Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Ľadová diéta

vzorák **Samčo**, opravoval **Samčo**

Najprv sa pozrime na to, čo sa stane, keď mrazničku otvoríme. Studený vzduch pomerne rýchlo vytečie a dovnútra natečie teplý vzduch. Keď mrazničku zavrieme, vzduch začne pomerne rýchlo chladnúť vzhľadom k jeho nízkej mernej tepelnej kapacite. To, o koľko sa zmení tlak vzduchu v mrazničke, vieme zistiť zo stavovej rovnice jednoduchým výpočtom, kde uvažujeme, že objem plynu v mrazničke sa počas chladenia nezmení (čiže ide o izochorický dej):

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2},$$

$$p_2 = \frac{p_1 T_2}{T_1} = \frac{100\,\mathrm{kPa} \cdot 255\,\mathrm{K}}{293\,\mathrm{K}} \approx 87\,\mathrm{kPa},$$

kde sme uvažovali atmosférický tlak $p_1 = 100\,\mathrm{kPa}$, pôvodnú teplotu $T_1 = 20\,°\mathrm{C}$ (293 K) a teplotu mrazničky $T_2 = -18\,°\mathrm{C}$ (255 K). Uvažujme ďalej dvere chladničky s rozmermi $40\,\mathrm{cm} \times 30\,\mathrm{cm}$. Potom sila, ktorou musíme pôsobiť pri otváraní dverí, je:

$$F = \Delta p S = (100\,\mathrm{kPa} - 87\,\mathrm{kPa}) \cdot 40\,\mathrm{cm} \cdot 30\,\mathrm{cm} \doteq 1560\,\mathrm{N}.$$

čo je, samozrejme, kolosálna hlúposť, to by tie dvere od mrazničky Fero už v živote neotvoril. Na jednu stranu teploty v mrazničke nie je presne 20 a -18 stupňov, no hlavná príčina spočíva v netesnostiach mrazničiek. Akonáhle začne klesať tlak, mraznička začne púšťať dovnútra nejaké množstvo vzduchu, až kým sa tlaky nevyrovnajú. No kým sa tento proces udeje, dvere sa otvárajú ťažko, čo je odpoveď na zadanú úlohu. Okrem doteraz spomínaného princípu dvere chladničky držia navyše aj magnetom, čo ale nevysvetľuje, prečo sa dvere mrazničky ťažko otvárajú iba spočiatku.

2.2 Ľadovcová sánkovačka

vzorák **Jaro**, opravoval **Vladko**

Úloha sa na prvý pohľad síce zdá byť náročná, no my sa jej nezľakneme a s vervou sa do nej pustíme. Veď profil ľadovca môže byť rôznorodý a jeho sklon sa teda môže všakovako meniť, čo znamená, že sa bude meniť aj zložka tiažového zrýchlenia, ktorá spôsobuje spomaľovanie, resp. zrýchľovanie kvádrika. Začnime preto s najjednoduchším modelom, a tým je naklonená rovina. Našou motiváciou môže byť napríklad skutočnosť, že akýkoľvek zložitý profil vieme vyskladať z veľkého počtu maličkých naklonených roviniek s rôznym sklonom.

Uvažujme naklonenú rovinu, ktorá zviera s horizontálnym smerom uhol α. Potom zložka tiažového zrýchlenia v smere spádnice naklonenej roviny má veľkosť $a = g \sin \alpha$. Filipov kvádrik sa teda bude pohybovať s takýmto zrýchlením. Lenže to zostáva konštantné počas celého pohybu, keďže sa sklon roviny nemení, takže budeme vyšetrovať rovnomerne zrýchlený/spomalený pohyb.

