

Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Predstavovanie prednášky

vzorák Zuzka, opravovala Zuzka

Pod platňu nie je možné natlačiť účastníkov ľubovoľne nahusto. Odhadnime, že každý účastník zaberá plochu $0,5\text{ m} \times 0,5\text{ m}$. Každý účastník preto musí odniesť časť platne nad sebou s tou istou základňou ($S = 0,25\text{ m}^2$). Pyramídy sú z najväčšej časti postavené z vápenca¹, ktorého hustota ρ je okolo 2800 kg/m^3 ². Podľa nariadení o Bezpečnosti a ochrane zdravia pri práci (podľa ktorých sa FKS samozrejme prísne riadi), môže mladý muž naraz niesť maximálne 50 kg . Pre jednoduchosť riešenia, budeme ďalej pracovať s touto hodnotou $m_{\max} = 50\text{ kg}$. Pre maximálne hrubú časť platne, ktorú unesie jeden účastník, tak platí

$$m_{\max} = V_{\max}\rho = Sh_{\max}\rho,$$

kde $V_{\max}$ je maximálny objem a $h_{\max}$ maximálna hrúbka časti platne nesenej jedným účastníkom. Pre maximálnu hrúbku potom platí

$$h_{\max} = \frac{m_{\max}}{S\rho} = \frac{50\text{ kg}}{0,25\text{ m}^2 \cdot 2800\text{ kg/m}^3} \doteq 0,07\text{ m} = 7\text{ cm}.$$

Keďže platňa na obrázku je minimálne dva krát taká hrubá, ako sú otroci pod ňou vysokí, obrázok zo zadania nie je realistický.

1.2 A predsa sa točí (okolo mňa)

vzorák Marek, opravoval Marek

Ak Zem považujeme za homogénnu guľu, znamená to, že sa otáča okolo svojej osi prechádzajúcej jej hmotným a aj geometrickým stredom. Ťažisko je pôsobiskom tiažovej sily, preto je lepšie hovoriť o hmotnom stede, ktorý je určený iba tvarom telesa a rozložením hmotnosti. Voľne sa točiacie telesá sa točia okolo svojich hmotných stredov, a preto v riešení budeme požadovať, aby sa hmotný stred sústavy Zem-mrakodrap nachádzal v mrakodrape. Ďalej budeme predpokladať, že zamýšľaný mrakodrap stavíme na rovníku, pretože výsledok nezávisí od toho, kde ho stavíme³. Odvodenie, prečo to tak je, je na konci tohto vzorového riešenia. Na rovníku sa situácia predstavuje najjednoduchšie z dôvodov voľby súradnicovej sústavy. Budeme počítať s polomerom Zeme $R = 6378\text{ km}$.

Zavedme súradnicovú sústavu, ktorej počiatok sa nachádza v hmotnom strede Zeme, os x je orientovaná smerom k stredu podstavy mrakodrapu a os y je na ňu kolmá (smeruje k pólu). V takto zvolenej sústave bude y -ová súradnica spoločného hmotného stredu sústavy nulová a zaujíma nás iba jeho poloha vzhľadom na os x .

Pozrime sa bližšie na prvý prípad, teda keď materiál na stavbu mrakodrapu nepochádza zo Zeme. Nech M_Z je hmotnosť Zeme, R jej polomer, T_Z hmotný stred a ρ hustota; m nech je hmotnosť mrakodrapu výšky h a

¹https://sk.wikipedia.org/wiki/Egyptsk%C3%A9_pyram%C3%ADy

²<http://www.geology.cz/aplikace/encyklopedie/term.pl?t=9>, a nie, v menovateli to nie je meter na tridsiatu druhú.

³Jediná výnimka je stavba na póloch. Vtedy prechádza rotačná os vždy celým mrakodrapom.

dĺžkovej hustoty λ s hmotným stredom T_m . Dĺžková hustota je fyzikálna veličina, ktorá vyjadruje hmotnosť dĺžkovej jednotky telesa, v našom prípade hmotnosť časti mrakodrapu, ktorá sa na výšku meria 1 m. Polohu spoločného hmotného stredu označme T . Symbolom $x(\cdot)$ označujeme x -ové súradnice hmotných stredov. Polohu hmotného stredu sústavy určíme vzťahom

$$x(T) = \frac{M_Z x(T_Z) + m x(T_m)}{M_Z + m} = \frac{m x(T_m)}{M_Z + m}, \quad (1.2.1)$$

kde sme využili, že

$$x(T_Z) = 0.$$

Okrem toho vieme, že

$$x(T_m) = R + \frac{h}{2}$$

a

$$m = \lambda h.$$

Spoločný hmotný stred sa bude nachádzať vo vnútri mrakodrapu vtedy, keď bude aspoň na povrchu Zeme, rátajme teda s

$$x(T) = R.$$

Po dosadení máme

$$\frac{m(R + \frac{h}{2})}{M_Z + m} = R, \quad (1.2.2)$$

čo sa dá upraviť na

$$M_Z R = \frac{mh}{2} = \frac{\lambda h^2}{2}.$$

Výsledkom teda je

$$h = \sqrt{\frac{2M_Z R}{\lambda}} \doteq 7,129\,58 \cdot 10^{12} \text{ m}.$$

Teraz sa pozrime na prípad, kedy sa na stavbu použije materiál zo Zeme. To, že mrakodrap je postavený z materiálu zo Zeme neznamena, že je celý vyplnený, ale stále v sebe má miestnosti, chodby atď., teda jeho hustota ako celku (nie len stien) je menšia ako hustota Zeme, konkrétne má stále dĺžkovú hustotu λ zo zadania. Označme M_z hmotnosť Zeme po jeho odobratí a r jej nový polomer.

$$M_z = M_Z - m$$

Hmotnosť mrakodrapu vieme určiť aj ako hmotnosť guľovej vrstvy, ktorú sme zo Zeme odobrali

$$m = \lambda h = \frac{4}{3} \pi \rho (R^3 - r^3),$$

odkiaľ vieme vyjadriť nový polomer Zeme

$$r = \sqrt[3]{R^3 - \frac{3\lambda h}{4\pi\rho}}.$$

Opäť chceme, aby hmotný stred sústavy bol na povrchu Zeme, a použijeme vzťah analogický k rovnici 1.2.2

$$x(T) = r = \frac{M_Z x(T_Z) + m x(T_m)}{M_Z + m} = \frac{m x(T_m)}{M_Z} = \frac{\lambda h (r + \frac{h}{2})}{M_Z}.$$

Po dosadení za r máme

$$\sqrt[3]{R^3 - \frac{3\lambda h}{4\pi\rho}} = \frac{\lambda h}{M_Z} \left(\sqrt[3]{R^3 - \frac{3\lambda h}{4\pi\rho}} + \frac{h}{2} \right).$$

Rovnica, ktorú sme dostali, nie je pekná. O riešení však vieme povedať, že očakávame niečo o trochu menšie ako bol predchádzajúci výsledok, lebo hmotnosť Zeme sa zmenšila. Pomocou vhodného softvéru dostaneme

$$h \doteq 7,129\,57 \cdot 10^{12} \text{ m}.$$

Vidíme, že relatívny rozdiel je naozaj malý, pričom mrakodrap má výšku o trochu väčšiu ako 1,5-násobok vzdialenosti Neptúna od Slnka.

Stavba mimo rovníka

Stavajme mrakodrap na rovnobežke, ktorá je od pólu vzdialená o uhol φ . Napríklad FKS miestnosť sa nachádza na 48. rovnobežke, takže ak by sme mrakodrap stavali miesto nej, uhol by bol $\varphi = 42^\circ$. Ak máme osi orientované rovnako ako pri mrakodrape na rovníku, tak rovnica 1.2.1 stále platí, čiže

$$(M_Z + m)x(T) = M_Z x(T_Z) + m x(T_m) = m x(T_m). \quad (1.2.3)$$

Avšak x -ová súradnica hmotného stredu mrakodrapu teraz je

$$x(T_m) = \left(R + \frac{h}{2} \right) \sin \varphi$$

a spodok mrakodrapu sa nachádza na x -ovej súradnici $R \sin \varphi$, a preto chceme, aby spoločný hmotný stred mal x -ovú súradnicu

$$x(T) = R \sin \varphi.$$

Tieto súradnice dosadíme do rovnice 1.2.3, čím dostaneme

$$(M_Z + m)R \sin \varphi = m \left(R + \frac{h}{2} \right) \sin \varphi.$$

Vidíme, že na oboch stranách sa $\sin \varphi$ vykrátí, a preto je jedno, kde mrakodrap stavíme. Rovnako aj v prípade, že materiál na stavbu odoberáme zo Zeme. Na póloch je $\varphi = 0^\circ$, čiže by sme mali rovnicu $0 = 0$, z ktorej nevieme zistiť nič. Preto sme tento prípad slovné ošetrili hneď na úplnom začiatku tohto vzorového riešenia.

