

Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Relativita hlasitosti

vzorák Kubko, opravoval Kubko

Ak mamka Matúša nepočuje cez digestor, nech skúsi počúvať cez dvere. Prevrátili ste očami, ja viem. Skutočný vzorák však nebude omnoho náročnejší, ani dlhší. Skontrolovali ste dĺžku vzoráku; podozrievavo nadvíhujete obočie. Dobre, tak za samotný vzorák som ešte napísal čosi navyše o zvuku.

Intenzita zvuku klesá so vzdialenosťou. A tak kým Matúš počuje potichu mamku a potichu digestor, mamka počuje potichu Matúša a nahlas digestor. Easy.

Toto ku samotnému riešeniu úlohy; a teraz nejakú fyziku? Iste poznáte takú jednotku, že decibely. A že sa ňou udáva hlasitosť. Ako to s ňou je? Zvuk je však nejaký mechanický pohyb molekúl vzduchu, dávalo by teda zmysel hovoriť o energii či výkone tohoto pohybu, respektíve výkone na plochu. Problém je však taký, že ľudské uši (a i ostatné receptory) musia zaregistrovať ozaj veľmi, veľmi tiché zvuky, súčasne prežiť veľmi silný hluk. Veď človek počuje už zvuk s výkonom 10^{-12} W/m², a prah bolesti je až niekde nad 10^2 W/m². Venujte chvíľu týmto dvom číslam a uvedomte si, aký je medzi nimi rozdiel. Áno, je to niečo okolo 14 rádov. Ako sa teda niečo takéto vyjadruje jednotkami? Decibel je porovnávacia jednotka – predstavte si krabičku, na ktorej je napísané 20 dB. Do nej i z nej ide kábel – a čo robí takáto krabička? Zosilňuje signál (napríklad elektrické napätie na vstupe) o 20 decibelov. A čo to znamená? 20 decibelov sú dva rády, na výstupe je teda stonásobná energia oproti vstupu. A takáto krabička existuje, volá sa zosilňovač a používam ju v labáku, okrem toho je súčasťou mnohých zariadení. Pýtate sa – čo majú tieto decibly so zvukom? Zatiaľ nič, ale bolo zadefinované, že zvuk s intenzitou 0 dB je hranica počuteľnosti a tejto hladine priradili konkrétnu hodnotu výkonu na plochu. Potom zvuk s intenzitou napríklad 30 dB je (v duchu rátame – trikrát desať decibelov, to sú tri rády) tisíckrát silnejší v energii na plochu. A vieme to aplikovať na úlohu? Ak by sme si tipli, že pri prechode bytom zvuk zoslabne o 10 dB, teda o jeden rád. No a ak Matúš, mamka, aj digestor vydávajú zvuk s rovnakou intenzitou, potom mamka počuje Matúša o 10 dB slabšie ako digestor, no Matúš počuje mamku a digestor rovnako nahlas.

A ešte jednu drobnosť sem skúsím vpašovať – ako klesá intenzita zvuku? Iste ľahko vygooglite, že nepriamo úmerne druhej mocnine vzdialenosti od zdroja a uspokojiť sa s tým. Je za tým jednoduchá (a správna!) predstava – ak si predstavíte zdroj zvuku a pozorovateľa (poslucháča?) vo vzdialenosti R , potom energia, ktorú vydal reproduktor, sa musela rovnomerne rozložiť na povrchu guľovej plochy s polomerom R . A ako veľký je tento povrch? No predsa $4\pi R^2$, teda intenzita ozaj klesá s faktorom $1/R^2$.

1.2 Teplo domova

vzorák Jaro, opravoval MatusH

Zo všetkých strán počúvame, aká je v živote rovnováha dôležitá. A nebude tomu inak ani v tomto vzoráku. Avšak nebudeme tu rozoberať duševnú rovnováhu vďaka pobytu v prírode, ale rovnováhu termodynamickú.

Prvý postulát termodynamiky hovorí, že makroskopická sústava ponechaná napospas osudu vždy po určitom čase nadobudne stav termodynamickej rovnováhy. To je dôvodom, prečo je v turistickej útulni pred Jarovým príchodom rovnako chladno ako vonku. Čo by sa dialo, keby bola táto rovnováha porušená – napríklad tým,

že sa vonku ochladí? Keďže steny útulne nie sú dokonalé tepelné izolanty, isté množstvo tepla by sa odovzdalo z útulne do okolia, až by nastala opäť rovnováha.

Prechod tepla cez steny, a vo všeobecnosti presun tepla v látke, popisuje veličina tepelný tok q . Tepelný tok vyjadruje množstvo tepla, ktoré prejde jednotkovou plochou za jednu sekundu. Inými slovami, jedná sa o výkon na plochu $q = P/s$. Tepelný tok cez steny útulne je zrejme tým väčší, čím je rozdiel medzi teplotami vo vnútri a vonku väčší a čím sú steny tenšie. Pre jeho veľkosť platí

$$q = \frac{\lambda \Delta T}{h},$$

kde λ je súčiniteľ tepelnej vodivosti (materiálová konštanta), ΔT je rozdiel teplôt na opačných stranách steny a h je hrúbka steny.¹

Tu okamžite vidíme, prečo všetko smeruje do stavu tepelnej rovnováhy. V stave tepelnej rovnováhy je totiž rozdiel teplôt medzi ľubovoľnými dvomi bodmi systému nulový, a z uvedeného vzťahu vidíme, že vtedy v systéme neexistujú žiadne tepelné toky, takže sa systém z tohto stavu nevie svojvoľne dostať.²

Čo sa však stane, keď Jaro vstúpi do útulne? Ako inak – túto rovnováhu naruší. Pred jeho príchodom neboli v útulni žiadne zdroje tepla. Teraz je tam on a hreje s výkonom P_{in} . Ak by sa teplo z útulne stenami neodvádzalo, teplota v miestnosti by rástla zhruba lineárne s časom. Ako sme si už ale povedali, ak sa teplota vo vnútri zvýši, začne cez steny útulne unikať teplo. Čím viac teplota vo vnútri porastie, tým viac tepla bude cez steny unikať, čím sa nárast teploty spomalí, až sa pri dosiahnutí istého rozdielu teplôt ΔT zastaví. V tom momente platí, že koľko tepla za jednotku času Jaro vyprodukuje, toľko tepla unikne cez steny útulne von, teda

$$P_{\text{in}} \stackrel{!}{=} qS = \lambda \frac{S}{h} \Delta T,$$

kde S je celková plocha stien. Odtiaľ je hľadaný rozdiel teplôt

$$\Delta T = \frac{h P_{\text{in}}}{\lambda S}.$$

Teraz nám už len zostáva odhadnúť potrebné veličiny a tento výraz vyčíslieť.