Predpokladajme, že Filip udelil kvádriku rýchlosť v_0. Potom je rýchlosť kvádrika v čase t popísaná notoricky známou rovnicou $v(t) = v_0 - at$. Vieme, že ľadovec je dokonale klzký, takže ak zanedbávame odpor vzduchu, potom pri kĺzaní kvádrika nedochádza k stratám energie, dôsledkom čoho je veľkosť vektora rýchlosti kvádrika pri návrate rovná jeho počiatočnej rýchlosti. Smer rýchlosti je samozrejme opačný.

Označme dobu pohybu kvádrika T. Podľa predošlej úvahy je jeho rýchlosť v tomto čase $v(T) = -v_0$, takže po dosadení do rovnice pre rovnomerne spomalený pohyb dostávame $-v_0 = v_0 - aT$. Odtiaľ

$$T(v_0) = \frac{2v_0}{a} = \frac{2v_0}{g \sin\alpha}.$$

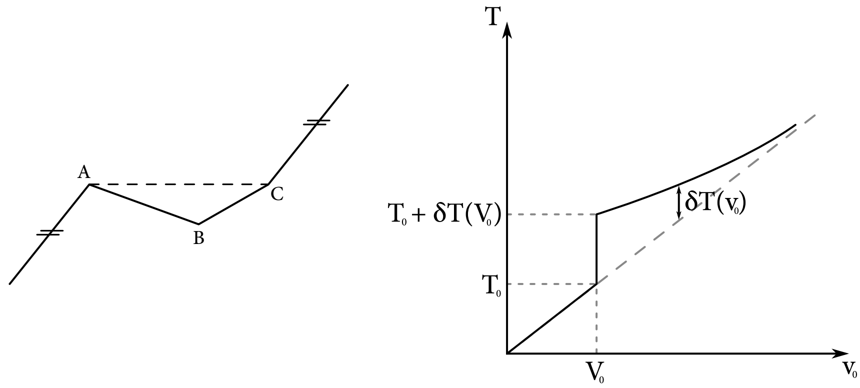
Dosiahli sme mimoriadne dôležitý poznatok, a to, že pre rovinný povrch ľadovca je čas do návratu kvádrika lineárnou funkciou jeho počiatočnej rýchlosti. Keď sa však pozrieme na Filipov graf, vidíme, že úsek od počiatku až po zlom v grafe vykazuje presne takúto závislosť. To môže znamenať len jediné – sklon ľadovca v jeho dolnej časti je konštantný.

Sklon grafu je určený konštantou úmernosti $k = \frac{2}{g\sin\alpha}$, ktorá zodpovedá tangensu uhla medzi grafom a x-ovou osou. Ako vidíme, tá bezprostredne súvisí so sklonom ľadovca. Ak z grafu určíme konštantu úmernosti, vieme vypočítať sklon ľadovca podľa vzťahu $\sin\alpha = \frac{2}{gk}$, resp. $\alpha = \arcsin\left(\frac{2}{gk}\right)$. Okamžite vidíme, že čím je sklon grafu väčší, tým je sklon ľadovca menší. To dáva zmysel, pretože vyšší sklon grafu hovorí, že kvádriku trvá dlhšie, než zastane a vráti sa späť. To naozaj zodpovedá prípadu, keď je zrýchlenie menšie, a tým pádom je nižší aj sklon ľadovca.

Teraz sa zamyslime, čím by mohol byť spôsobený zlom v grafe. Po krátkej kontemplácii si uvedomíme, že do úvahy pripadajú dve, či tri možnosti:

- mení sa sklon ľadovca;
- v ľadovci je priehlbina, teda na istom úseku ľadovca jeho sklon klesá, no a potom znova stúpa;
- časť povrchu ľadovca má horizontálny smer;
- alebo kombinácia prvej s niektorou z ďalších možností.

Aby sme vedeli rozhodnúť, ktorá z týchto troch možností zodpovedá realite, zamyslime sa nad tým, ako by sa každá z nich prejavila na grafe. Začnime s druhou. Názorný príklad je načrtnutý na obrázku.



