

Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Nie až tak vytunená Plechovka

vzorák KatkaNed, opravovala KatkaNed

Úlohou bolo odhadnúť zrýchlenie Kubkovej nevytunenej plechovky a zrýchlenie dokonalého bežca. Následne bolo treba vypočítať, v akej vzdialenosti za bežcom bude Kubkovo auto v momente, keď bežec dosiahne svoju maximálnu rýchlosť 42 km/h. Tak sa na to poďme pozrieť.

Na internete sa vieme dočítať, že Usain Bolt, najrýchlejší bežec na Zemi, bežal so zrýchlením 9,5 m/s². Pre nášho dokonalého bežca teda môžeme rátať približne rovnaké zrýchlenie.

Ďalej bolo potrebné odhadnúť zrýchlenie Kubkovho auta. Priemerná „plechovka“ zrýchli z 0 km/h na 100 km/h zhruba za 9 až 12 sekúnd. Zrýchlenie odhadneme rýchlo zo vzťahu

$$v = a_k t \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{v}{t} \approx \frac{27,78 \text{ m/s}}{11 \text{ s}} \approx 2,53 \text{ m/s}^2.$$

Pri zrýchlení 9,5 m/s² bude bežcovi trvať čas t_b , kým dosiahne svoju maximálnu rýchlosť 42 km/h. Za tento čas sa bežec dostane do vzdialenosti s_b . Ostáva len dopočítať, do akej vzdialenosti s_k sa dostane Kubko na svojej plechovke za tento čas t_b :

$$t_b = \frac{v_b}{a_b} = \frac{\frac{42}{3,6} \text{ m/s}}{9,5 \text{ m/s}^2} \approx 1,23 \text{ s}.$$

$$s_b = \frac{1}{2} a_b t_b^2 = \frac{1}{2} 9,5 \text{ m/s}^2 \cdot (1,23 \text{ s})^2 \approx 7,19 \text{ m},$$

$$s_k = \frac{1}{2} a_k t_b^2 = \frac{1}{2} 2,53 \text{ m/s}^2 \cdot (1,23 \text{ s})^2 \approx 1,91 \text{ m}.$$

Z toho dostávame výsledok

$$s = s_b - s_k \approx 7,19 \text{ m} - 1,91 \text{ m} \approx 5,28 \text{ m}.$$

Teda v momente, keď bežec dosiahne svoju maximálnu rýchlosť a otočí sa, bude Kubko zhruba 5,3 m za ním (rozdiel prejdejších dráh).

Dobré by bolo ešte poznamenať, že po celý čas sme ráтали s konštantnými zrýchleniami ako bežca, tak aj Kubkovho auta. Tým, že úloha bola zameraná najmä na odhad, sa, samozrejme, výsledky môžu líšiť. Rovnako boli niektoré hodnoty mierne aproximované, no vzhľadom na povahu úlohy to bolo celkom namieste.

2.2 Žonglovanie s fyzikou

vzorák , opravoval  

Majme situáciu: Šašo vážiaci 90 kg sa pokúša prejsť s 3 kolkami, vážiacimi po 5 kg , cez rieku. Rozhodne sa, že ju prejde po lávke na jeden krát a to pomocou žonglovania. Problém mu robí lávka, ktorej maximálna nosnosť je 100 kg . Je možné, aby s danými podmienkami dokázal prejsť na druhú stranu?

Správnu odpoveď vieme ľahko nahliadnuť skrz ťažisko sústavy šaša a 3 koliek. Ťažisko môže buď zotrvať vo svojej pôvodnej polohe, alebo ju meniť (stúpať, klesať). Zamerajme sa na situáciu, keď šašo žongluje tak, že ťažisko zotrúva v rovnakej pozícii. Pôsobí naň gravitačná sila, ktorej veľkosť sa rovná súčinu celkovej hmotnosti sústavy ($90\text{ kg} + 3 \cdot 5\text{ kg}$) a gravitačnej konštanty g , ktorej veľkosť budeme uvažovať 9.81 . Z 1. Newtonovho zákona vieme, že na to, aby teleso, v našom prípade ťažisko stálo, musí byť súčet všetkých naň pôsobiacich síl nulový. Potom má ťažisko nulové zrýchlenie. Na to je potrebná sila rovnakej veľkosti ako $F_g = 105 \cdot 9.81\text{ N}$ a opačného smeru. V našom prípade musíme brať do úvahy obmedzenie nosnosťou lávky a to konkrétne $F = 100 \cdot 9.81\text{ N}$, ktorá je menšia ako potrebná sila $105 \cdot 9.81\text{ N}$, a teda nie je možné, aby ťažisko ostalo na mieste.

Keby sme sa bližšie pozreli na spôsob, akým šašo žongluje, videli by sme, že ťažisko osciluje. Aby ťažisko stúpalo, je potrebné pôsobiť silou, ktorá vykompenzuje gravitačnú a zároveň udelí ťažisku zrýchlenie smerom nahor. Už pri stabilnom ťažisku sme narazili na obmedzenie zo strany lávky, ktorá nebola schopná veľkosťou kompenzovať gravitačnú silu, nie to ešte aj udeliť ťažisku zrýchlenie smerom nahor.