1.3 Neotvárajte okná, klimatizácia bude neúčinná

vzorák KatkaN, opravovala KatkaN

V tejto úlohe máme zistiť rýchlosť električky po jednej hodine jazdy na špeciálny pohon – guľôčkové delo. Ako pri všetkých situáciách s pružnými zrážkami, aj tu budeme využívať najmä zákon zachovania hybnosti. V prvej časti budeme uvažovať, že strieľaním guľôčok sa nemení hmotnosť električky.

Najskôr si vypočítajme rýchlosť, ktorú udelíme električke vystrelením jednej guľôčky a jej následným trafením do terča. Na začiatku vystrelíme z dela guľôčku rýchlosťou $v = 100$ m/s. Tento výstrel spôsobí zmenu hybnosti električky v opačnom smere, než letí guľka. Keďže ani guľôčka ani, električka sa pred výstrelom nehýbali, zo zákona zachovania hybnosti vieme, že

$$m_g \cdot 0 \text{ m/s} + m_e \cdot 0 \text{ m/s} = m_g v_{gk} + m_e v_{ek}, \quad (1.3.1)$$

z čoho

$$m_g v_{gk} = -m_e v_{ek},$$

kde indexami g , e sú označené hmotnosti a rýchlosti guľôčky a električky, k značí konečnú rýchlosť. Vyjadrením v_{ek} a dosadením známych hodnôt dostaneme

$$v_{ek} = -\frac{m_g v_{gk}}{m_e} = -0,0001 \text{ m/s}.$$

Iba samotné vystrelenie jednej guľôčky teda udelí električke rýchlosť 0,0001 m/s.

Teraz započítame aj pružnú zrážku s terčom umiestneným v predku električky.⁴

$$m_g \cdot 100 \text{ m/s} + m_e \cdot 0 \text{ m/s} = m_g v_{gp} + m_e v_{ep},$$

Pomocou zákona zachovania mechanickej energie dokážeme odvodiť vzorec platiaci pre pružné zrážky

$$v_{gp} + v_{gk} = v_{ep} + v_{ek},$$

kde p značí počiatočnú rýchlosť. Z tohto vzťahu si vyjadríme v_{gk} a dosadíme do predošlej rovnice, odkiaľ máme

$$v_{ek} = \frac{2 \cdot 100 \text{ m/s} \cdot m_g}{m_g + m_e} \doteq 0,0002 \text{ m/s}.$$

Dostali sme, že samotné trafenie terča guľôčkou udelí električke rýchlosť 0,0002 m/s v kladnom smere.

Vystrelenie guľôčky a trafenie terča teda urýchli električku dokopy o $-0,0001 \text{ m/s} + 0,0002 \text{ m/s} = 0,0001 \text{ m/s}$. Každú sekundu sa takýchto guľôčok vystrelí 10 (vieme z frekvencie strieľania). Za jednu hodinu jazdy na takýto pohon sa vystrelí 36 000 guľôčok a električka bude mať rýchlosť

$$v_e = 3,6 \text{ m/s}.$$

To bol prípad so zanedbaním úbytku hmotnosti električky v dôsledku strieľania guľôčok.

BONUS

Pozrime sa teraz na BONUSOVÚ úlohu, kde tento úbytok zanedbávame.

⁴Tu rátame s priblížením, že počas letu a nárazu guľôčky do terča sa električka nehýbe. Ak by sme chceli byť úplne korektní, potrebovali by sme vedieť množstvo guľôčok naraz sa nachádzajúcich vo vzduchu (resp. vzdialenosť terča od dela). V takom prípade by sme ale na zistenie rýchlosti guľôčky po odrazení museli meniť vzťažnú sústavu. Chyba, ktorej sa však našim postupom dopúšťame je natoľko malá, že si túto aproximáciu môžeme dovoliť.

Označme si m hmotnosť električky, m_0 počiatočnú hmotnosť električky aj so všetkými guľôčkami, dm' hmotnosť vystrelených guľôčok, u rýchlosť strieľaných guľôčok vzhľadom k električke a v rýchlosť električky, dv malú zmenu rýchlosti električky za čas dt .

Zoberme si hybnosť celej našej sústavy v časoch t a $t + dt$. Zo zákona zachovania hybnosti vidíme, že

$$\begin{aligned} p(t) &= p(t + dt), \\ mv &= (m - dm')(v + dv) + dm'(v - u), \\ mv &= mv + m dv - v dm' - dm' dv + v dm' - u dm'. \end{aligned}$$

Člen $-dm' dv$ je takzvané „vyššieho stupňa malosti“. To znamená, že jeho hodnota je natoľko malá voči ostatným, že je v poriadku tento člen zanedbať, čo aj urobíme. Po vykrátení rovnakých členov nám ostane

$$u dm' = m dv.$$

Využijeme, že $dm' = -dm$, a prehodíme diferenciály a príslušné veličiny na rovnaké strany

$$\begin{aligned} -u dm &= m dv, \\ dv &= -u \frac{dm}{m}. \end{aligned}$$

Preintegrovaním oboch strán dostaneme rovnicu

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{m_0}^m -\frac{u}{m} dm,$$

ktorá po vyriešení integrálov vyzerá ako

$$v - v_0 = -u \ln \frac{m}{m_0}.$$

Vieme, že počiatočná rýchlosť električky bola $v_0 = 0$ m/s a počiatočná hmotnosť $m_0 = 10\,000$ kg. Hmotnosť m_g všetkých vystrelených guľôčok za hodinu je $m_g = 360$ kg. Výsledná rýchlosť električky je preto

$$v \doteq 3,67 \text{ m/s}.$$

Vidíme, že riešenie úlohy sa uvažovaním zmenšovania hmotnosti električky líši od pôvodného zhruba o 1,8 %.

Prečo rovnica 1.3.1 nie je zákon zachovania mechanickej energie

Malý protipríklad k nevhodnosti použitia zákona zachovania energie pri výpočte zmeny rýchlosti električky spôsobenej samotným vystrelením guľôčky: Predstavte si, že ste vo vesmíre a držíte guľu. Na začiatku sa nehýbate ani vy, ani guľa. Vaša celková mechanická energia je nulová. Potom ale guľu odhodíte. Zrazu sa hýbate aj vy, aj guľa, akurát v opačnom smere. Každopádne, kinetická energia vás oboch je väčšia ako nula, aj keď na začiatku nulová bola. To isté sa deje v električke pri vystreľovaní guľôčok.

1.4 Beh o čas

vzorák Jaro, opravovali Anomália a Péder

Otázka, o koľko sa predĺži deň vlastne znamená, o koľko sa spomalí rotácia Zeme. Zamyslime sa najskôr, prečo by sa mala zmeniť rýchlosť rotácie Zeme, keď sa ľudia rozbehnú. Na to, aby sa ľudia uviedli do pohybu, potrebujú silu, ktorá by na nich v tomto smere pôsobila. Nepotrebujeme doktorát z teoretickej fyziky, aby sme prišli na to, že tou silou je trenie. Lenže ak Zem pôsobí na ľudí silou, ľudia pôsobia tak isto veľkou silou opačného smeru na Zem. To znamená, že všetci ľudia v jednom momente začnú na povrch Zeme v dotyčnicovom smere pôsobiť silou. Aby táto sila spôsobila spomaľovanie rotácie Zeme, musí pôsobiť proti smeru rotácie Zeme, a teda ľudia sa musia rozbehnúť v smere jej rotácie.

Keď už vieme, k čomu pri rozbiehaní dochádza, pokúsme sa to nejako popísať rovnicami. Popísať to vyššie uvedeným spôsobom pomocou síl by bolo síce možné, no značne komplikované, keďže by sme museli spočítavať príspevky od všetkých ľudí. Naša fyzikálna skúsenosť nám však hovorí, že v takýchto úlohách vedú často zjednodušiť počítanie zákony zachovania. Poďme sa teda pokúsiť zistiť, či tu možno nejaký zmysluplne použiť.

Už na prvý pohľad je zjavné, že zákon zachovania energie nám nepomôže. Zo skúsenosti vieme, že pri behu sa vždy unavíme – pri rozbiehaní konáme prácu. (Mechanická) Energia sa teda nezachováva. A spočítať, akú veľkú prácu vykonáme, aby sme ju započítali do zákona zachovania energie, tiež nie je jednoduché.