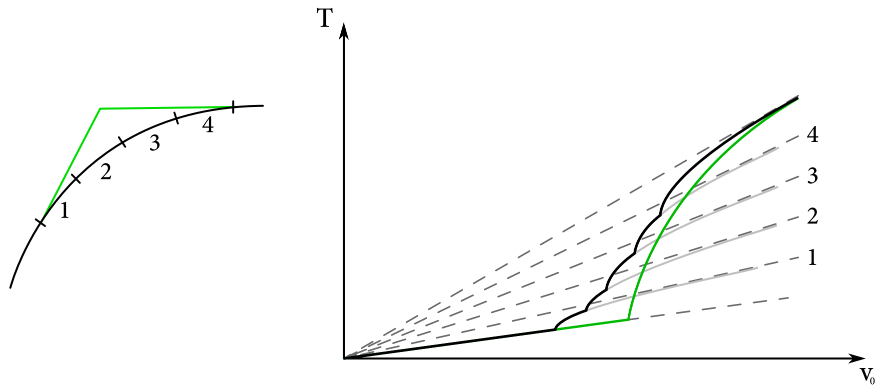
Obrázok 1: *Hranatá depresia v ľadovci a tomu zodpovedajúci $v_0 - T$ graf*

Uvažujme najprv prípad, že kvádrik má takú počiatočnú rýchlosť V_0, aby zastal tesne pred bodom A a skĺzol sa späť. To nech mu trvá čas T_0. Teraz uvažujme, že má o máličko vyššiu počiatočnú rýchlosť, takú, že sa cez vrchol A prepadne do priehlbiny. Tu najskôr zrýchľuje, až dosiahne dno B, a potom začne spomaľovať, až v bode C zastane a skĺzne sa cez priehlbinu späť až k Filipovi. Prekonanie priehlbiny ho oproti predchádzajúcemu prípadu bude v súčte oboch prechodov stáť oneskorenie δT. Ak teraz uvážime prípad, že kvádrik bude mať v bode A nenulovú rýchlosť, tak po prekonaní priehlbiny zastane až nad bodom C a skĺzne sa späť. Tentokrát ale prekoná priehlbinu vyššou rýchlosťou, teda nadobudnuté oneskorenie bude oproti predošlému prípadu nižšie.

Vidíme teda, že oneskorenie je závislé na rýchlosti, ktorou sa kvádrik cez priehlbinu pohybuje, a teda de facto na počiatočnej rýchlosti $\delta T(v_0)$. Čím je počiatočná rýchlosť vyššia, tým je vyššia rýchlosť pohybu cez priehlbinu, a teda oneskorenie je nižšie. Ak je rýchlosť v priehlbine dostatočne vysoká, čas strávený v priehlbine je zanedbateľne malý v porovnaní s časom, ktorý strávi kvádrik mimo nej, čo sa na grafe prejaví tak, že sa asymptoticky približuje k priamke popisujúcej pohyb kvádrika, ako keby tam žiadna priehlbina nebola. Pre nás je podstatné, že žiaden takýto skok vo Filipovom grafe nevidíme, takže na ľadovci žiadna priehlbina byť nemôže.[1]

Prv, než začneme analyzovať vplyv zmeny sklonu ľadovca na tvar grafu, pristavme sa ešte v krátkosti pri možnosti existencie horizontálneho úseku ľadovca. Bez sebemenších výpočtov môžeme túto teóriu zavrhnúť. Stačí, že si uvedomíme, že je to len limitný prípad predchádzajúceho prípadu pre depresiu s nulovou hĺbkou. Čím je depresia plytšia, tým pomalšie v nej kvádrik zrýchľuje a spomaľuje, a teda mu prechod cez ňu trvá dlhšie, teda pre tento prípad by sme dostali v grafe ešte väčší skok.