Iný spôsob, akým sa na túto úlohu vieme pozrieť, je rozobrať si, čo sa deje pri žonglovaní a aké sily pôsobia na jednotlivé kolky a šaša. Akou silou šašo pôsobí pri vyhadzovaní kolky? Na kolku pôsobí gravitačná sila veľkosti $5 \cdot 9.81$ a keďže ju šašo drží v ruke a nie je urýchľovaná smerom nadol, musí pôsobiť voči nej opačnou rovnako veľkou silou. Aby ju dokázal urýchliť nahor, musí ešte pridať navyše silu. Spôsoby, akým šašo žongluje môžu byť rôzne. Pozrime sa na situáciu keď šašo drží dve kolky naraz v rukách. Na lávku v tom prípade pôsobí silou $100 \cdot 9.81\text{ N}$ čo spadá pod nosný limit lávky. Problém nastáva, keď sa pokúsi jednu z koliek urýchliť a musí vyvinúť navyše silu, čím prekonáva nosný limit.

Keď dáme šašovi podmienku, že vždy môže v ruke držať len jednu kolku, šašo sám o sebe pôsobí na lávku tiažovou silou $90 \cdot 9.81\text{ N}$, lávka celkovo unesie $100 \cdot 9.81\text{ N}$ čo nám dáva rezervu 98.1 N . ($981\text{ N} - 882.9\text{ N}$). Keď šašo drží jednu kolku ostáva nám z 98.1 N už len $98.1 - 49.05 = 49.05\text{ N}$ čo je maximálna sila, ktorou môže šašo pôsobiť. Keby sme uvažovali dve kolky, lávka pri žonglovaní vydrží, lebo keď pôsobí šašo silou 49.05 N a urýchľuje kolku cca pol sekundy na maximálnu rýchlosť $4,905 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, kolka sa nachádza sekundu vo vzduchu, pokým ju znova pol sekundy nespomaľuje na $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Z časového hľadiska, toto funguje pre 1-2 kolky, ale pokým by sme mali 3 a viac, vidíme, že by sa časové intervaly prekrývali. Aby sa neprekrývali, šašo by bol nútený vyhadzovať kolky vyššie, ale to by musel pôsobiť väčšou silou a lávka by sa prepadla.

Po argumentácii ťažiskom a rozobratí jednotlivých možností vidíme, že šašo nedokáže žonglujúc s 3 kolkami prejsť cez lávku bez jej prepadnutia a svojho následného skonu.

2.3 Trh s jojom

vzorák Majo, opravoval Majo

Klasické riešenie

Pri úlohách podobných tejto čelí každý fyzik základnej dileme fyzika: riešiť úlohu cez sily, alebo energie? V tejto úlohe sa každému ostrieľanému fyzikovi malo zdať, že riešenie cez sily bude komplikované – sila od

gumičky (ďalej je budeme nazývať len pružina) sa bude stále meniť, a tak nemusí byť úplne jasné, aký efekt bude mať meniace sa zrýchlenie na okamžitú rýchlosť guľôčky. Pustíme sa preto do riešenia cez energie¹.

Energie, s ktorými sa v našej úlohe môžeme stretnúť, sú troch druhov: kinetická a dve potenciálne – jedna súvisiaca s tým, že sme v gravitačnom poli (gravitačná potenciálna energia), a druhá súvisiaca s tým, že sa hráme s pružinou (potenciálna energia pružnosti). Tieto tri sú pomerne známe², takže s nimi podme rovno žonglovať.

Zo slušnosti si najprv povedzme, kde bude pre nás nulová výška, a teda nulová hladina gravitačnej potenciálnej energie³ – určíme ju v tej výške, z ktorej Jožko pustil svoje jojo.

Najprv analyzujme, čo sa udeje pred trhom. Na začiatku je guľôčka nehybná vo výške 0 a pružina je nenatiahnutá. Celková energia je tak určite nulová, keďže sú nulové všetky tri zložky, ktoré do nej započítavame. Potom Jožko pustí guľôčku a tá dosiahne svoju minimálnu polohu vo výške $-y$. V tomto momente guľôčka stojí, takže nemá kinetickú energiu, a pružina je natiahnutá na dĺžku y . Celková energia v tomto momente je tak

$$E_1 = \frac{1}{2}ky^2 - mgy.$$

V priebehu sa však musela zachovávať energia, a tak je aj táto energia nulová. Dostávame preto vzťah

$$\frac{1}{2}ky^2 = mgy.$$

Bude sa nám hodiť odtiaľto vyjadriť y , tak to urobme⁴:

$$y = \frac{2mg}{k}.$$

Toto bola tá nudnejšia časť. Teraz potrebujeme pochopiť, čo sa stane, keď Jožko trhne jojom. Pred trhom je jojo vo výške $-y$, pružina je natiahnutá na dĺžku y a guľôčka sa nehýbe. Vtom Jožko prudko trhne rukou nahor. Keďže to spraví prudko, tak je to rovnaké, ako keby sa ruka okamžite teleportovala o výšku h nahor – prudkosť trhu totiž zabezpečí, že kým si guľôčka stihne uvedomiť, že Jožko trhol rukou, tak je jeho ruka už o h vyššie.

Po trhu je tak guľôčka stále nehybná, stále vo výške $-y$, ale tentoraz je už pružina natiahnutá na dĺžku $h + y$. Celková energia sústavy v tomto okamihu je preto⁵:

$$E_2 = \frac{1}{2}k(h + y)^2 - mgy$$

Guľôčka je v najspodnejšej polohe svojho kmitu, takže sa začne hýbať smerom nahor, až kým nedosiahne najvyššiu polohu. Označme jej výšku H – toto je výška, ktorú potrebujeme zistiť. V tomto momente sa guľôčka opäť nehýbe, takže kinetická energia ani teraz nehrá žiadnu úlohu. Gravitačná potenciálna energia

¹Čitateľovi je však stále odporúčané vyskúšať si, či by túto úlohu nevedel vyriešiť aj cez sily.