S fyzickými rozmermi útulne nebude problém. Každý si vie nejakú tú útulňu predstaviť. Ak budeme uvažovať útulňu v tvare kvádra o rozmeroch $3 \times 2 \times 2$ m, dostaneme plochu $S = 32 \text{ m}^2$.³ Hrúbka stien je rádovo 10 cm. Ak je postavená z tenších dosiek, je to menej, ak z hrubších hranolov, je to viac, no ako rádový odhad je to dobrá hodnota. Ani s koeficientom tepelnej vodivosti nebude problém – ten je podľa [wikipédie](#) $0,15 - 0,42 \text{ W/(mK)}$.

¹V skutočnosti tento vzťah platí v takejto podobe len pre tepelný tok vo vnútri materiálu. Prechod tepla cez stenu je komplikovanejší, nakoľko sa na kontakte so stenou na oboch stranách vytvorí tenká medzná vrstva vzduchu, v ktorej sa prudko mení teplota. Vo výsledku je teda rozdiel teplôt vzduchu na opačných stranách steny menší, než je rozdiel teploty vonku a dnu, a tak nami vypočítaný tepelný tok je nadhodnotený. Chyba, ktorej sa však dopustíme, nie je až taká veľká, aby nás to muselo trápiť, a popri všetkých odhadoch, ktoré budeme robiť, sa stratí. Koho to však zaujíma, môže sa o tomto jave viac dočítať napríklad na [wikipédii](#).

²Toto je veľmi desivá predstava. Dúfam, že ste sa zľakli. Ak totiž túto myšlienku aplikujeme na celý vesmír, tak dostaneme, že aj vesmír ako celok smeruje do stavu termodynamickej rovnováhy, v ktorom nebude možný žiaden život, ba ani len pohyb, pretože v ňom nebude žiadna hybná sila, ktorá by ho umožnila tým, že by tepelnú rovnováhu narušila. Tento stav sa zvykne označovať ako tepelná smrť vesmíru.

³Uvažujeme rovnaké straty cez všetky steny, strop aj podlahu. Útulne sú často postavené nad úrovňou terénu - sú niečím podložené a nie sú v priamom kontakte so zemou, takže je to rozumný predpoklad.

Jediný problém môže byť s výkonom človeka. Tu ste už buď počuli, že človek hreje približne ako stowattová žiarovka, a máte vyhraté, alebo sa musíte trochu zamyslieť. Aby tej rovnováhy nadnes nebolo málo, môžeme ju použiť znova – tentokrát z pohľadu energetickej bilancie. Ak má byť človek v rovnováhe, t. j. ak si má udržiavať hmotnosť, musí platiť, že koľko energie prijme v podobe jedla, toľko musí vylúčiť. Pokiaľ človek nekoná prácu⁴, nelezie na horu, čím zvyšuje svoju potenciálnu energiu, alebo nejako inak nezvyšuje svoju mechanickú energiu, musí sa prijatá energia vylúčiť v podobe tepla. No a práve toto vyjadruje bazálny metabolizmus (BMR). Je to množstvo energie, ktorú telo spotrebuje za deň čisto len na zabezpečovanie životných funkcií. BMR sa líši od človeka k človeku. Na internete sa nachádza mnoho online kalkulačiek, pomocou ktorých si viete svoje BMR vypočítať. My budeme uvažovať BMR rovné 2000 kcal.⁵ Potom

$$P_{\text{in}} \approx \frac{2000 \text{ kcal}}{24 \text{ h}} = \frac{2000 \cdot 4184 \text{ J}}{24 \cdot 3600 \text{ s}} \approx 100 \text{ W}.$$

Konečne hľadaný teplotný rozdiel je

$$\Delta T \approx \frac{0,1 \text{ m} \cdot 100 \text{ W}}{0,3 \text{ W}/(\text{mK}) \cdot 32 \text{ m}^2} \approx 1 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Samozrejme sa na tento výsledok treba pozeráť v kontexte všetkých tých odhadov a priblížení. V skutočnosti to môže byť pol stupňa, dva stupne, či tri, no určite to nebude desať.

Na záver by sme sa mali zamyslieť, čo sme to vlastne vypočítali. Vypočítali sme teplotný rozdiel vo vnútri útulne a vonku v ustálenom stave. Mali by sme však overiť, či tento stav bude nadobudnutý v priebehu jednej noci. Aby k tomu došlo, musí buď Jaro vyprodukovať dostatok tepla na to, aby ohrial vzduch vo vnútri o jeden stupeň, alebo teplota vonku musela byť ráno aspoň o stupeň nižšia než večer.

Prvú podmienku ľahko overíme. Za čas τ Jaro vyprodukuje teplo $Q_{\text{in}} = P_{\text{in}}\tau$. Na zvýšenie teploty o ΔT je zas potrebné teplo $Q = mc\Delta T$, kde m je hmotnosť vzduchu v miestnosti a c je merná tepelná kapacita vzduchu pri stálom tlaku. Požadujeme teda, aby

$$P_{\text{in}}\tau \gg V\rho c\Delta T.$$

Už nám stačí len vyčíslieť tieto výrazy. Pre $\tau = 8 \text{ h}$, $V = 12 \text{ m}^3$, $\rho = 1,3 \text{ kg}/\text{m}^3$ a $c = 1 \text{ kJ}/(\text{kgK})$ dostávame $2,88 \text{ MJ} \gg 15,6 \text{ kJ}$, čo je spoľahlivo splnené. A aj keby nebolo, dá sa očakávať, že druhá z dvojice požiadaviek splnená bude.

1.3 Bezuzlové viazanie

vzorák Adam Kubiš, opravoval Adam Kubiš

Matúš hlboko uvažujúc nad riešením úlohy, už si ide vykrútiť krk natoľko, až mu z toho praskajú väzy. Skúsme mu teda trochu pomôcť.