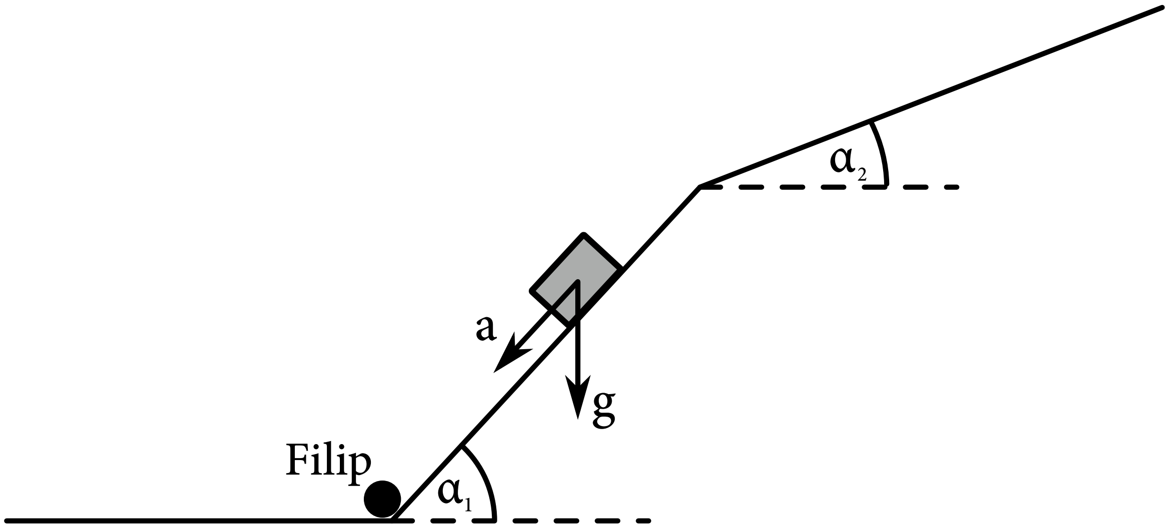
No a teraz už šup-šup na prípad zmeny sklonu ľadovca. Keď sa pozornejšie pozrieme na Filipov graf, všimneme si, že pre vysoké počiatočné rýchlosti sa asymptoticky blíži k priamke s väčším sklonom, než má priamka zodpovedajúca sklonu ľadovca v jeho dolnej časti. V súlade s tým, čo sme už skôr rozoberali, môžeme tvrdiť, že táto priamka zodpovedá ľadovcu s miernejším sklonom, než je sklon v dolnej časti. Ako rozumný tip sa teda javí, že v istom bode sa sklon ľadovca mení k miernejšiemu. To vysvetľuje asymptotické správanie grafu. Pre vysoké počiatočné rýchlosti totiž kvádrik strmšou spodnou časťou ľadovca len rýchlo preletí, takže tento úsek prispeje k celkovému času do návratu len málo, a teda sklon grafu je v takomto prípade určený predovšetkým hornou časťou ľadovca. Čím je počiatočná rýchlosť vyššia, tým je príspevok od spodnej časti zanedbateľnejší a o to viac sa graf približuje k priamke zodpovedajúcej hornej časti ľadovca.



Obrázok 2: *Povrch ľadovca aproximovaný kratučkými úsečkami. Sklonu každej úsečky zodpovedá jedna priamka vo $v_0 - T$ grafe. Postupnými prechodmi medzi priamkami zodpovedajúcimi susediacim úsečkám dostaneme hladký graf.*

Posledná vec, na ktorú treba nájsť odpoveď, je, ako sa mení sklon ľadovca. Ak by sa menil postupne, vedeli by sme ho po častiach aproximovať kratučkými úsečkami, ktorým by na $v_0 - T$ grafe zodpovedali priamky s blízkymi sklonmi. Prechodu medzi úsečkami by zodpovedal prechod medzi dvomi susednými priamkami. Čím by boli úsečky kratšie, tým by bol výsledný graf hladší. Postupnému prechodu medzi rôznymi sklonmi ľadovca teda zodpovedá hladký graf. Filipov graf však obsahuje hrot, takže sklon ľadovca sa musí meniť skokovo, resp. na ďaleko menšej škále, než sú rozmery rovinných častí ľadovca. Ľadovec môže teda vyzerať tak, ako je načrtnutý na obrázku.