²Ak nie sú, tak všetko podstatné k nim to povie bárs aj wikipedia.

³Veľmi teoreticky by sme to mohli špecifikovať aj pre ostatné dve energie. V nich ale uvažujeme prirodzene nulovú energiu pre nulovú rýchlosť, resp. výchylku.

⁴Zjavne bude $y \neq 0$.

⁵Hoci je toto len poznámka pod čiarou, tak je fakt dôležité si uvedomiť, že trhnutím Jožko dodal do sústavy nejakú energiu.

však už je mgH a potenciálna energia pružnosti zas⁶ $\frac{1}{2}k(H-h)^2$. Medzi týmito dvomi okamihmi sa žiadna energia nemala kam stratiť, takže dostávame rovnicu:

$$\frac{1}{2}k(h+y)^2 - mgy = mgH + \frac{1}{2}k(H-h)^2$$

Dosadíme za y a spravme zopár úprav:

$$2mgh = mgH + \frac{1}{2}kH^2 - 2kHh$$

To je strašne pekná kvadratická rovnica⁷, z ktorej vyjadríme H :

$$H = \frac{2kh - mg \pm \sqrt{(2kh - mg)^2 + 4kmgh}}{k}$$

Našťastie nad nami bdie najvyššia bytosť úpravy nechutných výrazov. Máme totiž šťastie a výraz pod odmocninou sa v skutočnosti rovná:

$$(2kh + mg)^2$$

Takže ho vieme odmocniť a dostať dve riešenia:

$$H_1 = \frac{2kh - mg - (2kh + mg)}{k} = -\frac{2mg}{k}$$

$$H_2 = \frac{2kh - mg + (2kh + mg)}{k} = 2h$$

Ktorý výsledok je ten náš? Všimnime si, že $H_1 = -y$. Takéto riešenie sme v skutočnosti mohli očakávať⁸, veď aj v momente tesne po trhu je celková energia E_2 .

Pre nás relevantné je však druhé riešenie. Hovorí nám, že jojo vyjde o $2h$ vyššie.

Poznámka

Hoci tento model joja nie fyzikálne presný (napr. sa nám nijako nenamotáva lanko alebo neuvažujeme rotáciu samotého joja, v ktorej sa vie ukryť časť energie), dáva návod, ako sa s klasickým jojom hrať. Treba prudko trhnúť rukou, keď je jojo v najnižšom bode. Vďaka tomu sa vie jojo vrátiť dokonca do väčšej výšky ako tej, v ktorej skončí ruka držiaca jojo.

Trikové riešenie

Hoci sme úlohu zdarne vyriešili, ukážme si ešte trikový spôsob riešenia. A hoci sme si tiež povedali, že nechceme riešiť úlohu cez sily, tak toto riešenie bude v podstate zamaskované nejaké riešenie cez sily.

Riešenie je založené na tejto myšlienke: Rovnovážna poloha pružiny je v strede medzi najnižšou polohou a najvyššou polohou. Tu v podstate fyzika končí a už to bude len geometria.

⁶Pritom predpokladáme, že guľôčka vyletí nad úroveň Jožkovej ruky (ktorá je vo výške h). To skutočne môžeme – ľahko si totiž vieme spočítať, že do sústavy sme dodali viac ako energie ako mgh , čo je energia potrebná na zdvihnutie joja z výšky 0 na výšku h (a na dosiahnutie výšky 0 sme mali dosť energie už predtým).

⁷irónia

⁸A je aj dôvodom, že tá hnusná odmocnina sa zvládla pekne odmocniť. Inými slovami, ak má kvadratická rovnica jeho slušné riešenie, tak je aj druhé riešenie slušné.

Na začiatku je guľôčka vo výške 0, čo je jej najvyššia poloha v časti pred trhom. Rovnovážna poloha je v tomto momente v nejakej výške $-x$ (v skutočnosti nás ani moc netrápi, aká presne je). Toto je stred medzi najvyššou a najnižšou polohou, takže najnižšia poloha je vo výške $-2x$.

Pri trhnutí rukou o h nahor sa rovnovážna poloha zvýši o h (rovnovážna poloha musí zostať o x pod rukou) na výšku $h - x$. Zároveň je guľôčka v najnižšej polohe vo výške $-2x$. Takže najvyššia poloha je vo výške $2h$ (keďže $\frac{2h-2x}{2} = h - x$, tak bod vo výške $h - x$ je naozaj medzi bodmi vo výškach $2h$ a $-2x$).

A to je všetko, opäť sme dostali, že guľôčka vyjde do výšky $2h$.

2.4 Hustá energia

vzorák Kubko, opravoval Kubko

Uchovávanie energie je problematika, ktorá nás trápi od nepamäti – nikdy nebol problém zapriať koňa, no zabezpečiť pre nejaký (prí)stroj krátkodobu vysoký výkon predstavovalo vážny problém. Koniec koncov, práve toto je príčinou, že v noci je lacnejšia elektrina. Nie je celkom jednoduché pustiť elektráreň na nižší výkon (a vôbec – ako sa určuje, koľko energie v niektorom momente treba?), preto sa snažia distribučné firmy motivovať odberateľov odoberať energiu v noci, keď je nižší dopyt.