So zákonom zachovania hybnosti to na prvý pohľad vyzerá nádejnejšie. Tretia sila medzi nohami bežcov a povrchom Zeme je z pohľadu sústavy Zem-ľudia vnútornou silou, teda nemení celkovú hybnosť sústavy. Problém však je, že tretia sila spôsobuje len zmenu rýchlosti rotácie a nie zmenu pohybu ťažiska, preto použitím tohto zákona získame len to, že sa rýchlosť pohybu ťažiska sústavy Zem-ľudia nezmení. Ani zákonom zachovania hybnosti sme si teda nepomohli.

Vo chvíľach najväčšieho zúfalstva je potrebné vytiahnuť najťažšie zbrane – zákon zachovania momentu hybnosti. Moment hybnosti je rotačným ekvivalentom hybnosti, takže tušime, že tu by sme konečne mohli pochodiť. Ak je hybnosť súčinom hmotnosti (lenivosti hmoty vykonávať translačný pohyb) a translačnej rýchlosti, tak moment hybnosti bude súčinom lenivosti hmoty rotovať – t. j. momentu zotrvačnosti – a uhlovej rýchlosti, teda $L = J\omega$. Už len stačí zrátať moment hybnosti na začiatku, na konci, dať ich do rovnosti a tešiť sa, že sme úlohu vyriešili.

Pre zjednodušenie života budeme Zem považovať za homogénne teleso – či už guľu s polomerom rovným rovníkovému polomeru Zeme $R = 6378$ km alebo rotačný elipsoid s rovnako veľkou hlavnou polosou – obe telesá majú rovnaký moment zotrvačnosti $J = \frac{2}{5}MR^2$. Nech je hmotnosť Zeme bez ľudí M a hmotnosť ľudí samotných m . Ďalej nech je uhlová rýchlosť Zeme na začiatku Ω , po rozbehnutí ľudí ω a nech ľudia bežia priemernou rýchlosťou $v = 10$ km/h.

Predpokladajme, že sú ľudia pred zúčastnením sa behu na Zemi rozmiestnení rovnomerne, teda formujú sféru s momentom zotrvačnosti $J = \frac{2}{3}mR^2$, a rotujú spolu so Zemou. Celkový moment hybnosti je v tomto prípade

$$L_1 = \left(\frac{2}{5}MR^2 + \frac{2}{3}mR^2 \right) \Omega.$$

Po rozbehnutí ľudí sa zmení uhlová rýchlosť Zeme na ω . Ľudia bežiaci okolo rovníka rýchlosťou v však majú uhlovú rýchlosť $\omega + \frac{v}{R}$. Navyše ale už nie sú rozmiestnení rovnomerne na povrchu gule, ale sú na rovníku, teda vytvárajú obruč, ktorej moment zotrvačnosti je mR^2 . Preto moment zotrvačnosti sústavy Zem-ľudia

po rozbehnutí ľudí je

$$L_2 = \underbrace{\frac{2}{5}MR^2\omega}_{\text{Zem}} + \underbrace{mR^2\left(\omega + \frac{v}{R}\right)}_{\text{ľudia}}.$$

Po dosadení do rovnosti už vieme vyjadriť

$$\omega = \frac{\left(\frac{2}{5}M + \frac{2}{3}m\right)\Omega - m\frac{v}{R}}{\frac{2}{5}M + m}.$$

Hľadané predĺženie dňa je teda

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\Omega} \frac{\left(\frac{1}{3}\Omega + \frac{v}{R}\right)m}{\left(\frac{2}{5}M + \frac{2}{3}m\right)\Omega - m\frac{v}{R}}.$$

Hmotnosť Zeme je približne $6 \cdot 10^{24}$ kg. Na Zemi žije asi osem miliárd ľudí a ak je priemerná hmotnosť človeka 60 kg, hmotnosť všetkých ľudí bude približne $5 \cdot 10^{11}$ kg. Vidíme, že $m \ll M$, a teda možno členy v menovateli obsahujúce m zanedbať.⁵ Ak uvážime, že $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, konečne dostávame

$$\tau \approx \left(\frac{5}{6} + \frac{5vT}{4\pi R}\right) \frac{m}{M} T.$$

Po dosadení číselných hodnôt⁶ zisťujeme, že deň sa predĺži o $\tau \approx 1,67 \cdot 10^{-12}$ h $\approx 6 \cdot 10^{-9}$ s.

Komentár k riešeniam

Vo vašich riešeniach ste zvyčajne neuvažovali, že celé ľudstvo nežije na rovníku, a teda ak sa chce okolo neho rozbehnúť, musí sa k nemu najskôr presunúť. To ale znamená, že sa tým mení rozloženie hmoty vzhľadom na os rotácie, čiže moment zotrvačnosti. Zmena momentu zotrvačnosti však spôsobuje zmenu uhlovej rýchlosti rotácie, aby sa zachoval celkový moment hybnosti. Keď sa ľudia presúvajú k rovníku, vzdiaľujú sa od osi rotácie, čím sa zväčšuje moment zotrvačnosti a uhlová rýchlosť rotácie preto klesá. Toto je dobre známy efekt krasokorčuliara.

V našom výsledku faktor $5/6$ predstavuje práve tento efekt. Druhý člen predstavuje spomalenie rotácie v dôsledku samotného rozbehnutia sa ľudí. Ak ste teda zabudli započítať efekt presunutia sa ľudí k rovníku, vo výsledku vám chýbal prvý člen. Keď si však vyčísľate druhý člen, je skoro 56-krát menší než prvý, preto ste dostali skoro o dva rády menší výsledok.

1.5 Štvorcovátor

vzorák MatusH, opravoval MatusH

Máme úlohu s nekonečnou odporovou sieťou, čo znamená, že sa budeme snažiť využiť klasický trik, trik spočívajúci v tom, že v odporovej sieti nájdeme časť, ktorá v sebe obsahuje seba samú (prípadne svoju zmenšenú verziu). Keďže v tomto prípade ide o fraktál, nemuselo by to byť náročné.

⁵ $\frac{v}{R} < \Omega$, a teda ak možno zanedbať člen $\frac{2}{3}m\Omega$, určite možno zanedbať aj člen $m\frac{v}{R}$.

⁶ Nemusíme sa ani unúvať premenou jednotiek. Výrazy $\frac{vT}{R}$ aj $\frac{m}{M}$ sú bezrozmerné, takže stačí zabezpečiť, aby sme hmotnosti dosádzali v rovnakých jednotkách a aby súčin vT mal rovnaký rozmer ako R . Rýchlosť je v kilometroch za hodinu a čas v hodinách, preto súčin vT je v kilometroch, čo sedí s jednotkou R . Výsledok teda bude v jednotkách T , čiže v hodinách.

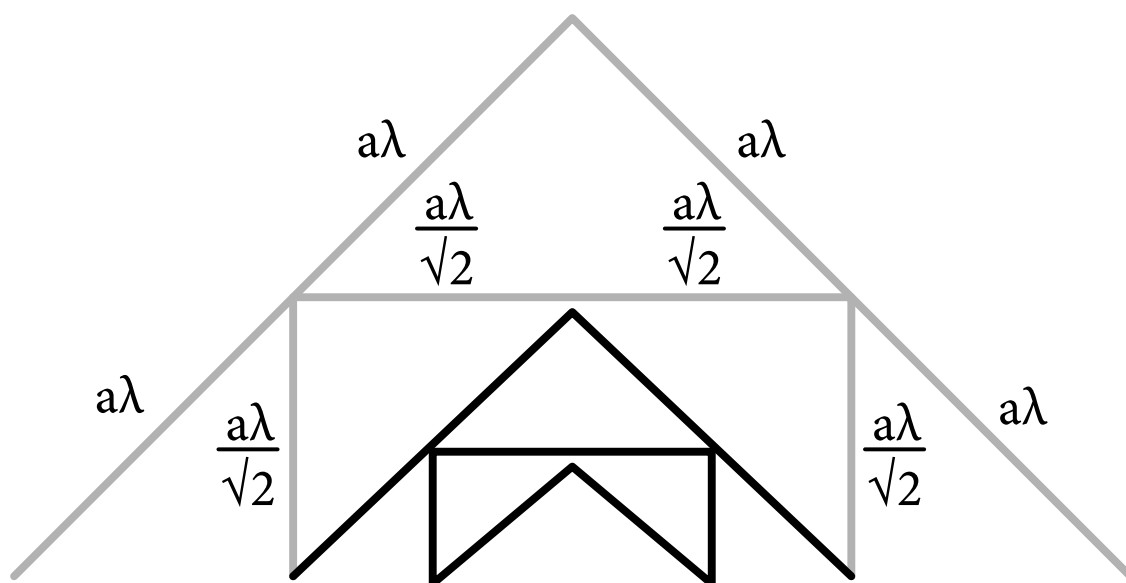
Pri riešení takisto využijeme druhý trik (ktorý nie je nutne spojený s nekonečnými sieťami) a zistíme, že obvod môžeme na niektorých miestach rozpojiť (čím zjednodušíme počítanie) tak, že odpor medzi dvomi zadanými bodmi sa nezmení. Tento trik je založený na tom, že v obvode existujú body, ktoré keby sme spojili, tak medzi nimi nebude tiecť prúd, lebo medzi nimi je nulové napätie. Spojenie takýchto dvoch bodov preto do schémy môžeme ale nemusíme zakresliť, lebo v konečnom dôsledku sa vlastne nič nezmení. Pozor, táto vlastnosť netečenia prúdu medzi dvomi bodmi je viazaná na fixné dva body, medzi ktorými meriame odpor. Ak by sme zvolili iné dva, medzi bodmi by už napätie mohlo byť.