[1] Teda aspoň Filipov kvádrik cez žiadnu neprechádzal.



Obrázok 3: *Profil ľadovca*

2.3 Ja s tebou zatočím!

vzorák **Arthur**, opravoval **Arthur**

Predstavme si naše kolieska ako dva identické valce s polomerom r a momentom zotrvačnosti $I = \frac{1}{2}mr^2$, z ktorých jeden je spočiatku nehybný, a druhý sa točí uhlovou rýchlosťou ω okolo vlastnej osi. Následne pritlačíme silou F druhý na prvý, čím medzi nimi vzniká trecia sila $F_t = fF$.

Moment sily je tvorený iba trecou silou, keďže sila F je rovnobežná s r. Teda $M = rfF$ a pôsobí proti smeru rotácie valca. Zároveň je druhý rovnakým momentom zrýchľovaný.

Pre rotačný pohyb valca okolo jeho osi platí

$$M = I\varepsilon.$$

Keďže moment sily M a moment zotrvačnosti I sú konštantné, tak uhlové zrýchlenie ε musí byť tiež. To znamená, že o koľko prvý valec zrýchli, druhý spomalí. Kolieska prestanú prešmykovať vtedy, keď sa ich uhlové rýchlosti vyrovnajú, a to nastane, keď sa ustália na uhlovej rýchlosti $\frac{\omega}{2}$.

Prenásobíme pohybovú rovnicu časom t, za ktorý prestane prešmykovať a upravíme

$$Mt = I\varepsilon t = I\frac{\omega}{2}.$$

Nakoniec vyjadríme t, a po dosadení získavame výsledný čas

$$t = \frac{I\omega}{2M} = \frac{mr\omega}{4fF}.$$

Teda za čas $t = \frac{mr\omega}{4fF}$ od pritlačenia sa kolieska ustália na rýchlosti $\frac{\omega}{2}$.

2.4 Fakt Kopec Srandy

vzorák **Jaro**, opravovala **Mary**

Čože to zadanie od nás chce? Vraj máme zmerať nejaký koeficient reštitúcie. V prvom rade poďakujeme Adamovi, ktorý nám ušetril asi 30 sekúnd googlenia tým, že nám prezradil, že nám vlastne ide o pomer rýchlostí po a pred zrážkou. No a keď sme vybavení touto zásadnou informáciou, môžeme začať dumať, ako tento koeficient reštitúcie zmerať. No na úvod si predsa len neodpustíme krátku úvahu[2] o zrážkach a o tom, čo a ako budeme merať.

Uvažujme dvojicu zrážajúcich sa telies. Vo všeobecnosti môžu pri zrážke nastať nasledujúce javy:

- rýchlosti telies sa nejako zmenia;
- telesá budú pri zrážke zdeformované, v kritickom prípade až zničené.

Pre potreby tejto úlohy budeme uvažovať, že pri zrážke nedôjde k zničeniu telies, čomu budeme rozumieť tak, že po zrážke bude možné telesá identifikovať a jednoznačne im priradiť rýchlosti.

A čo sa pri takej zrážke vlastne deje? Je zjavné, že zrážka nie je bodová udalosť v priestore ani v čase. Povedali sme totiž, že pri zrážke sa menia rýchlosti telies a ak by zrážka prebehla na nulovej dĺžke a v nekonečne krátkom čase, v danom momente by museli telesá vykazovať nekonečné zrýchlenia, a tým pádom na seba pôsobiť nekonečnými silami, čo je nefyzikálne.