Zo štyroch vymenovaných spôsobov sú tri akosi variabilné; možno si napríklad zvoliť, do akej výšky h budeme vodu čerpať. Poďme preto prv vyriešiť elektrolýzu, aby sme mali energetickú hustotu, od ktorej sa odrazíme. Vezmime si jeden kilogram (alebo jeden liter, podľa nálady) vody a rozložme ho elektrolýzou. Koľko energie dostaneme?

Jednou z možností je porovnať (a odčítať) väzbové energie reaktantov (vody) a produktov (molekúl H_2 a O_2). Tieto nájdeme v divných jednotkách, *elektrónvoltoch*. Tieto sú však celkom fajn, je to energia, len na atómové škály (uvedomme si, ako veľa je jeden joule pre taký atóm!). Nenáročne vypočítame, že elektrolýzou jednej molekuly vody zbohatneme o 2,44 eV. To vieme prepočítať na jouly a prenásobiť počtom molekúl v jednom mole, známym ako Avogadrova konštanta. Dostaneme tak číslo okolo 235 kJ/mol. Ak však wikipédiu o elektrolýze vody prelúskame podrobnejšie, nájdeme hodnotu 237 kJ/mol – predpokladám, že sa jedná o rovnakú hodnotu, lenže pri mojom výpočte som pracoval s menšou presnosťou. Ak sa teda zhodneme na hodnote 237 kJ/mol, túto poľahky premeníme (vieme, že molárna hmotnosť vody je 18 g/mol) na hodnotu hustoty energie okolo **13 MJ/kg**.

Poďme teraz vodu vyniesť tak vysoko, aby sme mali energiu 13 MJ/kg! Potenciálna energia vody bude $E_p = mgh$, teda energetickú hustotu $\frac{E_p}{m}$ získame ako gh , teda $h = \frac{13 \text{ MJ/kg}}{g} \approx 1,3 \cdot 10^6 \text{ m}$. Teda koľko? Tisíc kilometrov?⁹ Tak, už asi tušíte, prečo sa energia uchováva chemicky (napríklad v batériách) a nie mechanicky.

Ale možno by sme predsalen dali pokus tomu mechanickému otáčaniu, nie? Ak budeme mať valcovitú plechovku, stále to nie je jednoznačné – ak si predstavíme dva valce rovnakej hmotnosti, napríklad gramofónovú platňu a kus rovného drôtu, roztočením na rovnakú uhlovú rýchlosť budú mať iné množstvo energie. Dáva to zmysel, veď kúsok gramofónovej platne, ktorý je ozaj ďaleko od osi otáčania, má vcelku vysokú obvodovú rýchlosť oproti ktorémukoľvek kúsku drôtu. A s veľkou rýchlosťou prichádza aj veľká energia.

Ako to teda bude? Pre rotačný pohyb existuje veličina I , ktorá sa nazýva moment zotrvačnosti – ten hovorí, akú kinetickú energiu má nejaký tvar pri otáčaní okolo niektorej osi danou uhlovou rýchlosťou ω . Kinetická

⁹Pre poriadok: na takejto škále už ani g nie je konštantné, ale menšie a v skutočnosti to teda bude ešte viac.

energia je potom $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$. Moment zotrvačnosti pre valec otáčaný okolo svojej hlavnej osi je $I = \frac{1}{2}mr^2$, kde m je jeho hmotnosť a r polomer. Moment zotrvačnosti teda bude závisieť (neprekvapivo) aj na tvare valca. Akú plechovku teda zvoliť?

Ja som si z púhej extravagancie zvolil takú, ktorá má najmenší možný povrch. Je to plechovka, ktorá pri pohľade z boku vyzerá ako štvorec a jej polomer je 5,42 cm. (A áno, jej objem je liter.) Poďme upraviť vzťahy:

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2\omega^2,$$

z čoho vieme dostať hustotu energie $\frac{E_k}{m} = \frac{r^2\omega^2}{4}$. Sem vieme dosadiť r a zistiť tak hodnotu

$$\omega = \sqrt{\frac{4E_k}{mr^2}} \approx 1,33 \cdot 10^5/\text{s}.$$

Môžeme to prepočítať na indžiniermi obľubované jednotky *rpm*, teda otáčky za minútu, aby sme podkreslili absurdnosť výsledku: vyjde to neskromných $1,3 \cdot 10^6$ otáčok za minútu. No, bezmála sme prekonalí svetový rekord v otáčkach za minútu¹⁰. Mimochodom, videli ste už zariadenie, ktoré by uchovávalo energiu tým, že niečo rozpohybuje? Nazýva sa zotrvačník a energiu uchováva ozaj krátkodobo – v najrôznejších motoroch je energia dodávaná počas pracovného cyklu nárazovo, napríklad pri výbuchoch v jednotlivých valcoch. A aby motor hneď nezastal, okrem toho, čo treba roztočiť, sa roztočí aj zotrvačník, ktorý pomáha uchovať nárazovo dodanú energiu do momentu, kedy nastane výbuch v ďalšom valci.