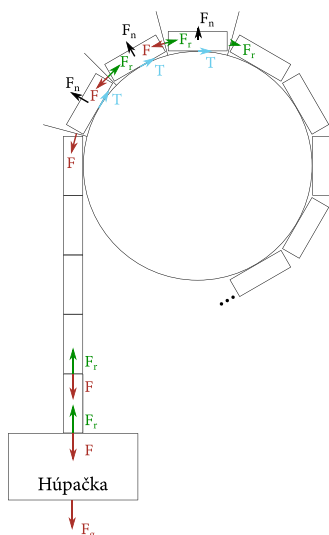
Človek, v bežnom živote uvažujúci nad lanami, predstaví si lano ako jeden dlhý valec nejakého materiálu, ktorý vieme ohýbať podľa potreby. Pozohýbané lano je potom iba prudko pozohýbaný valec. Iná predstava by nám však pri riešení pomohla viacej – predstavme si, že lano je poskladané z veľkého množstva malých valčekov (ako je to na obrázku). Ak by sme takéto lano pozohýbali, potom je to lano vlastne iba veľa „trošku

⁴vo fyzikálnom ponímaní

⁵Poznamenajme, že pri nízkej teplote telo produkuje viac tepla, aby sa zahrialo.

pozohýbaných“ valčekov v rade za sebou. Preto ho rozdelíme na ešte menšie valčeky a všimneme si, že na čím menšie valčeky lano delíme, tým menej je každý z jednotlivých valčekov „pozohýbaný“. Až v jednom momente by „pozohýbanie“ na každom valčeku bolo zanedbateľné – hoci lano ako celok je stále rôzne pozohýbané. Potom by sme mohli vyhlásiť, že nech sa každý z týchto valčekov neohýba. Lano by bolo potom poskladané z veľkého množstva takýchto malých „neohybných“ valčekov, hoci z diaľky by sa nám lano zdalo „spojite zakrivené“.

Matúš teraz môže začať lano ovíjať okolo konára. Priblížme si jeden z našich valčekov. Aké sily naň pôsobia?



Obrázok 1.3.1: Lano na konári

Matúš spolu s húpačkou niečo vážia, čiže na nich bude pôsobiť tiažová sila. K húpačke je pripevnené naše lano a ak padá húpačka, lano padá s ňou. Húpačka teda pôsobí silou na lano – snaží sa ho stiahnuť so sebou. V našej predstave húpačka pôsobí silou na prvý valček, prvý valček „ťahá“ nejakou silou aj valček druhý. Druhý valček zase tretí, atď... . Takto sa sila (napätie v lane) prenáša naprieč celým lanom. Na každý valček teda pôsobí sila od valčeku pred ním, pričom na prvý valček pôsobí húpačka. Túto silu označme F .

Z 3. Newtonovho zákona však vyplýva, že na každý valček pôsobí ešte ďalšia sila. Totiž – ak valček pôsobí nejakou silou na valček za ním, potom valček za ním musí pôsobiť rovnakou silou opačného smeru naňho. Túto silu nazvime F_r .

Skúsme si teraz nakresliť nejaký valček a naň pôsobiace sily F a F_r (kukni obrázok). Uvedomme si, že ak je lano ovinuté okolo konára, tak tieto sily nie sú rovnobežné a ich výslednica nemá smer rovnobežný k povrchu konára.

Túto výslednicu si teda môžeme rozdeliť na dve zložky – na zložku pôsobiacu v smere dotýčnice k povrchu konára a na zložku pôsobiacu do stredu konára. Naš valček lana však smerom do stredu konára nepadá, a teda konár musí pôsobiť na valček silou rovnako veľkou ako zložka výslednice do stredu konára, ale opačným smerom. Čiže existuje sila normálová od konára, ktorá pôsobí na náš valček (v obrázku označená F_n).

Tým, že na náš valček pôsobí aj sila normálová, znamená to, že medzi valčekom a povrchom konára bude existovať trecia sila, pôsobiaca proti smeru pohybu (v obrázku označená F_t).

Zhrňme si to: Na náš zvolený valček pôsobí sila F (od valčeku pred ním), sila reakcie F_r od valčeku za ním, sila normálová od konára F_n a sila trecia F_t .

Pri malých obmotaniach sa lano s húpačkou zošmykne, pretože výslednica všetkých síl pôsobiacich na valček nebude 0. Po viacerých obmotaniach lano s húpačkou však drží. Čo sa zmenilo?

Prirodzene človeku napadne, že po viacerých obmotaniach sa viacej jednotlivých valčekov lana dostane do kontaktu s povrchom konára a trie sa oň. Trecia sila od viacerých valčekov sa skladá a pôsobí proti spadnutiu húpačky.

Pri detailnejšej úvahe si môžeme uvedomiť, že sila F nie je pre všetky valčeky rovnaká. Medzi dielikmi sa znižuje úmerne k tretej sile pôsobiacej na jednotlivé dieliky. To znamená, že na jednotlivé valčeky pôsobí rôzne trenie. Toto trenie je však stále ovplyvnené veľkosťou sily F a F_r . Valčeky bližšie k húpačke môžu byť pritláčané väčšími silami (F a F_r), lebo ich „drží“ trenie celého lana za ním. Takto sme dokonca ukázali, že sila ktorú udrží lano nerastie s počtom obmotaní lineárne, ale dokonca rýchlejšie.

1.4 Vytunená Plechovka

vzorák KatkaM, opravovali KatkaM a KatkaNed

Kubko sedí vo svojej vytunenej plechovke a zrýchľuje. Má síce ľubovoľne výkonný motor, ale znamená to, že môže zrýchliť na ľubovoľne veľkú rýchlosť?

Zo zadania vieme, že hmotnosť auta je m , efektívna čelná plocha S , koeficient aerodynamického odporu C a koeficient trenia medzi gumou a asfaltom f . Aby sme popísali situáciu, v ktorej sa Kubkovo auto nachádza, pozrime sa na pôsobiace sily. Problematickou môže byť sila od motora, ktorý má podľa zadania ľubovoľný výkon. Môže nás to viesť k mylnému záveru, že pokým táto sila je zodpovedná za pohyb auta, potom by malo byť schopné zrýchľovať nad všetky medze.

V skutočnosti si treba položiť otázku, čo stojí za pohybom auta, a či je tento pohyb niečím limitovaný. Odpoveďou je trecia sila F_t , ktorá je na rozdiel od nášho motora obmedzená. Motor síce roztáča kolesá, ale aby sa auto pohlo dopredu, potrebuje treciu silu od podložky, ktorá pôsobí proti pohybu kolies, v smere jazdy auta. Aj keď máme ľubovoľný výkon, narazíme pri zvyšovaní rýchlosti na hornú hranicu trecej sily. Po jej prekročení nebude relatívna rýchlosť medzi podložkou a kolesom nulová, kolesá začnú prešmykovať a auto nebude schopné ďalej zrýchľovať.

Okrem trecej sily pôsobí v horizontálnom smere aj odporová sila F_o , ktorej veľkosť je priamo úmerná druhej mocnine rýchlosti, a pôsobí proti pohybu. Vo vertikálnom smere pôsobí gravitačná sila F_G , ktorou pôsobí na auto zem a v opačnom smere sila N , ktorou pôsobí na koleso podložka. Auto sa v tomto smere nepohybuje a tieto sily sa rovnajú, z čoho vyplýva, že $N = F_G = mg$.