Najjednoduchšie si to ukážeme na štyroch rovnakých rezistoroch, pričom sú zapojené paralelne na dvoch vetvách tak, že na každej vetve sú dva rezistory zapojené sériovo. Na oboch vetvách je rovnaké napätie, takže tam tečie aj rovnaký prúd. Keďže je tam rovnaký prúd, tak úbytok napätia na prvom rezistore vo vetve je pre obe vetvy rovnaký.

Pozrime sa na miesta medzi prvým a druhým rezistorom na jednotlivých vetvách. Napätie medzi nimi je nulové, lebo pred prvými rezistormi bolo rovnaké napätie a prechodom cez prvé rezistory kleslo na oboch vetvách rovnako. Preto, ak teraz tieto dve miesta spojíme, týmto spojom nebude tiecť žiadny prúd, čo znamená že situácia bude rovnaká ako keby spojené neboli.

My budeme využívať túto fintu opačne, a teda budeme hľadať miesta, ktoré môžeme rozpájať. Uvedomme si, že rozpájať môžeme aj uzly, keď do nich idú napríklad štyri vodiče. Korektnosť takéhoto rozpájania vyplýva z toho, že uzol, do ktorého idú štyri vodiče, vieme prekresliť ako dva uzly, do ktorých idú tri vodiče, pričom jeden z tých vodičov uzly prepája. Rozstrihnutím prepájacieho vodiča rozdelíme uzol na dva.

Takýmto spôsobom si vieme celý obvod rozdeliť na dva priamkou, ktorá spája protiľahlé vrcholy najväčšieho štvorca, medzi ktorými meriame odpor. Prúd medzi týmito dvomi polovicami obvodu nebude prúdiť kvôli symetrii obvodu. Zo symetrie vyplýva, že úbytok napätia po body na danej priamke je rovnaký v oboch častiach, a teda môžeme obvod v tom mieste rozdeliť na dva.



Obrázok 1.5.1: Polovica odporovej siete s rozpojenými uzlami na základe symetrie problému

Hľadáme teraz už len odpor jednej časti, lebo odpor druhej bude rovnaký, a keďže sú zapojené paralelne, celkový odpor bude polovica odporu jednej časti. Využitím úvah o rozpájaní obvodov vieme túto jednu časť prekresliť ako na obrázku 1.5.1, kde si môžeme všimnúť, že horný vrchol tmavšej časti sme odpojili od šedej časti. Toto je opodstatnené tým, že sieť na obrázku je symetrická podľa zvislej osi. Symetria nám zabezpečuje, že na všetkých bodoch osi symetrie bude rovnaký potenciál, lebo pokles napätia bude polovičný z celkového poklesu v obvode.

Zároveň si môžeme všimnúť, že tmavá časť obvodu je vlastne rovnaká ako celý obvod na obrázku, len dvakrát zmenšená.⁷ Ak si teda označíme R odpor celej časti na obrázku, odpor malej tmavšej časti bude $\frac{R}{2}$. S týmto poznatkom vieme vyjadriť odpor celej časti pomocou odporu tej časti ako

$$R = 2\lambda a + \frac{1}{\frac{1}{2\lambda a} + \frac{\sqrt{2}}{2\lambda a} + \frac{1}{\frac{2\lambda a}{\sqrt{2}} + \frac{R}{2}}}, \quad (1.5.1)$$

kde prvý člen je za dva drôty na začiatku a na konci a druhý člen za paralelne zapojené tri vetvy v strede⁸. Po dlhých, no vo svojej podstate priamočiarych algebrických úpravách rovnice 1.5.1, vieme vyjadriť odpor polovice odporovej siete ako

$$R = \frac{-2 + 2\sqrt{1 + 2(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 2)}}{1 + \sqrt{2}} a\lambda, \quad (1.5.2)$$

kde pri riešení kvadratickej rovnice zoberieme znamienko plus, lebo s mínusom by sme dostali záporný odpor, čo určite nie je fyzikálne správne.

Na zistenie celkového odporu nám stačí zobrať polovicu odporu jednej vetvy, lebo ako sme už spomínali, takéto vetvy sú zapojené dve paralelne. Preto odpor medzi dvomi protiľahlými vrcholmi fraktálu z vpísaných štvorcov je

$$R_{\text{celk.}} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 2)}}{1 + \sqrt{2}} a\lambda. \quad (1.5.3)$$

1.6 Kolo, kolo mlynské

vzorák **Tomáš**, opravoval **Tomáš**

V tomto riešení budeme predpokladať, že lano, aj napriek tomu, že sa natiahne, bude mať stále rovnakú plochu prierezu ako pred roztočením. Novú dĺžku, ktorú lano dosiahne po roztočení, vieme vypočítať dvomi rôznymi postupmi. Buď môžeme zistiť, pri akej dĺžke lana sa naň pôsobiace sily vyrušia, alebo môžeme vypočítať, pri akej dĺžke nadobúda lano najmenšiu energiu. Začnime prvým spomenutým spôsobom.

Pred tým by sme si ale ešte mali čosi spomenúť o Youngovom module pružnosti. Ten je definovaný ako

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon},$$

⁷Treba si domyslieť, ako tmavšia časť pokračuje ďalej smerom do stredu.

⁸Táto rovnica opisuje vlastne akúsi vnútornú konzistenciu riešenia.

kde σ je napätie v lane, teda sila F_t v lane vydelená jeho plochou prierezu S , a ε je relatívne predĺženie, čiže rozdiel novej dĺžky L' a starej dĺžky L vydelený pôvodnou dĺžkou L . Preto

$$E = \frac{F_t}{S} \frac{L}{L' - L},$$

odkiaľ si vyjadríme silu v lane spôsobenú jeho natiahnutím ako

$$F_t = ES \frac{L' - L}{L}. \quad (1.6.1)$$

Tu si zároveň všímame podobnosť s pružinou, ktorá pôsobí silou

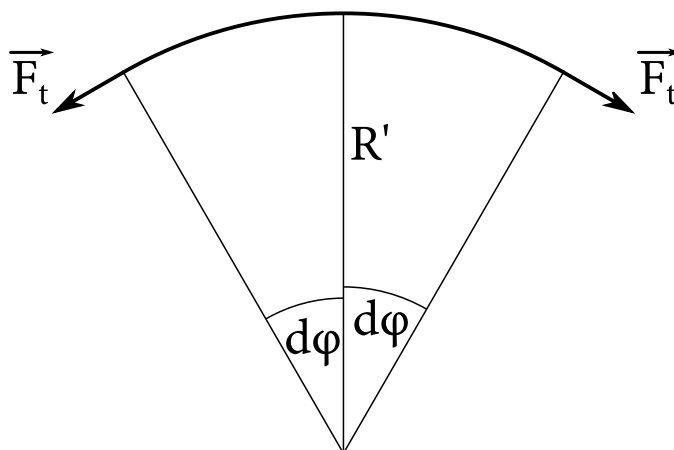
$$F_p = kx,$$

kde x je predĺženie, čiže v prípade nášho lana $x = L' - L$, a preto sa lano správa ako pružina s tuhosťou

$$k = \frac{ES}{L}. \quad (1.6.2)$$

Prístup cez sily

Nakreslime si obrázok 1.6.1, na ktorom je zobrazený kúsok lana po jeho roztočení. Celé lano má dĺžku L' a nový polomer kružnice, ktorú lano tvorí, označme R' . Pozrime sa na veľmi malý kúsok lana prisluchajúceho k stredovému uhlu kružnice $2d\varphi$. Oproti pôvodnému stavu sa o čosi natiahol, a preto si k sebe priťahuje susedné časti lana silou F_t . Presne to isté ale robia aj tie susedné časti. Preto na náš kúsok lana pôsobia na jeho koncoch sily veľkosti F_t od susedných častí. Je tu však ešte tretia sila – odstredivá. A nová dĺžka L' je práve taká, že vektorový súčet týchto troch síl je nulový. Je zrejmé že zložky síl F_t , ktoré majú smer dotyčnice ku kružnici sa odčítajú, a teda budeme riešiť len zložky síl smerom do stredu kružnice.