A ako to bude so zahrievaním? Mernú tepelnú kapacitu poznáme, to je 4,18 kJ/(kgK) – teda za každý kelvin prihrievania uložíme do kilogramu vody 4,18 kJ energie. My však potrebujeme až 13 MJ. Velmi ľahkým uvedením zistíme, že to skrátka nejde. Ako vláčikár si neodpustím povedať, že napríklad parný stroj využíva energiu z uhlia, ktorá sa na moment preniesie do vody – lenže nie len ako tepelná energia, ale hlavná časť kúzla sa dosiahne stlačením pary. My však vodu len zohrievame – a vieme, že tepelná kapacita pary je menšia, ako pre vodu; čo s tým? Ak začíname na bode mrazu, prvých 0,418 MJ do vody vpravíme zohriatím na teplotu varu, 2,26 MJ vyparením (skupenské teplo). Ďalej pokračujeme s parou s tepelnou kapacitou 2 kJ/(kgK), teda by sme potrebovali ešte aspoň takých 10 000 K – a to nie je príliš realistické. Okrem toho, teplota sú nejaké vibrácie molekúl a ak sa molekuly rozvibrujú príliš, môžu sa skrátka rozpadnúť (mimochodom, podobne funguje topenie tuhej látky, napríklad ľadu!).

Vidno, že elektrolýza nám zamiešala karty. Poďme teda ešte raz, s realistickými hodnotami, bez porovnávaní s elektrolýzou. Ak kilogram vody zohrejeme z bodu mrazu na teplotu varu, uložili sme do nej energiu 418 kJ. To zodpovedá, podobným výpočtom ako vyššie, zdvihnutiu o 41,8 km. A čo roztočenie? Ak si nechám svoju štvorcovú valcovú plechovku, bude to uhlová rýchlosť $\omega = 2,39 \cdot 10^4/\text{s}$, alebo približne 228 000 otáčok za minútu.

Ponaučenie

Ako to býva na konci každej rozprávky, i tu si možno vziať veľké ponaučenie. Náš svet drží pokope celkom solídne a veci sa priťahujú niekoľkými silami. V bežnom živote pociťujeme najviac silu gravitačnú. Proti všetkej intuícii, toto pozorovanie znamená, že je zo všetkých síl najslabšia – ako ľudia máme schopnosť na

¹⁰<https://www.guinnessworldrecords.com/world-records/highest-manmade-rpm>

to, aby sme s niektorými vecami manipulovali proti gravitačnej sile. A ostatné sily v prírode (napríklad tá, ktorá drží pokope molekuly, či jadrá) sú tak silné, že toto by sme nedokázali. ¹¹

Energia sa dá chápať ako schopnosť pôsobiť proti nejakej sile¹²; často napríklad proti spomínanej gravitačnej sile (isto ste sa niekedy viezli výťahom iným smerom, ako dole). Ak chceme energiu niekam uložiť, máme dve najväčšie možnosti. Jedna z nich je zapôsobiť proti niektorej sile v prírode – napríklad zdvihnúť hore závažie, ktoré potom pomocou kladky vytiahne nahor výťah. Druhá je nájsť niečo, čo je v stave, že to *v sebe má energiu*, a na jej získanie to prinútime nejako pôsobiť tak, ako potrebujeme. To je napríklad prílivová elektrárň – tu a tam sa objaví voda, ktorá má „potenciálnu energiu navyše“ a my ju využijeme.

Prečo som napísal o prílivovej elektrárni a výťahu na závažie? Nie sú to hlúpe príklady? Sú, a naschvál! Iste sami viete, že v oboch prípadoch je praktickejšie využiť formu energie (alebo na pôsobenie proti sile) inú ako gravitačnú. Napríklad (elektrolýza, uhlie...) elektrickú silu – stačí roztrhnúť správnu molekulu. A napriek (a súčasne vďaka) tomu, že elektrická sila má na menší objem paliva o toľko viac energie, vo svete ju pozorujeme o to menej. A čo taká jadrová sila, je ešte viac energie a v bežnom živote ju vidíme ešte menej! Náhoda? Určite nie! Práve tým, že tieto sily sú silnejšie, sú v bežnej prírode viac vyrovnané a je ťažšie ich „rozhádzať“. A my vieme získať viac energie na hmotnosť ich narušením, alebo hľadaním zdrojov, kde narušené už sú, napríklad jadrového paliva.

2.5 (Bez)nádejný krupier

vzorák , opravoval  

2.6 Matematický náboj

vzorák MatusH, opravoval MatusH

Ako prvé by sme mali kvalitatívne popísať, čo sa bude s nábojom diať. Na náboj budú pôsobiť 3 sily. Gravitačná - tá bude stále konštantná, sila od lanka - tá bude náboj udržiavať v pevnej vzdialenosti od bodu závesu a magnetická - tá bude pôsobiť v kolmom smere na rýchlosť.

Keď ho pustíme z vychýlenej polohy, hmotný bod má nulovú rýchlosť a bude zrýchľovať ako normálne sférické kyvadlo. Keď už bude mať rýchlosť, bude pôsobiť aj magnetická sila. Tá ale pôsobí kolmo na smer pohybu, a preto nekoná prácu, ale iba zakrivuje dráhu. V okamihu, keď hmotný bod bude znova v začiatkovej výške, bude otočený o nejaký uhol oproti pôvodnému vychýleniu. Bez uvažovania magnetického poľa by bol otočený o 180°, avšak kvôli pôsobeniu magnetickej sily bude tento uhol iný. Tento pohyb sa následne bude opakovať z nového miesta.

Už teraz by nám malo byť jasné, že pre nejakú hodnotu B by sa mal hmotný bod pri jednom kyve otočiť napríklad o 90°. Po štyroch kyvoch by preto mal byť naspäť v svojej počiatočnej polohe a chodiť po uzavretej krivke. V týchto úvahách ale budeme pokračovať neskôr, keďže sa týkajú konca úlohy.