Keď si to zhrnieme, pri pohybe auta vystupujú dve sily, trecia a odporová. Pohybová rovnica pre auto je potom

$$ma = F_t - F_o,$$

kde trecia a odporová sila sú

$$F_t = Nf = mgf \quad \text{a} \quad F_o = \frac{C\rho Sv^2}{2}.$$

So zväčšujúcou sa rýchlosťou rastie kvadraticky odpor vzduchu a zrýchlenie auta sa znižuje. Pri maximálnej nožnej rýchlosti dôjde k vyrovnaniu trecej a odporovej sily, kedy auto už nebude schopné zrýchľovať

($a = 0$) a ďalej sa bude pohybovať rovnomerne priamočiario. Z tejto rovnosti si vieme vyjadriť maximálnu rýchlosť Kubkovho auta

$$F_o = F_t \Rightarrow \frac{C\rho S v^2}{2} = mgf \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgf}{C\rho S}}.$$

Riešenie sa vám môže zdať podobné na známy výsledok hľadania terminálnej rýchlosti pri voľnom páde, kde vyjde

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}}.$$

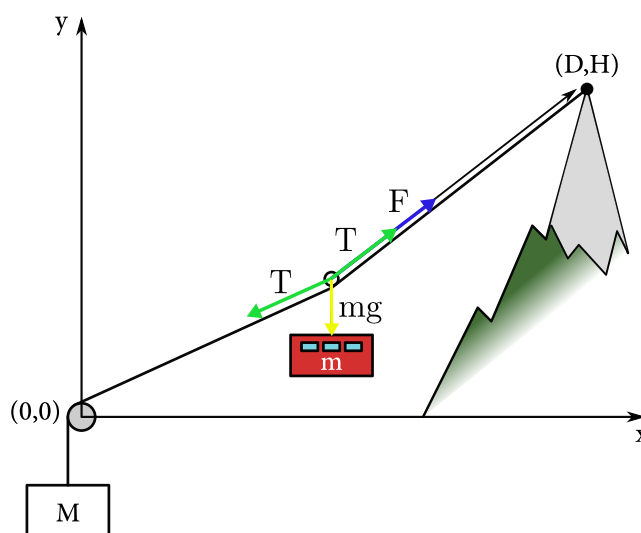
Táto podobnosť nie je náhodná. Keď sa hlbšie zamyslíme nad podstatou problému, všimneme si, že aj v našom prípade máme konštantú silu, ktorá tlačí auto dopredu a odporovú silu priamo úmernú druhej mocnine rýchlosti, ktorá pôsobí proti pohybu. Jediný rozdiel medzi našim výsledkom a dobre známou terminálnou rýchlosťou je konštanta f .

1.5 Quo vadis, Lanovka?

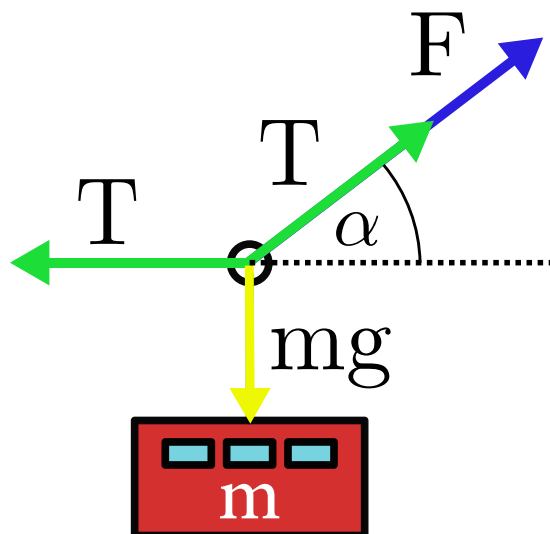
vzorák MatusH, opravoval MatusH

Hneď zo zadania vieme povedať, že riešenie bude mať viacero krokov. V prvom rade si musíme uvedomiť, aké sily pôsobia na lanovku, tieto sily musíme aj vyjadriť, keďže budeme musieť s nimi počítať. Následne nám zadanie ponúka špeciálny prípad keď lanovka vychádza zo stanice, takže si napíšeme rovnice pre tú situáciu. Následne si napíšeme rovnice pre všeobecný bod lanovky a budeme upravovať.

Na lanovku v prvom rade pôsobí tiažová sila, ktorá pôsobí smerom dole a má veľkosť mg . Takisto je lanovka ťahaná ťažným lanom z hornej stanice, ktoré ju ťahá smerom k hornej stanici. Jej veľkosť nevieme, takže si ju označíme F . Na lanovku ešte pôsobí nosné lano. Keďže nás v každom okamihu zaujíma ustálený prípad, vieme, že lanovka sa nehýbe v tom momente. Preto si môžeme predstaviť, že ak by bola lanovka pripevnená pevne k lanu, tak by mali na ňu pôsobiť rovnaké sily. Ak je pripevnená, tak je ľahko nahliadnutelné, že na ňu pôsobí sila smerom k hornej stanici a ďalšia smerom k dolnej stanici. Z toho, že je to jedno lano, tak vieme, že napätie v ňom je všade rovnaké, a preto tieto dve sily musia byť rovnaké. Na lane je okrem kabínky aj závažie hmotnosti M , ktoré sa v ustálenom prípade tiež nehýbe. Pôsobí naňho len sila od lana a tiažová sila. Z toho dostávame, že $T = Mg$, kde T je napätie v lane.



Teraz sa pozrieme na špeciálny prípad, keď lanovka štartuje z dolnej stanice. Sily na ňu pôsobiace vyzerajú takto:



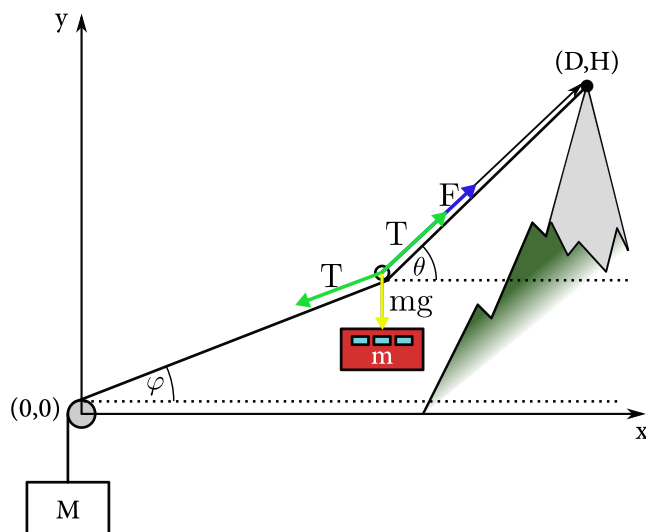
Pričom uhol α vieme vyjadriť ako $\arctan\left(\frac{H}{D}\right)$ respektíve $\cot(\alpha) = \frac{D}{H}$. Ide o ustálený prípad, preto sily v horizontálnom a vertikálnom smere sa musia vyrušiť. Z toho máme rovnicu pre vertikálny smer:

$$mg = \sin(\alpha)(F + T) \rightarrow F + T = \frac{mg}{\sin(\alpha)}.$$

Horizontálny smer:

$$T = \cos(\alpha)(F + T) = \cos(\alpha) \frac{mg}{\sin(\alpha)} = \cot(\alpha)mg = \frac{D}{H}mg.$$

Teraz sa pozrime na všeobecný prípad, keď je lanovka v nejakej vodorovnej vzdialenosti x od dolnej stanice.



Sily v horizontálnom smere budú:

$$\cos(\varphi)T = \cos(\theta)(T + F) \rightarrow (T + F) = \frac{\cos(\varphi)}{\cos(\theta)}T$$

A vo vertikálnom:

$$\sin(\varphi)T = \sin(\theta)(T + F) - mg = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\cos(\varphi)T - mg.$$

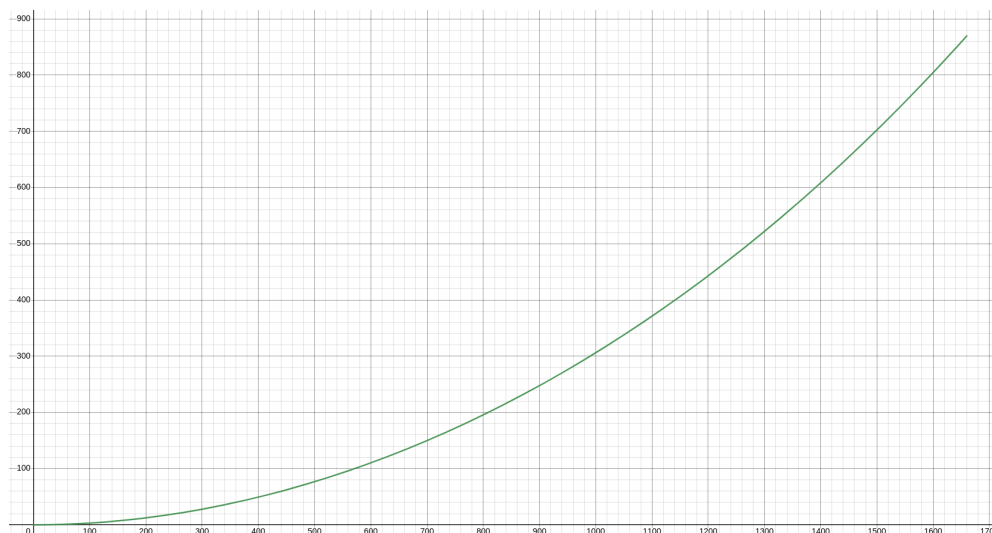
Keďže nás zaujíma $f(x, y) = 0$ dáme všetky členy na jednu stranu

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\cos(\varphi)T - mg - \sin(\varphi)T \\ &= \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\cos(\varphi) - \sin(\varphi) \right)T - mg = 0. \end{aligned}$$

Teraz nadišiel čas dosadiť za všetky $\sin$, $\cos$ a T . Z obrázku vidno nasledujúce rovnosti $\sin(\varphi) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos(\varphi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin(\theta) = \frac{H-y}{\sqrt{(D-x)^2+(H-y)^2}}$, $\cos(\theta) = \frac{D-x}{\sqrt{(D-x)^2+(H-y)^2}}$. Po dosadení spolu aj s $T = \frac{D}{H}mg$:

$$\begin{aligned} 0 = f(x, y) &= \left(\frac{\frac{H-y}{\sqrt{(D-x)^2+(H-y)^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\frac{D-x}{\sqrt{(D-x)^2+(H-y)^2}}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \frac{D}{H}mg - mg \\ &= \left(\frac{H-y}{D-x} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \frac{D}{H} - 1 \\ &= \left(\frac{H-y}{D-x}x - y \right) - \frac{H}{D}\sqrt{x^2+y^2} \\ &= \left(\frac{Hx-yx}{D-x} - \frac{Dy-xy}{D-x} \right) - \frac{H}{D}\sqrt{x^2+y^2} \\ &= \frac{Hx-Dy}{D-x} - \frac{H}{D}\sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Toto už prehlásime za dostatočne pekný tvar, čím nám ostane posledná úloha, vizualizovať ako vyzerá takáto trajektória.



1.6 Vesmírny gulečník

vzorák **Tomáš**, opravoval **Tomáš**

Zadanie explicitne spomína sústavu spojenú s ťažiskom binárneho asteroidu, takže všetko budeme počítať práve v sústave s počiatkom v ťažisku. Okolo neho obieľajú oba asteroidy po kruhových dráhach. Hmotnosť DARTu je zanedbateľná voči obom asteroidom, takže ju nebudeme brať do úvahy pri určovaní polohy ťažiska. V jednom momente do Dimorpha čelne narazí DART, čiže ho spomalí. A úlohou je zistiť, o koľko ho spomalí, aby sme vedeli spočítať rozdiel hybnosti Dimorpha pred a po zrážke a dať ho do podielu s pôvodnou hybnosťou DARTu, čo je kýžená účinnosť zrážky.