Obrázok 1.6.1: Lano po roztočení

Keďže lano má všade rovnaký Youngov modul pružnosti E , tak relatívne preĺženie celého lana je rovnaké, ako relatívne predĺženie ľubovoľného kúska lana, teda aj nášho. To znamená, že veľkosť síl F_t sme si vyjadrili už v rovnici 1.6.1. Potrebujeme ich zložku v smere do stredu kružnice, ktorá je z pravouhlého trojuholníka

jednoducho

$$F_{t, \text{str}} = ES \frac{L' - L}{L} d\varphi,$$

kde sme využili, že uhol $d\varphi$ je veľmi malý, a teda $\sin d\varphi \approx d\varphi$.

Odstredivú silu vo všeobecnosti rátame ako $F_{\text{od}} = m\omega^2 R$, pričom v našom prípade vieme hmotnosť kúska lana zistiť z trojčlenky ako $m = M \frac{dL'}{L'}$. Keďže dĺžka kúska je $dL' = 2R' d\varphi$, jeho hmotnosť je $m = M \frac{2R' d\varphi}{L'}$. Vzdialenosť od osi otáčania je R' . Preto na kúsok lana pôsobí odstredivá sila

$$F_{\text{od}} = M \frac{2R' d\varphi}{L'} \omega^2 R'.$$

Proti nej pôsobia dve sily $F_{t, \text{str}}$, čiže

$$\begin{aligned} F_{\text{od}} &= 2F_{t, \text{str}}, \\ M \frac{2R' d\varphi}{L'} \omega^2 R' &= 2ES \frac{L' - L}{L} d\varphi, \\ M \frac{R'^2}{L'} \omega^2 &= ES \frac{L' - L}{L}, \\ M \frac{L'}{4\pi^2} \omega^2 &= ES \frac{L' - L}{L}, \\ L' &= \frac{L}{1 - \frac{M\omega^2 L}{4\pi^3 E r^2}}, \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

pričom pri úpravách sme využili aj, že $R' = \frac{L'}{2\pi}$ a $S = \pi r^2$. Celkové predĺženie teda je

$$L' - L = L \frac{\frac{M\omega^2 L}{4\pi^3 E r^2}}{1 - \frac{M\omega^2 L}{4\pi^3 E r^2}}. \tag{1.6.4}$$

Prístup cez energie

Lano zo zadania v sebe uchováva dve energie – jednu kvôli tomu, že sa predĺžilo, a druhú odhalíme, ak sa presunieme do neinerciálnej sústavy rotujúcej spolu s lanom. V nej pôsobí odstredivá sila veľkosti $F_{\text{od}} = m\omega^2 R$ smerom od stredu. Preto, ak by sme v tejto sústave chceli ísť smerom do stredu, musíme konať prácu proti odstredivej sile, zatiaľ čo pri pohybe od stredu koná odstredivá sila prácu na nás. To znamená, že sa nachádzame v silovom poli, o ktorom vieme, že sila závisí od výchylky. Preto môžeme zdefinovať odstredivú potenciálnu energiu $E_{\text{od}} = -\frac{1}{2} M \omega^2 R'^2 = -\frac{M\omega^2}{8\pi^2} L'^2$ rovnako, ako pružina, čiže naše lano, má potenciálnu energiu pružnosti $E_p = \frac{1}{2} k (L' - L)^2$. Tuhosť lana sme už vyjadrili v rovnici 1.6.2, preto $E_p = \frac{1}{2} \frac{ES}{L} (L' - L)^2$. Odstredivá potenciálna energia má záporné znamienko, lebo smerom od stredu klesá⁹, ale energia pružnosti smerom od stredu rastie, keďže tým sa lano predlžuje. No a lano nadobudne presne takú dĺžku L' , aby jeho celková energia bola čo najmenšia. To znamená, že hľadáme minimum súčtu energie pružnosti a odstredivej

⁹Smerom od stredu koná odstredivá sila prácu, teda nás urýchľuje. To je ako keby sme išli dole z kopca. Vtedy nás urýchľuje gravitačná sila a naša gravitačná potenciálna energia klesá.

energie

$$\frac{d(E_p + E_{od})}{dL'} = \frac{d}{dL'} \left(\frac{1}{2} \frac{ES}{L} (L' - L)^2 - \frac{M\omega^2}{8\pi^2} L'^2 \right) \stackrel{!}{=} 0,$$

$$\frac{ES}{L} (L' - L) - \frac{M\omega^2}{4\pi^2} L' = 0.$$

Túto rovnicu sme už ale vyriešili, pretože to je rovnica 1.6.3. Preto, pochopiteľne, aj týmto spôsobom dostaneme rovnaký výsledok.

Poznámka k správnosti výsledku

Z rovnice 1.6.4 vidíme, že predĺženie je záporné, ak $M\omega^2 L > 4\pi^3 Er^2$. Mohlo by sa teda zdať, že výsledok je nepravý, pretože predĺženie lana v tejto úlohe predsa musí byť za každých okolností kladné. Dôvodom je rovnica 1.6.1, ktorá hovorí, že ťahová sila v lane je priamo úmerná predĺženiu lana $L' - L$. Toto však platí iba pre predĺženia, ktoré sú dostatočne malé voči pôvodnej dĺžke lana L , čiže

$$\frac{L' - L}{L} \ll 1.$$

Ľavú stranu vieme vyjadriť z rovnice 1.6.4, odkiaľ máme

$$\frac{\frac{M\omega^2 L}{4\pi^3 Er^2}}{1 - \frac{M\omega^2 L}{4\pi^3 Er^2}} \ll 1,$$

čo po jednoduchšej úprave prejde na

$$M\omega^2 L \ll 2\pi^3 Er^2.$$

Naše riešenie je teda správne iba pri splnení tejto podmienky. Prípád $M\omega^2 L > 4\pi^3 Er^2$ túto podmienku nespĺňa, a preto nás nemusí trápiť, že dáva záporné predĺženie.

1.7 Tréning v mušej váhe

vzorák Jaro, opravoval Jaro

Označme si bubliny písmenami „A“ a „B“. Ich polomery sú r_A a r_B a majú objemy $V_{A,B} = \frac{4}{3}\pi r_{A,B}^3$. Je v nich N_A , resp. N_B molekúl vzduchu. Teplota vzduchu v ich vnútri je $T_A = T_B = T_0$, kde T_0 je teplota vzduchu v miestnosti. Tlak vo vnútri bublín je o kapilárny tlak väčší oproti atmosférickému tlaku p_0 . Pre kapilárny tlak vo vnútri bubliny platí $p_k = \frac{4\sigma}{r}$, kde σ je povrchové napätie a r je polomer bubliny, teda $p_{A,B} = p_0 + \frac{4\sigma}{r_{A,B}}$.

Ak $r_A > r_B$, tak zrejme $p_A < p_B$. Vzduch má tendenciu tiecť z miest s vyšším tlakom do miest s nižším tlakom, preto po otvorení ventilu začne pretekať vzduch z menšej bubliny do väčšej. Tým sa však ešte prehĺbi tlakový rozdiel medzi bublinami, a tak sa bude rýchlosť pretekania vzduchu medzi bublinami zväčšovať, až kým všetok vzduch z menšej bubliny nepretečie do väčšej.

Označme si polomer zjednotenej bubliny bezprostredne po zjednotení r_1 . Jej objem bude $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$. Bude obsahovať $N = N_A + N_B$ molekúl vzduchu, bude mať neznámu teplotu T_1 a neznámy tlak $p_1 = p_0 + \frac{4\sigma}{r_1}$.

Ako sme si už vysvetlili, pretekание vzduchu medzi bublinami prebehne rýchlo, preto ho možno považovať za adiabatický proces. Pre adiabatický dej platí $pV^\kappa = \text{konšt.}$, kde κ je adiabatická konštanta. Pre ideálny dvojatómový plyn je $\kappa = \frac{7}{5}$.

