ďalšom odvádzaní vypustíme absolútnu hodnotu, pretože vieme, že narábame len s uhlami z prvého kvadrantu, pre ktoré sú sínus i kosínus kladné. Absolútna chyba n^2 je

$$AEn^2 = 2nAEn$$

a absolútna chyba $\cos^2 \alpha$ je

$$AE(\cos^2 \alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha AE\alpha.$$

Absolútna chyba výrazu pod odmocninou je potom

$$AE(n^2 - \cos^2 \alpha) = 2(nAEn + \sin \alpha \cos \alpha AE\alpha)$$

a jeho relatívna chyba

$$RE(n^2 - \cos^2 \alpha) = \frac{2(nAEn + \sin \alpha \cos \alpha AE\alpha)}{n^2 - \cos^2 \alpha}.$$

Relatívna chyba hrúbky skla je konečne

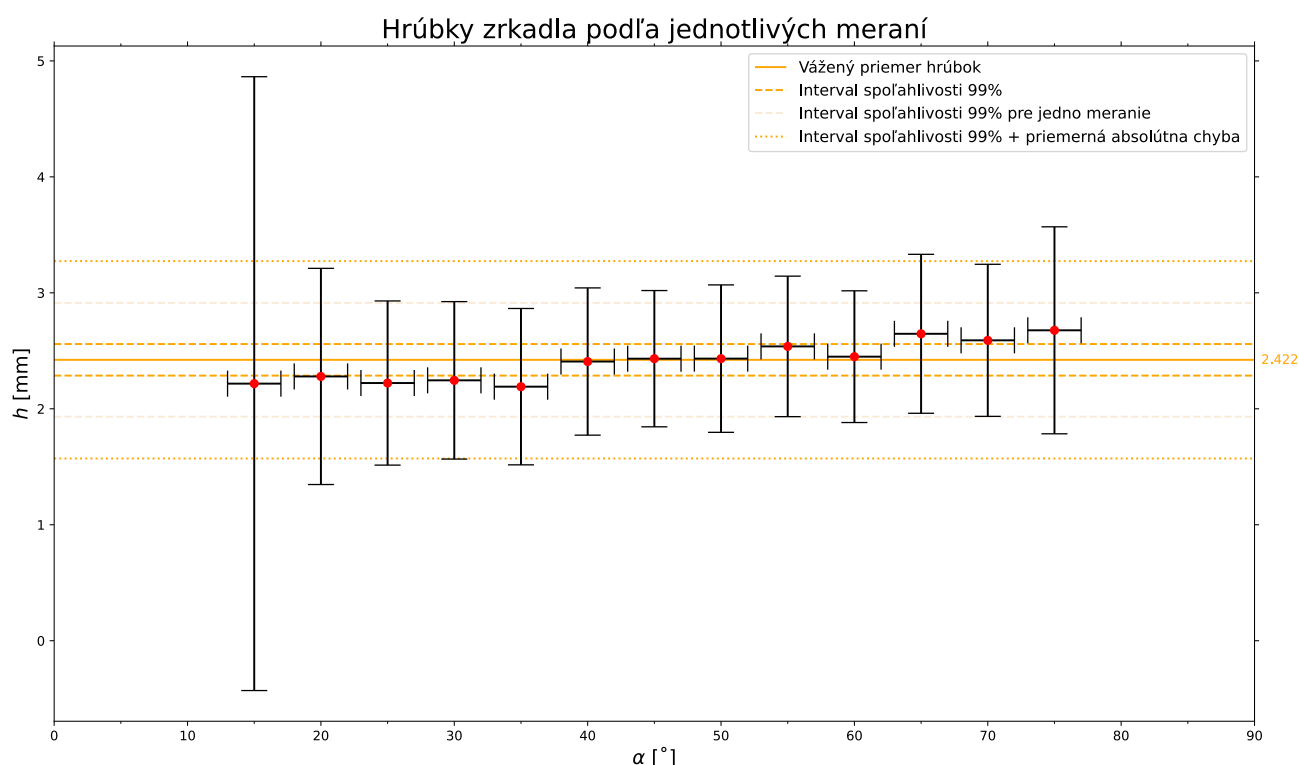
$$REh = RE\Delta + \frac{nAEn + \sin \alpha \cos \alpha AE\alpha}{n^2 - \cos^2 \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} AE\alpha$$

a absolútna chyba

$$AEh = REh \cdot \frac{\Delta \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}}{2 \sin \alpha}. \quad (2.8.19)$$