Budeme používať nasledovné označenia pre veličiny zo zadania: m pre hmotnosť DARTu, M_1 pre hmotnosť Didyma, M_2 pre hmotnosť Dimorpha, $v = 6500$ m/s pre pôvodnú rýchlosť DARTu voči Dimorphovi, P_0 a P_1 pre pôvodnú a novú obežnú dobu a $a_0 = 1165$ m pre pôvodnú vzájomnú vzdialenosť asteroidov. Pre ďalšie veličiny budeme používať: v_0 pre rýchlosť DARTu v ťažiskovej sústave, v_1 a v_2 pre pôvodné rýchlosti asteroidov v ťažiskovej sústave a v'_2 pre novú rýchlosť Dimorpha v ťažiskovej sústave. Účinnosť zrážky teda je

$$\eta = \frac{M_2(v_2 - v'_2)}{mv_0}.$$

Zo znalosti vzájomnej vzdialenosti $a_0 = 1165$ m spočítajme vzdialenosti r_1 a r_2 asteroidov od ťažiska pred zrážkou. Ťažisko nájdeme rovnako ako rovnováhu na páke, čiže máme dve rovnice

$$M_1 r_1 = M_2 r_2, \quad r_1 + r_2 = a_0,$$

ktoré keď vyriešime, dostaneme vzdialenosti od ťažiska

$$r_1 = a_0 \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad r_2 = a_0 \frac{M_1}{M_1 + M_2}.$$

Pôvodná obežná rýchlosť Dimorpha v ťažiskovej sústave je jednoducho obvod kružnice vydelený periódou

$$v_2 = \frac{2\pi r_2}{P_0} = \frac{2\pi a_0 M_1}{P_0(M_1 + M_2)}.$$

DART išiel rýchlosťou v_0 oproti Dimorphovi, takže sa čelne zrazili rýchlosťou $v = v_0 + v_2$. Teraz už ľahko vyjadríme

$$mv_0 = m(v - v_2) = m\left(v - \frac{2\pi a_0 M_1}{P_0(M_1 + M_2)}\right),$$

čo vystupuje vo výraze pre účinnosť zrážky.

Teraz nám už stačí len zrátať rýchlosť Dimorpha v'_2 po zrážke. Najprv zistíme, akú bude mať veľkú polos a_1 elipsa, po ktorej bude obiehať Dimorphos po zrážke. Využijeme na to tretí Keplerov zákon

$$\frac{a_0^3}{P_0^2} = \frac{a_1^3}{P_1^2} \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

To potrebujeme, aby sme to mohli dosadiť do rovnice vis-viva, čo je vlastne zákon zachovania energie. Jej presné znenie je

$$V^2 = G(m_1 + m_2) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

kde V je aktuálna rýchlosť jedného telesa voči druhému, m_1 a m_2 sú ich hmotnosti, r je ich aktuálna vzdialenosť, no a ak sa posadím na jedno z telies, to druhé budem vidieť, že obieha okolo telesa, na ktorom sedím, po elipse s veľkou polosou a . Je to to isté a , ktoré vystupuje aj v treťom Keplerovom zákone. V prípade pred zrážkou je vzájomná rýchlosť asteroidov $v_2 + v_1$ ⁶ a pri pohybe po kružnici sú veľká polos a_0 a vzájomná vzdialenosť totožné. Preto pred zrážkou platí

$$(v_2 + v_1)^2 = G(M_1 + M_2) \left(\frac{2}{a_0} - \frac{1}{a_0}\right) \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{a_0}} - v_2.$$

V momente tesne po zrážke je vzájomná vzdialenosť stále a_0 , ale Dimorphos spomalí na v'_2 , a preto sa veľká polos zmení na už známe a_1 . Z rovnice vis-viva teda máme

$$(v'_2 + v_1)^2 = G(M_1 + M_2) \left(\frac{2}{a_0} - \frac{1}{a_1}\right) \quad \Rightarrow \quad v'_2 = \sqrt{G(M_1 + M_2) \left(\frac{2}{a_0} - \frac{1}{a_1}\right)} - v_1.$$

Teraz už máme hotovo, pretože sme si vyjadrili všetko, čo potrebujeme. Účinnosť zrážky po dosadení všetkých vyjadrení veličín je

$$\eta = \frac{M_2(v_2 - v'_2)}{mv_0} = \frac{M_2 \left(\sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{a_0}} - \sqrt{G(M_1 + M_2) \left(\frac{2}{a_0} - \frac{1}{a_0} \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{2}{3}}\right)} \right)}{m \left(v - \frac{2\pi a_0 M_1}{P_0(M_1 + M_2)} \right)} \doteq 3,81.$$

To znamená, že účinnosť zrážky je 381 %.

Pozorný čitateľ si určite povie: „Ale, ale, milý aströológ, ako môže byť účinnosť vyššia ako 100 %?“ Nuž, účinnosť je len meno pre nejakú veličinu, ktorá nás v tejto úlohe zaujíma. Bežne poznáme účinnosť napríklad v zmysle, že účinnosť spaľovacieho motora je približne 30 %. To znamená, že do nádrže natankujeme benzín, ktorého spálením sa uvoľní istá energia. Z nej len 30 % energie vieme premeniť na kinetickú energiu auta. Takáto účinnosť bude, samozrejme, vždy nižšia ako 100 %, pretože zákon zachovania energie nepustí – auto nemôže z benzínu získať viac kinetickej energie ako sa dá získať jeho spálením. V tejto úlohe to je iné. DART

⁶ Pretože sa pohybujú po kružniciach a v každom momente majú vektory ich rýchlostí opačný smer.

odovzdá svoju hybnosť Dimophovi, ale pri zrážke vznikol kráter, z ktorého sa vymrštil materiál. No a keďže tento materiál odlieta smerom, z ktorého priletel DART, odnáša tým smerom nejakú hybnosť. Dimorphos teda spomalí nielen kvôli nárazu DARTu, ale navyše aj kvôli odlietavajúcemu materiálu, čo stojí za masívnou účinnosťou 381 %.

1.7 Autonómne cvičenie

vzorák Jozef, opravoval Jozef

Pri riešení úloh, v ktorých sa hľadá perióda kmitania oscilátora, existujú dva bežne používané postupy. Prvý prístup je cez sily a býva najpriamočiarejší. Je založený na tom, že si nakreslíme všetky sily, ktoré na systém pôsobia a napíšeme pohybovú rovnicu. Ak sa nám podarí túto rovnicu upraviť do tvaru $\ddot{x} = -\omega^2 x$, kde ω je nejaká konštanta (je dôležité aby pred sebou mala záporné znamienko) a x je výchylka z rovnovážnej polohy, potom môžeme okamžite povedať, že systém vykonáva harmonické kmity a ω je uhlová frekvencia týchto kmitov. Tento postup býva síce najpriamočiarejší, ale pri systémoch s komplikovanou geometriou býva nevýhodný, pretože je ťažké analyzovať všetky sily v systéme. A to je aj náš prípad. Len si spomeňte na úlohu 5 z druhého kola zimnej série! Takým šialenostiam sa rozhodne chceme vyhnúť!