Napišme adiabatickú rovnicu samostatne pre vzduch z bubliny „A“ a samostatne pre vzduch z bubliny „B“. Problém je, že takto získame len dve rovnice – po jednej pre každú bublinu. Keďže však nevieme, aký objem po zjednotení bublín zaberá vzduch z jednotlivých bublín, máme až tri neznáme – dva neznáme objemy a jeden spoločný tlak, ktorý je po zjednotení rovnaký pre vzduch pochádzajúci z jednej i druhej bubliny. Našťastie však objem a tlak nie sú nezávislé, ale sú previazané kapilárnym tlakom. Dostávame teda sadu rovníc

$$\begin{aligned} p_A V_A^\kappa &= p_1 V_{A1}^\kappa, \\ p_B V_B^\kappa &= p_1 V_{B1}^\kappa, \\ p_1 &= p_0 + \frac{4\sigma}{r_1}, \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

kde V_{A1} a V_{B1} sú objemy, ktoré zaberá vzduch z bubliny „A“, resp. „B“ v novej zjednotenej bubline, teda

$$V_{A1} + V_{B1} = \frac{4}{3}\pi r_1^3. \quad (1.7.2)$$

Z jednotlivých rovníc 1.7.1 vyjadríme V_{A1} , V_{B1} , r_1 a (spolu s rovnicami pre objemy jednotlivých bublín) dosadíme ich do rovnice 1.7.2, čím ich všetky zlúčime do jednej

$$\left(\frac{p_A}{p_1}\right)^{1/\kappa} r_A^3 + \left(\frac{p_B}{p_1}\right)^{1/\kappa} r_B^3 = \left(\frac{4\sigma}{p_1 - p_0}\right)^3$$

pre neznámy tlak p_1 . Tú vyriešime numericky alebo odčítaním z grafu pre hodnoty parametrov zo zadania a dopočítame hľadaný polomer podľa vzťahu $r_1 = \frac{4\sigma}{p_1 - p_0}$. Dostaneme $r_1 \doteq 10,402\,95$ cm.

Nájsť polomer bubliny po vyrovnaní teploty s okolím je podstatne jednoduchšie. Stavové veličiny sú medzi sebou prepojené stavovou rovnicou. Pre jednotlivé bubliny možno písať

$$\begin{aligned} p_A V_A &= N_A k T_0, \\ p_B V_B &= N_B k T_0. \end{aligned}$$

Sčítaním týchto dvoch rovníc dostaneme

$$p_A V_A + p_B V_B = (N_A + N_B) k T_0 = N k T_0.$$

Pre zjednotenú bublinu po vyrovnaní teplôt platí

$$p_2 V_2 = N k T_0,$$

teda

$$p_A V_A + p_B V_B = p_2 V_2.$$

Zároveň vieme, že

$$p_2 = p_0 + \frac{4\sigma}{r_2},$$

a preto

$$p_A r_A^3 + p_B r_B^3 = \left(p_0 + \frac{4\sigma}{r_2}\right) r_2^3.$$

Odtiaľ opäť numericky/graficky pre hodnoty zo zadania dostaneme $r_2 \doteq 10,403\,95\text{ cm}$.

Komentár k riešeniam

Časté chyby

1. Úplne najčastejšou chybou vo vašich riešeniach bolo, že ste prehlásili, že objem vzduchu v zjednotenej bubline bezprostredne po pretečení bude jednoducho súčtom objemov vzduchu v jednotlivých bublinách. Toto je však pravda pre počty častíc, resp. látkové množstvá, nie pre objemy. Treba si uvedomiť, že vzduch v bublinách je nejako stláčaný kapilárnym tlakom. Lenže v samostatných bublinách, ktoré sú menšie, je stláčaný viac. To znamená, že po zjednotení, keď pôsobí menší kapilárny tlak, sa môže vzduch viac rozpäť, a tým pádom bude zaberat' väčší objem než $V_A + V_B$.
2. Niektorí ste sa snažili riešiť úlohu pomocou zachovania energie. Uvažovali ste, že po zjednotení bublín sa zmenší povrch, a tým klesne povrchová energia σS . Predpokladali ste, že táto energia sa premení na vnútornú energiu vzduchu v bubline, čím sa zvýši jeho teplota. Zabudli ste však, že podľa prvej vety termodynamickej sa dodaná energia môže nielen zmeniť na vnútornú energiu plynu, ale môže sa spotrebovať aj na konanie práce. A v tomto prípade, ako sme už uviedli v predchádzajúcom bode, vzduch v bublinách expanduje, čiže koná prácu. Preto v skutočnosti teplota vzduchu v bublinách naopak ešte poklesne. To možno vidieť z rovnice adiabaty v tvare $p^{\kappa-1}/T^{\kappa} = \text{konšt.}$, ktorá hovorí, že pokles tlaku znamená pokles teploty.

Homogenizovaná adiabatická expanzia

Zopár z vás prišlo s modelom, že po otvorení ventilu sa tlak vo vnútri najskôr vyrovná a až potom dôjde k pretečeniu vzduchu z menšej bubliny do väčšej a adiabetickej expanzii. Argumentom pre takýto model by mohlo byť, že vzduchu bude trvať kratšie presunúť sa tak, aby sa vyrovnali tlaky, oproti času potrebnému na zmrštenie jednej bubliny a nafúknutie druhej. Problém však je, že tlak je prejavom zrážok molekúl vzduchu s bublinou a pri zmršťujúcej sa bubline dochádza k tým zrážkam častejšie, preto v tejto časti bude zákonite vyšší tlak a tento vyšší tlak tu bude zmršťovaním menšej bubliny zachovávaný bez ohľadu na to, že tlak sa bude chcieť pretekaním vzduchu vyrovnáť. V praxi preto bude v systéme bublín skôr nejaký gradient tlaku než homogénny tlak v celom objeme.

Ak by sme predsa len pripustili tento homogenizovaný model, pre homogenizovaný tlak a objem by platilo $p_H V_H = p_A V_A + p_B V_B$ (zo súčtu látkových množstiev) a $V_H = V_A + V_B$. Pre následnú adiabatickú expanziu by sme mali $p_H V_H^{\kappa} = p_1 V_1^{\kappa}$, kde $p_1 = p_0 + \frac{4\sigma}{r_1}$. Zlúčením rovníc dostaneme

$$\frac{p_A r_A^3 + p_B r_B^3}{r_A^3 + r_B^3} (r_A^3 + r_B^3)^{\kappa} = \left(p_0 + \frac{4\sigma}{r_1} \right) r_1^{3\kappa}.$$

Numerickým riešením rovníc dostaneme $r_1 \doteq 10,402\,95\text{ cm}$, čo je, v rámci presnosti numerického riešenia, rovnaký výsledok ako pre model uvažovaný vo vzoráku.

Len pre úplnosť dodajme, že vo vzoráku predpokladáme, že nedochádza k vzájomnému premiešavaniu vzduchu z jednotlivých bublín, pričom pripúšťame vnútorné vyrovnávanie tlakov či prechod tepla. Dá sa to predstaviť tak, ako keby bola medzi vzduchom z jednotlivých bublín nekonečne ľahká, dokonale poddajná membrána. Je zrejmé, že takáto membrána nijako neovplyvňuje stavové veličiny nikde vo vnútri bublín, preto takýto model lepšie popisuje realitu. Vo výsledku tak napríklad takýmto modelom vieme dostať rozdielne

teploty v jednotlivých častiach bubliny. Toto však dáva zmysel. Vzduchu z menšej bubliny po zjednotení klesne tlak viac, preto by sa mal aj viac ochladiť. Toto homogenizovaný model nepripúšťa.

1.8 Hrátky s plastelínou

vzorák Anna Oleárová, opravoval Krtko

Ako vzorové riešenie uvádzame veľmi pekné riešenie od Anny Oleárovej.