Tak a podľa k výsledkom (obrázok 2.8.8). Hrúbka skla vypočítaná váženým priemerom (2.8.9) nám vyšla $\bar{h}_w = 2,422$ mm. Priemerná veľkosť absolútnej chyby je $AE\bar{h}_w = 0,7148$ mm. Smerodajná odchýlka hrúbok je $s_{\bar{h}_w} = 0,045$ mm. Namerali sme 13 hrúbok skiel. Príslušný Studentov koeficient pre 12 stupňov voľnosti pre 99-percentný interval spoľahlivosti je 3,055, a teda krajná chyba nám vyšla 0,1361 mm. Už len sčítame krajnú chybu s priemernou veľkosťou absolútnej chyby, aby sme odhadli chybu pre najhorší možný scenár. Dostaneme, že hrúbka skla je $2,422 \pm 0,8510$ mm, čo predstavuje relatívnu chybu 35,13 %, čo predstavuje výrazné zlepšenie oproti predchádzajúcemu meraniu.

²⁶No dobre, ak to niekoho zaujíma (a rozumie deriváciám), tak mu poskytneme aj zdôvodnenie. Predstavme si, že veličinu x poznáme len s nejakou presnosťou $AE x$. To znamená, že v najhoršom prípade môže byť skutočná hodnota tejto veličiny $x \pm AE x$. Teraz si predstavme, že s takto nepresne určenej hodnoty veličiny chceme vypočítať veličinu y danú predpisom $y = f(x)$. Lenže vypočítať samotnú hodnotu veličiny y nestačí. Musíme určiť aj veľkosť chyby pre najhorší možný scenár. Ak predpokladáme, že chyba veličiny x je malá, resp. že funkcia $f(x)$ sa mení pomaly, tak $y \pm AE y = f(x \pm AE x) \approx f(x) \pm \frac{df}{dx}(x) AE x$. Odtiaľ vidíme, že $AE y = \left| \frac{df}{dx}(x) \right| AE x$. Absolútnu hodnotu sme tam doplnili preto, aby absolútna chyba bola vždy kladná. Pri šírení chýb totiž musíme vždy počítať s najhorším možným scenárom, a tým je ten, že všetky chyby sa nasčítajú s rovnakým znamienkom.



Obrázok 2.8.8: Vypočítané hrúbky skla s príslušnými nepresnosťami.

Len pre porovnanie uvedme, že metódou najmenších štvorcov by sme dostali hrúbku skla 2,401 mm. Teoretické závislosti (2.8.18) pre hrúbky skla určené jednotlivými spôsobmi (vážený priemer, aritmetický priemer, najmenšie štvorce, priame meranie) sú zobrazené na grafe 2.8.7.

Dvomi nezávislými meraniami sa nám podarilo určiť hrúbku skla zrkadla. Tieto hrúbky v rámci medzí presnosti medzi sebou súhlasia a súhlasia aj s priamo nameranou hrúbkou zrkadla, aj keď ju mierne nadhodnocujú, ale stále je to v rámci medzí presnosti merania. Poznamenajme ale, že sme namerali hrúbku skla zrkadla a nie celého zrkadla, keďže zrkadlo má na zadnej strane ešte tenkú odrazivú vrstvu, ktorej hrúbku nie je možné optickou metódou zmerať. Táto vrstvička je však oproti hrúbke skla zanedbateľne tenká a v rámci presnosti merania nespraví rozdiel.