Podme teraz pristúpiť k samotnej simulácii. Na hmotný bod pôsobia

- gravitačná sila

$$F_g = mg,$$

- magnetická sila

$$F_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

¹¹ Čítaj takto: kameň vieme zo zeme zdvihnúť. Nevieme ho rukami rozbiť na atómy.

¹² okrem toho sa dá chápať ešte mnohými ďalšími spôsobmi – otázka čo je to energia je zložitejšia, ako sa zdá

- a sila od lanka

$$\mathbf{T} = \left[\left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cdot (m\mathbf{g} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})) + \frac{mv^2}{r} \right] \left(-\frac{\mathbf{r}}{r} \right).$$

Sila od lanka má komplikovanejší tvar, takže si ho poďme rozobrať. V prvom rade si všimneme, že je tam súčet gravitačnej a magnetickej sily skalárne prenasobený jednotkovým vektorom $\mathbf{r}$, čo je vektor polohy. Tak sme dostali veľkosť zvyšných dvoch síl v smere lanka. Tieto musia byť kompenzované silou od lanka, lebo to má stálu dĺžku. Preto lanko musí pôsobiť rovnakou silou, ale v opačnom smere (preto sme to vynásobili záporným jednotkovým vektorom v smere lanka). Vieme, že hmotný bod sa pohybuje po „povrchu gule“, a aby sa na ňom udržal, musí naň pôsobiť dostredivá sila, ktorá je zodpovedná za druhý člen v hranatej zátvorke.

Keď už vieme celkovú silu, a teda aj zrýchlenie v každom bode, môžeme sa dať do numerického integrovania. Budeme integrovať po malých časových intervaloch dt . Keď sa hmotný bod v čase t nachádza v bode $\mathbf{r}(t)$ a má rýchlosť $\mathbf{v}(t)$, o čas dt vieme jeho polohu odhadnúť ako

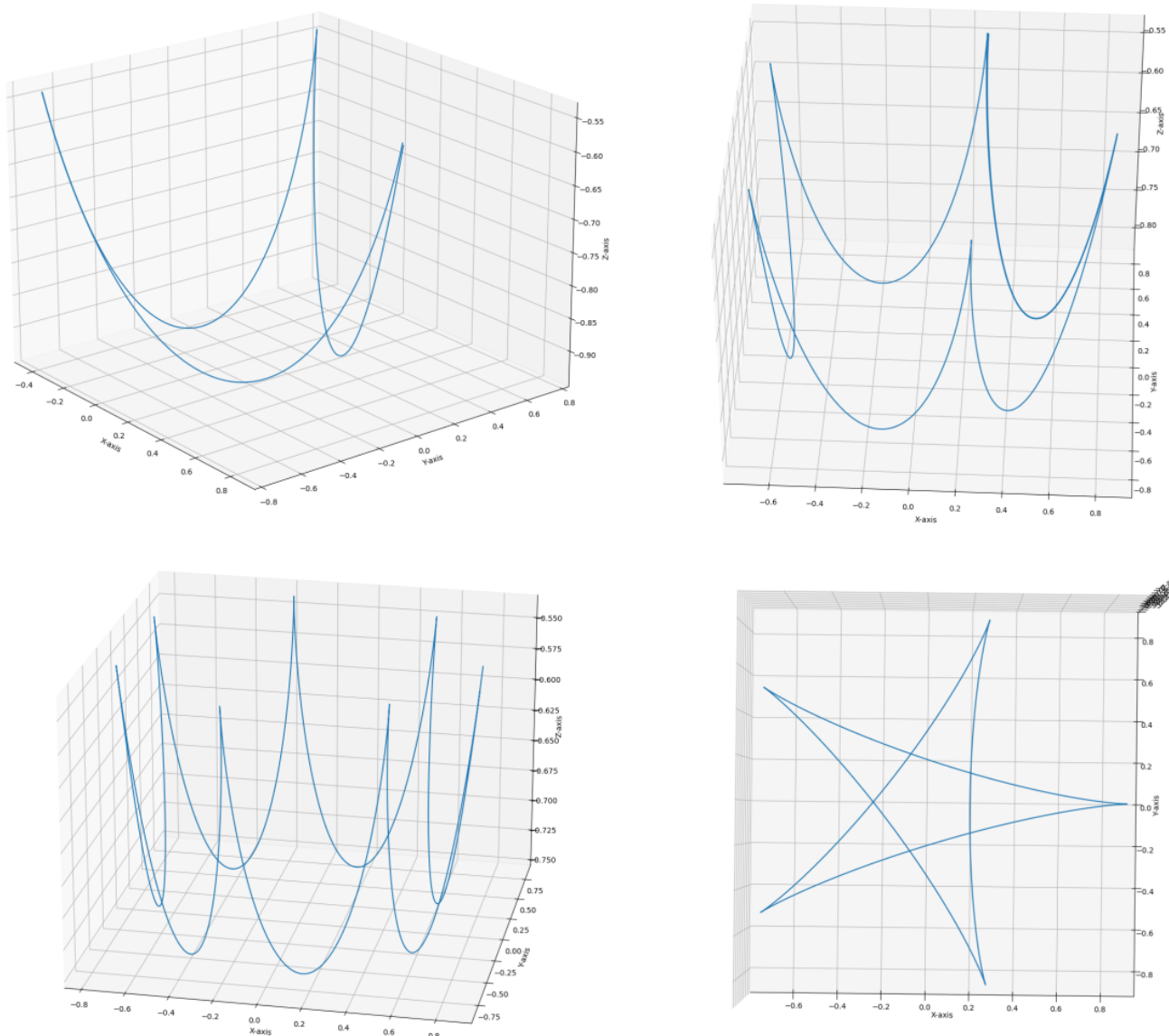
$$\mathbf{r}(t + dt) \approx \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t)dt$$

a rýchlosť ako

$$\mathbf{v}(t + dt) \approx \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}(\mathbf{r}, \mathbf{v})dt.$$