Preto (v súlade s lenivosťou autora tohto vzoráku) si predstavíme iný a omnoho výhodnejší postup riešenia – energetický prístup. Spočíva v tom, že si napíšeme zákon zachovania energie. Ten má zvyčajne tvar

$$\text{kinetická energia} + \text{potenciálna energia} = \text{konštanta}.$$

Následne ho budeme upravovať, až kým ho nedokopeme do tvaru

$$\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\beta x^2 = \text{konšt.}, \quad (1.7.1)$$

kde α a β sú nejaké konštanty a x je opäť výchylka z rovnovážnej polohy. Akonáhle máme túto rovnicu, tak môžeme jasť, pretože to znamená, že máme opäť harmonické kmity a ich uhlová frekvencia je

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Ak neveríte, tak si vyššie-uvadenú rovnicu zderivujte podľa času a vyjde vám $\alpha\dot{x}\ddot{x} + \beta x\dot{x} = 0$ a po úprave $\dot{x} = -\frac{\beta}{\alpha}x$, čo je presne rovnica pre harmonické kmity. Tento postup je teda ekvivalentný vyššie-uvadenému silovému prístupu, ale vyhneme sa skladaniu vektorov síl.

Keď už máme rozmyslenú stratégiu, pustime sa do počítania! Do zákona zachovania energie potrebujeme dve ingrediencie – potenciálnu energiu V a kinetickú T . Začnime potenciálnou.

Zaveďme si uhol φ ako polovicu uhla, ktorý zvierajú dolné dve tyče. Potom dĺžka pružiny je jednoducho $l = 2L \sin \varphi$ a potenciálna energia pružiny je teda

$$V_p = \frac{1}{2}kl^2 = 2kL^2 \sin^2 \varphi.$$

To bolo jednoduché! K celkovej potenciálnej energii systému však prispieva aj gravitačná potenciálna energia jednotlivých tyčí. Tú spočítame ako $M \times g \times \text{výška ťažiska}$. Teda pre dolné dve tyče je to $Mg\frac{l}{2} \cos \varphi$ a pre

vrchné dve tyče je to $Mg\frac{3}{2}L \cos \varphi$. Celkovo teda

$$V_g = 2 \cdot Mg\frac{L}{2} \cos \varphi + 2 \cdot Mg\frac{3}{2}L \cos \varphi = 4MgL \cos \varphi$$

a celková potenciálna energia systému je

$$V = V_p + V_g = 2kL^2 \sin^2 \varphi + 4MgL \cos \varphi.$$

Keď už máme vyjadrenú potenciálnu energiu, je už veľmi ľahké nájsť rovnovážnu polohu oscilátora. Rovnovážna poloha je totiž vždy v minime potenciálnej energie! Zderivujme teda V podľa výchylky φ a položíme výsledok rovný nule. Dostaneme

$$\frac{dV}{d\varphi} = 0 = 4kL^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - 4MgL \sin \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = \frac{Mg}{kL}.$$

Teraz sa pustíme do celkovej kinetickej energie T systému. Najskôr si uvedomme, čo všetko sa nám tu hýbe. V prvom rade dolné dve tyče sa otáčajú okolo svojho dolného konca rýchlosťou $\dot{\varphi}$. Ich kinetickú energiu vypočítame jednoducho ako $\frac{1}{2}I_k\dot{\varphi}^2$, kde I_k je moment zotrvačnosti tyče okolo jej konca. Horné dve tyče vykonávajú zložitejší pohyb. Ten môžeme rozdeliť na pohyb ťažiska a rotáciu okolo ťažiska uhlovou rýchlosťou $\dot{\varphi}$. Kinetická energia ich pohybu teda je $\frac{1}{2}Mv_T^2 + \frac{1}{2}I_T\dot{\varphi}^2$, kde v_T je rýchlosť pohybu ťažiska a I_T je moment zotrvačnosti tyče okolo svojho ťažiska⁷.

Budeme teda potrebovať momenty zotrvačnosti I_k a I_T tyče okolo svojho konca, resp. svojho ťažiska. Tie sú

$$I_k = \frac{1}{3}ML^2,$$

$$I_T = \frac{1}{12}ML^2.$$

Rotačná kinetická energia dolných dvoch tyčí je teda

$$T_{\text{dolné}} = 2 \cdot \frac{1}{2}I_k\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{3}ML^2\dot{\varphi}^2.$$

⁷Naozaj, kinetická energia pohybu ľubovoľného tuhého telesa sa dá zapísať ako súčet kinetickej energie pohybu ťažiska a rotačnej kinetickej energie okolo ťažiska. Ak si predstavíme tuhé teleso zložené z hmotných bodov m_i , potom

$$T = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2}m_i (\mathbf{v}_T + \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega})^2 = \sum \frac{1}{2}m_i (v_T^2 + 2\mathbf{v}_T \cdot (\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega})^2) = \sum \frac{1}{2}m_i v_T^2 + \sum \mathbf{v}_T \cdot (m_i \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega}) + \sum \frac{1}{2}m_i (\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega})^2,$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je uhlová rýchlosť otáčania sa tyče okolo ťažiska a $\mathbf{r}_i$ je vektor polohy hmotného bodu vzhľadom na ťažisko. Všimnite si, že prvý člen nie je nič iné ako kinetická energia pohybu ťažiska $\frac{1}{2}Mv_T^2$ a posledný člen je rotačná energia okolo ťažiska $\frac{1}{2}I_T\omega^2$. Prostredný člen sa vynuluje, pretože v sebe obsahuje $\sum m_i \mathbf{r}_i$ a to je pre súradnicovú sústavu s počiatkom v ťažisku rovné nule.

Pre výpočet kinetickej energie horných tyčí budeme najskôr musieť určiť rýchlosť v_T ich ťažiska. Zamerajme sa na pravú hornú tyč. Poloha jej ťažiska je daná

$$x_T = \frac{1}{2}L \sin \varphi,$$

$$y_T = \frac{3}{2}L \cos \varphi.$$

Tieto súradnicové vyjadrenia teraz zderivujeme podľa času. Dostaneme

$$\dot{x}_T = \frac{1}{2}L\dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$\dot{y}_T = -\frac{3}{2}L\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Rýchlosť ťažiska potom už nájdeme jednoducho ako

$$v_T^2 = \dot{x}_T^2 + \dot{y}_T^2 = \frac{L^2\dot{\varphi}^2}{4}(\cos^2 \varphi + 9 \sin^2 \varphi) = \frac{L^2\dot{\varphi}^2}{4}(1 + 8 \sin^2 \varphi).$$

Potom už kinetickú energiu horných dvoch tyčí môžeme vypočítať ako

$$T_{horné} = 2 \cdot \frac{1}{2}Mv_T^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}I_T\dot{\varphi}^2 = M\frac{L^2\dot{\varphi}^2}{4}(1 + 8 \sin^2 \varphi) + \frac{1}{12}ML^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{3}ML^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + 2ML^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi.$$