Aparatúra

- Špagát
- Nádoba
- Menšia nádoba
- Klinec
- Plastelína
- Vreckovky a ponožky (ako výstuž)
- Kovové ložiskové guľôčky (ako závažia)
- Šublera



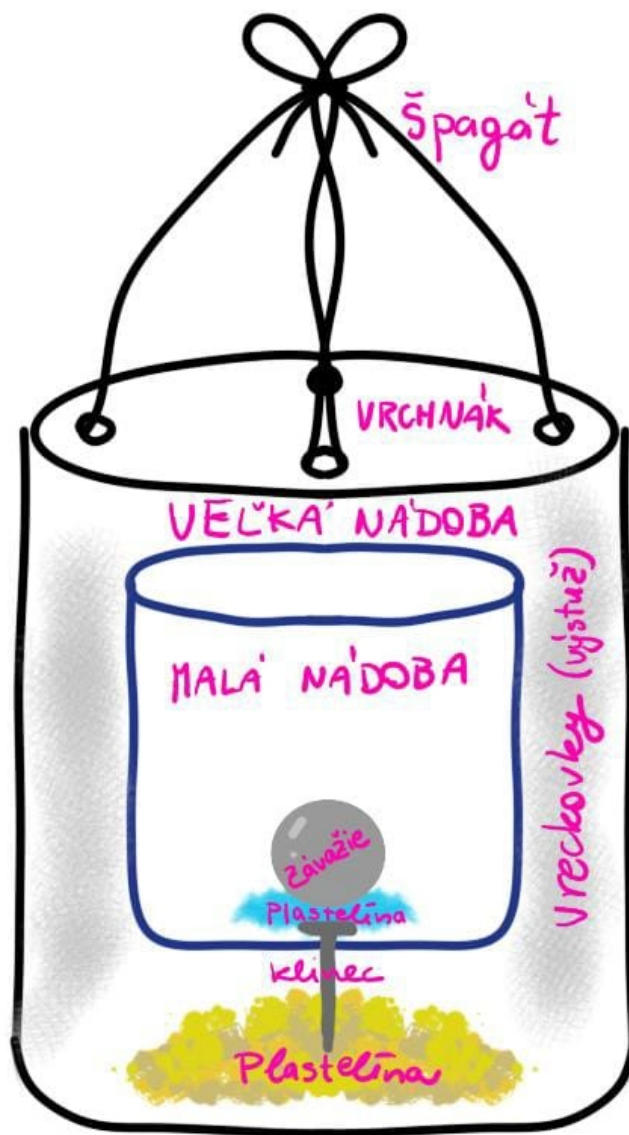
Obrázok 1.8.1: Pomôcky

Zostrojenie aparatury

1. Do väčšej nádoby zvrchu vyvrtám štyri diery a cez ne prepchám špagáty tak, aby som ich vedela potom spojiť a zaviazať na ich koncoch mimo nádoby.
2. Do tejto nádoby napchám na spodok plastelínu. (Medzi experimentami sa vždy vyberie a premieša, nech nie je čiastočne stlačená na miestach, kde bolo predtým závažie. Zároveň je to aj opatrenie potrebné pre čo najpodobnejšie začiatkové podmienky, lebo plastelína na vzduchu tvrdne. Takto

zabezpečím, že bude vždy už mäkká a rovnako stlačiteľná, aby sme reálne mali nejaké výsledky na zmeranie.)

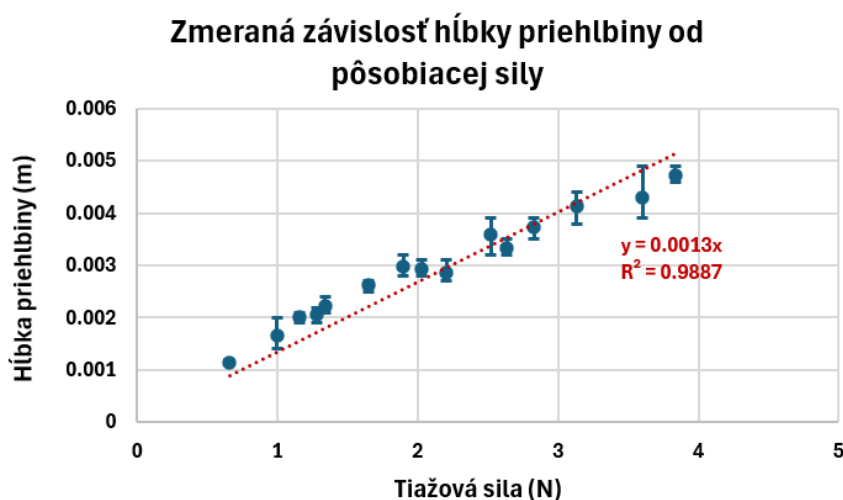
3. Do menšej nádoby vyvrtám zospodu dierku, cez ktorú prepchám kliniec tak, aby dno nádoby bolo „vo vzduchu“ a nádoba postávala iba na tom klinci. (Toto opatrenie bolo potrebné, nakoľko pri väčšej ploche ako špička klinca nebolo možné zmerať hĺbku vzniknutej priehlbiny. Aj s klincom totiž nebola väčšina väčšia ako 5 mm.)
4. Do nádoby (na plastelínu) položím menšiu nádobku, do ktorej budem pokladať závažia. Táto nádobka sa opiera o výstuž vreckovkami vo väčšej nádobe dostatočne na to, aby udržala rovnováhu, ale zároveň jej výstuž nezabraňuje v poklese do plastelíny pod vplyvom tiažovej sily. Je dôležité, že všetky závažia pokladám do nádoby, ktorej sa nemení plocha dotyku s plastelínou (špička klinca) pri každom meraní (čo by sa dialo pri pokladaní čisto guľôčok). (Áno, kliniec sa rozširuje po hrote, ale rozširuje sa rovnako veľa pri každom meraní.) Takto sa plocha meniť nebude a uvidím priamy vzťah medzi hmotnosťou guľôčky, resp. tiažovou silou, ktorou pôsobí na dno a hĺbkou vzniknutej priehlbiny.



Obrázok 1.8.2: Náskres aparatury

Postup

Najprv sa zameriam na už spomenuté meranie závislosti pôsobiacej sily a hĺbky priehlbiny. Túto závislosť som zmerala pokladaním rôzne ťažkých guľôčok do kolísky. Vždy som ich tam nechala po dobu asi desiatich sekúnd. (Kebyže sú tam dlhšie, tak by vplývali iné javy do experimentu, lebo by sa to tak postupne zabáralo hlbšie a hlbšie a zároveň by tvrdla plastelína. Keďže to potom chce byť analogické s rotačným pohybom, kde sa tieto javy sa vyskytujú iným spôsobom, napríklad aj kvôli rôznemu prúdeniu vzduchu, nechávala som silu pôsobiť iba v krátkom časovom rámci. Navyše, kebyže to mám točiť minútu vkuse v rovnakej značnej rýchlosti, asi by som dosť umrela.) Posuvné meradlo som zabárala do priehlbiny, ktorú predtým vytvoril klinec, a zmerala najväčšiu hĺbku. Silu, ktorá pôsobila na klinec, vypočítam jednoducho ako $F_g = m_g g$, kde F_g je gravitačná sila, m_g je hmotnosť guľôčky a nádoby a g je tiažové zrýchlenie. Každé meranie som opakovala trikrát. Vyšla mi takáto závislosť na nasledovnom grafe.



Obrázok 1.8.3: Závislosť hĺbky priehlbiny od pôsobiacej sily

Vidíme, že s rastúcou hmotnosťou závažia lineárne stúpa aj hĺbka priehlbiny. Koeficient tohto rastu je $\kappa = 0,0013$. Fitla som pomocou Excelu do grafu teda lineárnu funkciu, ktorá má $R^2 = 0,9887$, čo je znak, že dosť dobre sedí. Nastavila som, že musí prechádzať bodom $[0, 0]$, pretože keď nepôsobíme na plastelínu žiadnou silou, logicky nevzniká jamka. Error bary sú výsledkom trojnásobného merania a odchýlky šublery (0,05 mm).

S týmto zistením sa môžeme presunúť do druhej časti. Ďalej máme za úlohu takúto kolísku roztočiť a zistiť maximálne dostredivé zrýchlenie, ktoré vieme dosiahnuť. Ako zistím toto dostredivé zrýchlenie? Zo vzťahu

$$F_D = m_g a_D.$$

Z nášho fitu sme zistili (po premene na základné jednotky), že $h = \kappa F$, pričom h je hĺbka priehlbiny v metroch a F je sila pôsobiaca na klinec. V prípade s rotáciou po kružnici sa táto sila bude rovnať odstredivej resp. dostredivej sile

$$\frac{h}{0,0013} = m_g a_D,$$

teda

$$a_D = \frac{h}{0,0013m_g}.$$

Hĺbku priehlbinky zmeriame a hmotnosť vieme. Tým pádom vieme zistiť želané zrýchlenie, aby sme zistili, aká presná je Péderova technika. Na základe základných vzorcov pre rovnomerný pohyb po kružnici (ktorý môžeme aplikovať v tomto prípade)

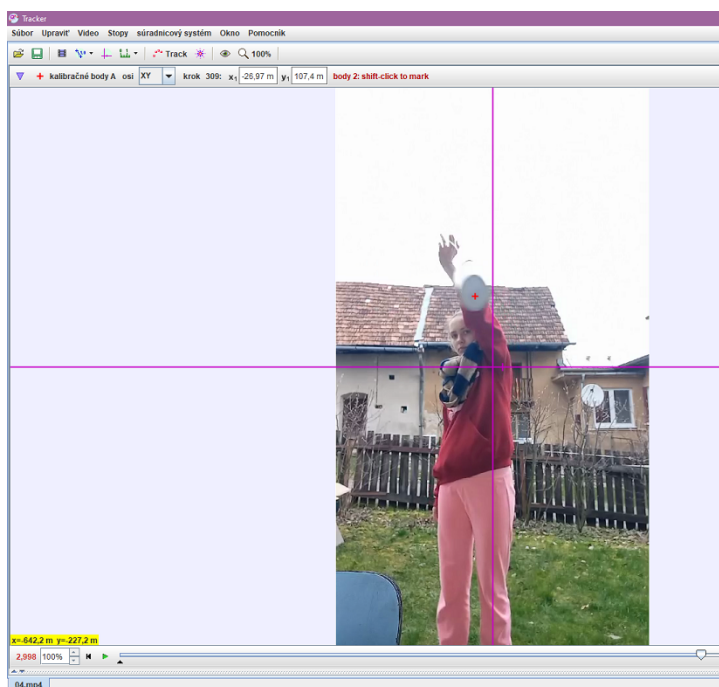
$$a_D = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r,$$

$$F_D = m_g \frac{v^2}{r},$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T},$$

vieme merať rýchlosť točenia a z nej si overiť presnosť.