Čím menší krok dt spravíme, tým presnejšie bude vzťah platiť. Tento krok nám už stačí len veľakrát opakovať a dostaneme aproximáciu pohybu nášho kyvadla. Na koniec pripájame python skript, ktorý spomínané integrovanie robí a následne vykreslí trojrozmernú trajektóriu kyvadla.

Výsledky vyzerajú nasledovne:



Obrázok 2.6.1: Výsledky

Bolo by tu ale treba nastaviť rovnaké osi

Teraz ideme pokračovať hľadaním aproximácie funkcie B od x , kde x je počet prekmitov na jeden obeh. Hraním sa so simuláciou dostávame takého dvojice hodnôt $[x; B]$:

x	2	2,5	3	4	5	6	7
B	0	1,72	3,05	5,2	7	8,58	10

Zakreslením do grafu s logaritmickou x -ovou osou a lineárnou y -ovou osou dostávame priamku, ktorú vieme odhadnúť ako $y \approx 7,9x - 5,5$. Preto $B(x) \approx 7.9 \ln x - 5.5$ T.

Tým je úloha vyriešená a ostáva len pár poznámok na záver. Môžeme si všimnúť, že postup pri určovaní závislosti sa v istom ohľade podobá na experimentálne zistenie závislosti. Táto podobnosť pramení z toho, že k výsledkom simulácie sa nemôžeme správať ako k presným hodnotám. Simulácia má tiež svoju chybu a tá sa zväčša zväčšuje s počtom iterácií, ktoré spravíme pri simulovaní.

Ďalšia zaujímavosť je význam veličiny x , ktorú sme si definovali ako počet prekmitov na jeden obch. Môžeme vidieť, že keď túto veličinu vynásobíme $\frac{1}{2\pi}$, dostaneme veličinu charakteru ϕ^{-1} , kde ϕ je uhol, o ktorý sa hmotný bod otočí okolo osi závesu za jeden prekmit. Z toho vidno, prečo má zmysel zakresľovať do grafu aj zlomky. Z uhlovej interpretácie nám dokonca dáva zmysel túto funkciu spojiť dodefinovať na celom intervale $0T \leq B \leq 10T$.

[@I] kyvadlo.py

2.7 Útrapy plochozemca

vzorák Tomáš, opravoval Tomáš

Je jasné, že Zem bude mať najväčšiu rovnovážnu teplotu na poludnie, keď na ňu bude Slnko svietiť kolmo zhora (alebo o polnoci kolmo zdola), a najmenšiu počas východu a západu Slnka, keď slnečné žiarenie dopadá na zemský povrch pod veľmi malým uhlom. Vypočítajme teda, aká je hustota toku žiarenia zo Slnka vo vzdialenosti Zeme. Podľa Stefanovho-Boltzmannovho zákona vyžaruje 1 m^2 slnečného povrchu s výkonom $P = \sigma T_{\odot}^4$, kde σ je Stefanova-Boltzmannova konštanta. Celkový výkon Slnka je potom

$$L = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4.$$

Keď tento výkon prechádza vzdialenosťou $r = 1 \text{ au}$, rozloží sa na sféru s plochou $4\pi r^2$, a preto vo vzdialenosti Zeme dopadne na 1 m^2 výkon

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{R_{\odot}^2}{r^2} \sigma T_{\odot}^4.$$

Túto veličinu nazývame hustota toku žiarenia.

Uvažujeme, že Zem je absolútne čierne teleso, čiže 1 m^2 jeho plochy vyžaruje s výkonom $P = \sigma T^4$, kde T je teplota Zeme. Ak je táto teplota rovnovážna, znamená to, že vyžaruje rovnako veľa energie ako prijíma. Plochá Zem je platňa vyžarujúca oboma stranami, teda s výkonom $2P$. Na poludnie dopadá slnečné žiarenie kolmo na Zem, takže môžeme písať rovnicu

$$F = 2P$$

$$\frac{R_{\odot}^2}{r^2} \sigma T_{\odot}^4 = 2\sigma T^4$$

$$T = \sqrt{\frac{R_{\odot}}{r\sqrt{2}}} T_{\odot}$$

$$T \doteq 333 \text{ K}.$$

Najvyššiu rovnovážnu teplotu sme týmto vypočítali. To, že Zem je štvorec s dĺžkou strany a sme zanedbali, pretože $a \ll r$, kvôli čomu bude v strede Zeme takmer úplne rovnaká teplota ako v jej rohu.