Nakoniec súčtom $T_{dolné}$ a $T_{horné}$ získame celkovú kinetickú energiu sústavy

$$T = T_{dolné} + T_{horné} = \frac{2}{3}ML^2\dot{\varphi}^2 + 2ML^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi.$$

Napíšme si teraz zákon zachovania energie v tvare $T + V = \text{konšt.}$:

$$\text{konšt.} = T + V = \frac{2}{3}ML^2\dot{\varphi}^2 + 2ML^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + 2kL^2 \sin^2 \varphi + 4MgL \cos \varphi$$

Toto ešte nie je tvar, ktorý chceme, pretože sa tu vyskytujú komplikované funkcie ako $\sin^2 \varphi$ a $\cos \varphi$. My by sme ich chceli nejako aproximovať, aby sme rovnicu upravili do tvaru 1.7.1. Využijeme fakt, že výchylka z rovnovážnej polohy $\varphi - \varphi_0$ je malá a urobíme Taylorov rozvoj v bode φ_0 . Taylorov rozvoj nejakej funkcie $f(\varphi)$ je vo všeobecnosti definovaný vzorcom

$$f(\varphi) = f(\varphi_0) + \left. \frac{df}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} (\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} (\varphi - \varphi_0)^2 + \mathcal{O}((\varphi - \varphi_0)^3),$$

kde $\mathcal{O}((\varphi - \varphi_0)^3)$ značí všetky členy, ktoré obsahujú tretiu a vyššiu mocninu výrazu $(\varphi - \varphi_0)$. Tieto členy budeme zanedbávať, pretože do vzorca 1.7.1 nám stačia mocniny druhého rádu. Keď toto aplikujeme na

rovnice $\cos \varphi$ a $\sin^2 \varphi$ a využijeme $\cos \varphi_0 = \frac{Mg}{kL}$, $\sin \varphi_0 = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0}$, dostaneme

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 (\varphi - \varphi_0) - \frac{\cos \varphi_0}{2} (\varphi - \varphi_0)^2 + \mathcal{O}((\varphi - \varphi_0)^3) \\ &= \frac{Mg}{kL} - \sqrt{1 - \frac{M^2 g^2}{k^2 L^2}} (\varphi - \varphi_0) - \frac{Mg}{2kL} (\varphi - \varphi_0)^2 + \mathcal{O}((\varphi - \varphi_0)^3)\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\sin^2 \varphi &= \sin^2 \varphi_0 + 2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 (\varphi - \varphi_0) + (\cos^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi_0) (\varphi - \varphi_0)^2 + \mathcal{O}((\varphi - \varphi_0)^3) \\ &= 1 - \frac{M^2 g^2}{k^2 L^2} + 2 \frac{Mg}{kL} \sqrt{1 - \frac{M^2 g^2}{k^2 L^2}} (\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{2M^2 g^2}{k^2 L^2} - 1 \right) (\varphi - \varphi_0)^2 + \mathcal{O}((\varphi - \varphi_0)^3).\end{aligned}$$

Takto vyjadrené $\cos \varphi$ a $\sin^2 \varphi$ teraz dosadíme do potenciálnej energie $V = 2kL^2 \sin^2 \varphi + 4MgL \cos \varphi$ a po úprave dostaneme

$$V = \underbrace{2kL^2 \left(1 - \frac{M^2 g^2}{k^2 L^2} \right) + \frac{4M^2 g^2}{k}}_{\text{konštanta}} + \frac{1}{2} \left(4kL^2 \left(\frac{2M^2 g^2}{k^2 L^2} - 1 \right) - 4 \frac{M^2 g^2}{k} \right) (\varphi - \varphi_0)^2.$$

Všimnime si, že členy s prvou mocninou vypadli. To sme očakávali, pretože robíme Taylorov rozvoj v minime potenciálnej energie $(\varphi - \varphi_0)$ a tu je prvá derivácia rovná nule.

Teraz nám ešte ostáva upraviť člen s kinetickou energiou $T = \frac{2}{3} ML^2 \dot{\varphi}^2 + 2ML^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi$. Tu nám vadí jedine člen obsahujúci $\sin^2 \varphi$. Skôr než opäť bezhlavo aplikujeme Taylorov rozvoj sa ale zamyslime nad tým, ktoré členy nám budú stačiť. Spomeňte si, že robíme aproximáciu malých kmitov. To znamená, že výchylka z rovnovážnej polohy $\varphi - \varphi_0$ je malá. To zapíšeme $\varphi - \varphi_0 \sim \epsilon$, kde ϵ je nejaké malé číslo. Potom $(\varphi - \varphi_0)^2 \sim \epsilon^2$ je ešte menšie číslo a $(\varphi - \varphi_0)^3 \sim \epsilon^3$ je už tak malé, že ho zanedbávame. Avšak pri malých kmitoch je zvyčajne aj rýchlosť kmitania veľmi malá. To zapíšeme $\dot{\varphi} \sim \epsilon$. Teraz sa pozrime na problematický člen v kinetickej energii. Ten obsahuje súčin $\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi$. Lenže $\dot{\varphi}^2$ je už rádu ϵ^2 , teda z Taylorovho rozvoja $\sin^2 \varphi$ nám stačí zobrať konštantný člen $\sin^2 \varphi_0$. Tým dostávame aproximovanú kinetickú energiu

$$\begin{aligned}T &= \frac{2}{3} ML^2 \dot{\varphi}^2 + 2ML^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi_0 + \mathcal{O}((\varphi - \varphi_0)^3) \\ &= \frac{1}{2} ML^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{4}{3} + 4 \left(1 - \frac{M^2 g^2}{k^2 L^2} \right) \right).\end{aligned}$$

Teraz to dajme všetko dokopy! Zákon zachovania energie má tvar

$$\text{konšt.} = \frac{1}{2} ML^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{4}{3} + 4 \left(1 - \frac{M^2 g^2}{k^2 L^2} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(4kL^2 \left(\frac{2M^2 g^2}{k^2 L^2} - 1 \right) - 4 \frac{M^2 g^2}{k} \right) (\varphi - \varphi_0)^2.$$

Potom už periódu τ kmitania môžeme zapísať v tvare

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{ML^2 \left(\frac{4}{3} + 4 \left(1 - \frac{M^2 g^2}{k^2 L^2} \right) \right)}{4kL^2 \left(\frac{2M^2 g^2}{k^2 L^2} - 1 \right) - 4 \frac{M^2 g^2}{k}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{4}{3} - \frac{M^2 g^2}{k^2 L^2} \right) ML^2}{\frac{M^2 g^2}{k} - kL^2}}.$$

A máme hotovo!

1.8 A predsa sa točí

vzorák ?, opravoval **Matúš H.**