Otáčanie kolísky som točila na telefón a v Trackeri som si spomalene pozrela záznam a z toho zistila, ako dlho mi trvala jedna otočka (za aký dlhý čas sa kolíska vrátila na tie isté súradnice). Z toho vieme zistiť rýchlosť. (Samozrejme, že pohyb nie je dokonale rovnomerný. Na začiatku sa kolíska iba rozbieha. Každé otočenie som zistila trvanie a rýchlosť som počítala z najrýchlejšieho otočenia. Celkovo sa vo finálnej priehlbine ukáže nakoniec iba najhlbšia priehlbina, ktorá vznikne pri najvyššej rýchlosti, ktorú som merala.)



Obrázok 1.8.4: Meranie v Trackeri

Zadanie hovorí, že chceme dosiahnuť čo najvyššie zrýchlenie. Ako to dosiahnuť vieme zistiť z predošlých vzorcov, z ktorých vyplýva, že chceme mať čo najväčšiu uhlovú rýchlosť a čo najväčší polomer kružnice otáčania ($a_D = \omega^2 r$). Používam tento vzorec a nie ten s rýchlosťou, lebo pri otáčaní človekom je limitujúci faktor práve uhlová rýchlosť otáčania (celú sústavu roztočím na približne podobnú uhlovú rýchlosť, bez ohľadu na

dĺžku špagátu). Hmotnosť objektu neovplyvňuje dostredivé zrýchlenie, lebo ako môžeme vidieť, nevyskytuje sa vo vzorci na jeho výpočet. S väčšou hmotnosťou ale prichádza aj väčšia potrebná dostredivá sila.

Čo znamená točenie pre aparáturu? V rukách špagát a celú sústavu točím nad hlavou čo najrýchlejšie ako sa mi dá. Po dotočení držím nádobu horizontálne a čo najrýchlejšie vytiahnem nádobu s guľôčkou (nech nevznikajú nepresnosti vtláčaním sa kvôli pôsobeniu gravitácie) a zmeriam hĺbku priehlbiny v plastelíne. Keďže sú priehlbiny pri točení hlbšie (lebo na ne pôsobí väčšie zrýchlenie), najprv do nich vsuniem tenučkú ihlu. Podľa toho, ako bola hlboko ponorená, odčítam z posuvného merania hodnotu hĺbky priehlbiny. Potom iba dopočítam zo vzťahu $a_D = h / (0,0013m_g)$ dostredivé zrýchlenie a porovnam s vypočítaným cez rýchlosť.

Najprv som to kvôli vyskúšaní funkčnosti aparatury vyskúšala s malým $r = 0,25$ m (tak, že som nádobu držala úplne pri bruchu) a $m = 0,288$ kg. V tomto prípade sa kliniec zaboril do hĺbky 10,9 mm a „plastelínové zrýchlenie“ vyšlo po dosadení do vzorca cca $a_p = 29,08$ m/s². Jedna perióda mi podľa trackovania vyšla $T = 0,673$ s. „Dopočítané zrýchlenie“ vyšlo $a_D = 21,79$ m/s². Plastelínové zrýchlenie bolo 133 % dopočítaného. Toto celkom sedelo, tak som to skúsila s väčším r .

Meranie som opakovala päťkrát. Hmotnosť zostala rovnaká ako predtým. Polomer som zväčšila predĺžením špagátu $r = 0,75$ m. (Kebyže ho predĺžim viac tak asi neudržím celú kolísku v kružnicovom pohybe a musela by som točiť menšou uhlovou rýchlosťou. To isté by spôsobila väčšia hmotnosť závaží.) Hĺbka bola v priemere $h = 18,9$ mm. Z toho vypočítané plastelínové zrýchlenie je $a_p = 50,29$ m/s² (Percentuálna odchýlka meraní: 7,62 %). Priemerná perióda bola $T = 0,96$ s. Z toho viem dorátať rýchlosť a teda aj zrýchlenie $a_D = 30,59$ m/s². (Percentuálna odchýlka meraní: 11,97 %).

Tabuľka nameraných hodnôt plastelínového zrýchlenia je nižšie.

h (m)	a_p (m/s ²)
0,017	45,2348
0,0186	49,4922
0,0196	52,153
0,218	58,007
0,0175	46,5652
	50,2904

Namerané hodnoty dopočítaného zrýchlenia sú v tabuľke nižšie.

T (s)	s (m)	ω (rad/s)	a_D (m/s ²)
1,016	4,7124	6,184 238	28,6836
1,033	4,7124	6,082 464	27,747 28
0,983	4,7124	6,391 847	30,641 78
0,882	4,712 389	7,123 793	38,061 32
0,899	4,712 389	6,989 083	36,635 46
0,9626			30,593 34

Ako môžeme vidieť, tieto hodnoty nie úplne sedia. Meranie plastelínou vyjde viac ako 1,6-násobok „reálnejšej“ hodnoty. A už len odhadovo vidíme, že 5g je príliš veľa na to, aby to bolo skutočné. Táto nepresnosť môže byť spôsobená viacerými faktormi.

Chyby merania

- *Točenie kolísky rukou.* Rýchlosť nebola úplne rovnomerná po celú dobu krútenia, predsa len som to točila rukou. Dráha taktiež nebola dokonale horizontálna. Do a z nej sa musela nádoba aj nejako dostať, takže kliniec na ňu pôsobil aj gravitačne počas krátkych chvíľ, kedy som malú nádobu vkladala a vyberala z väčšej.
- *Plastelína.* Rôzne tvrdne na vzduchu. Keď stvrdne, ťažšie sa klinču zabára. Aby som tomuto efektu čo najviac zabránila, vždy som plastelínu premiešavala medzi meraniami rukou, aby bola približne rovnako mäkká a aby nebola na niektorých miestach viac stlačená ako na iných. Snažila som sa ju prosté čo najviac homogenizovať.
- *Meranie šublerou.* Diera zanechaná klincom bola podobnej veľkosti ako hĺbkové meradlo šublery, čiže sa mohli navzájom rozrušiť. Navyše, keďže tie priehlbinky boli fakt malé, aj málo stačilo posunúť mimo a už by bol signifikantne iný výsledok. Merania som preto opakovala trikrát a pri hlbších priehlbínach použila ihlu ako pomôcku pre spresnenie.
- *Nerovnomerné rozloženie hmotnosti v nádobe.* Závažia som síce prílepovala na jej dno plastelínou a vypchávala ponožkami, aby držali na mieste a aby bola hmotnosť rozložená čo najrovnomernejšie, ale nie vždy sa to dalo dokonale.
- *Možný nepresný fit.* Prvú časť experimentálky som robila iba do určitej hmotnosti závaží. Je možné že sa začne trend správať inak pri extrémnejších prípadoch (napríklad pretože je ťažšie sa predierať stlačenejšou plastelínou). To by vysvetľovalo menšie nepresnosti pri meraniach nižšieho dostredivého zrýchlenia. Pri vyšších sa táto zmena princípu mohla prejavíť vo veľkosti nepresností.

Záver

Na zhrnutie, Péderova metóda vážne nie je presná na meranie odstredivého zrýchlenia. Je to spôsobené viacerými faktormi, ktoré som vyššie vymenovala. Pri pokuse o meranie najvyššieho možného zrýchlenia bol rozdiel v hodnote $19,7 \text{ m/s}^2$, čo je percentuálne 64 % reálnej.