Je lákavé povedať, že počas východu a západu Slnka dopadá žiarenie na Zem úplne zboku, a teda jej rovnovážna teplota je 0 K. Žiaľbohu, a vlastne chvalabohu, že žiaľbohu, že Slnko nie je bodový zdroj. Ak poznáme jeho polomer a vzdialenosť od Zeme, ľahko si zráťame, že jeho uhlový polomer na oblohe je $0,27^\circ$. To znamená, že aj keď je stred Slnka na horizonte, jeho horný okraj je $0,27^\circ$ nad ním, a Slnko stále zohrieva Zem. Rovnako to je aj s dolným okrajom, ktorý Zem zohrieva zospodu. Ale ako vypočítame, koľko žiarenia dopadá, na Zem, ak Slnko nie je bod? Ak to chceme úplne presne, museli by sme integrovať, ale to nie je účelom tejto úlohy. Jednoducho to odhadnime tým, že si povieme, že Slnko je počas východu a západu bodový zdroj vo výške $0,135^\circ$ nad horizontom, teda v polovici jeho skutočného uhlového polomeru. V tom prípade dopadá na 1 m^2 zemského povrchu nie F , ale $F \sin 0,135^\circ$, čiže

$$F \sin 0,135^\circ = 2P$$

$$T = \sqrt{\frac{R_\odot}{r}} \sqrt{\frac{\sin 0,135^\circ}{2}} T_\odot$$

$$T \doteq 73 \text{ K}.$$

Rozdiel medzi najvyššou a najnižšou rovnovážnou teplotou je 260 K. Či je Zem plochá alebo guľatá už necháme na vás. Do your own research.

Vesmírne chladiče

Prebytočného tepla na vesmírnej stanici sa najľahšie vieme zbaviť tak, že ho vyžiarime von zo stanice. Používajú sa na to chladiče, ktoré svojím tvarom pripomínajú solárne panely, ale k Slnku sú natočené hranou. To preto, že v nich sú trúbky s teplou kvapalinou, ktorá sa predtým zohriala od niečoho, čo potrebujeme chladiť. Chladič (alebo plochá Zem) natočený hranou k Slnku má rovnovážnu teplotu – za predpokladu absolútne čierneho telesa – približne 73 K, teda -200°C . Ak do takéhoto chladiča príde kvapalina z vyššou teplotou, bude sa chladiť.

Ak by ale chladič bol natočený svojou plochou smerom k Slnku, jeho rovnovážna teplota by bola 333 K, čo je asi 60°C , a teda kvapalina v ňom by sa chcela dostať na túto teplotu. Vo väčšine prípadov by takýto „chladič“ teda zohrieval.

Obrázok chladičov a čosi o teplote na ISS si môžete prečítať [tu](#).

Presné riešenie pre minimálnu rovnovážnu teplotu

Uhlový polomer Slnka na oblohe je $\theta_m = \arctan \frac{R_\odot}{r}$, čo znamená, že zaberá priestorový uhol $2\pi(1 - \cos \theta_m)$ ¹³. Vyššie sme už vyrátali, že vo vzdialenosti r od neho nameriame hustotu toku žiarenia $S_\odot = \frac{R_\odot^2}{r^2} \sigma T_\odot^4$, kde $S_\odot$ sa zvykne nazývať solárna konštanta. Bude sa nám hodiť veličina $I = \frac{S_\odot}{2\pi(1 - \cos \theta_m)}$, ktorá sa nazýva intenzita žiarenia a hovorí nám, aký výkon dopadá na jednotku plochy Zeme z jednotkového priestorového uhla, ktorý zaberá Slnko.

Na vypočítanie množstva dopadajúceho výkonu musíme integrovať cez viditeľný slnečný disk pri východe alebo západe Slnka, teda polovicu kruhu. Rozdelíme si ho na obdĺžnikové pásy rovnobežné s horizontom

¹³https://cs.wikipedia.org/wiki/Kulov%C3%A1_%C3%BAs%C4%8D

a každý bude mať hrúbku $d\theta$. Jeho šírku zistíme jednoducho z pravouhlého trojuholníka v kružnici s polomerom θ_m . Ak sa pozrieme na pás, ktorý je uhol θ nad horizontom, tak z Pytagorovej vety, kde θ je odvesna a θ_m prepona, má jeho druhá odvesna dĺžku $\sqrt{\theta_m^2 - \theta^2}$. Celý pás má teda šírku $2\sqrt{\theta_m^2 - \theta^2}$, preto pás tvaru obdĺžnika vo výške θ nad horizontom zaberá priestorový uhol $2\sqrt{\theta_m^2 - \theta^2}d\theta$. Ak ho vynásobíme I , dostaneme, koľko W/m^2 dopadne na Zem z daného priestorového uhla, ak žiarenie dopadá kolmo. To však dopadá pod uhlom θ , čiže to ešte donásobíme $\sin \theta$. A teraz to už len potrebujeme preintegrovať od horizontu po horný okraj Slnka, čiže jeden meter štvorcový Zeme prijíma výkon

$$F = \int_0^{\theta_m} I \sin \theta 2\sqrt{\theta_m^2 - \theta^2} d\theta.$$

No, a sme došli, pretože tento integrál sa¹⁴ nedá vyriešiť analyticky pre všeobecné θ_m . Jediné, čo vieme spraviť, je vypočítať si číselné hodnoty I , θ_m , dosadiť ich do integrálu, a to celé napísať do Wolfram Alpha, aby nám to numericky spočítal. Nezabúdajme, že θ_m musíme dosádzať v radiánoch. Výsledkom je $F \doteq 1,394\,92\, \text{W/m}^2$. Teraz už len jednoducho zrátame rovnovážnu teplotu z rovnice $F = \sigma T^4$, ktorá je

$$T \doteq 70\, \text{K}.$$

Vidíme teda, že náš prvý odhad sa od presnej hodnoty veľmi nelíši.

2.8 Poťažmé ťažkosti s taškami

vzorák , opravoval  

¹⁴asi?