Telesá sa teda pri zrážke musia deformovať, na čo sa nutne spotrebuje istá energia. V závislosti na tom, či sa táto energia po zrážke premení späť na mechanickú energiu, rozlišujeme zrážky pružné a nepružné. Aspoň tak nás to učili v škole. V skutočnosti nastane niečo medzi tým. Časť energie sa zvyčajne premení späť a časť sa spotrebuje na plastickú deformáciu telies a uvoľní sa v podobe tepla. To, do akej miery dôjde k spätnej premene energie deformácie na kinetickú energiu, popisuje práve koeficient reštitúcie.

Na základe tejto úvahy je zrejmé, že štandardné hodnoty koeficientu reštitúcie budú z intervalu $\langle 0; 1\rangle$, pričom nule zodpovedá dokonale nepružná zrážka a jednotke dokonale pružná zrážka. V zriedkavých prípadoch môže koeficient reštitúcie ležať aj mimo tohto intervalu. Napríklad pri priestrele jedného telesa druhým je koeficient reštitúcie záporný. Alebo ak pri zrážke telesá získajú nejakým spôsobom energiu,[3] môžu mať po zrážke vyššie rýchlosti než pred ňou a vtedy je koeficient reštitúcie väčší, než jedna. Pokiaľ nebudeme hopsalku strieľať z dela alebo ako terč používať papier, záporný koeficient reštitúcie nám nehrozí. Oveľa väčší pozor si budeme musieť dávať na to, aby sme hopsalke neudelili rotáciu alebo naopak, aby nám hopsalka po zrážke nezačala výrazne rotovať, čo by značne ovplyvnilo rýchlosť po odraze.

Na záver našich všeobecných úvah si koeficient reštitúcie zadefinujme matematicky. Povedali sme, že je to pomer rýchlostí po odraze a pred ním, teda

$$e = \frac{v_f}{v_i}.$$

Ale čo sú tie rýchlosti zač? Veď predsa do zrážky vstupujú dve telesá, tak rýchlosť ktorého z nich máme brať do úvahy? Asi by sme tipovali, že toho, o ktorého koeficient reštitúcie sa zaujímame. No dobre, ale rýchlosti predsa závisia na voľbe vzťažnej sústavy, tak teda v ktorej sústave sa máme na zrážku pozerať? Vtip je v tom, že to, ako zrážka vyzerá, je dôsledkom oboch telies, a teda na základe nejakej všeobecnej zrážky nemožno určiť koeficient reštitúcie telesa, pretože obe telesá si ukroja z energie spotrebovanej počas zrážky. Prísne vzaté, koeficient reštitúcie určený pri nejakej zrážke je charakteristikou tejto zrážky a nie zrazivších sa telies. No a charakteristickou rýchlosťou zrážky je vzájomná rýchlosť telies, teda na rýchlosti v definičnom vzťahu sa možno pozerať ako na rýchlosti jedného telesa vo vzťažnej sústave spojenej s druhým telesom alebo jednoduchšie ako súčet rýchlostí oboch telies v nejakej pevne zvolenej vzťažnej sústave.

[2] Rozhodne kratšiu, než akou bola úvaha o gravitačnom poli a metódach merania tiažového zrýchlenia. https://fks.sk/ulohy/riesenia/1401/

[3] Napríklad sa môže pri zrážke uvoľniť chemická energia, napríklad tak, že pri zrážke dôjde k explózii; alebo ak pred zrážkou niektoré z telies rotovalo, pri zrážke sa môže zvýšiť jeho translačná kinetická energia na úkor rotačnej (inými slovami, rotácia telesa sa spomalí a teleso sa odrazí s vyššou rýchlosťou).

Predchádzajúca úvaha má pre nás jeden dôležitý dôsledok. Ak chceme zmerať koeficient reštitúcie nejakého telesa, musíme nejakým spôsobom eliminovať vplyv druhého telesa na zrážku. To možno urobiť jedným z nasledujúcich spôsobov:

- budeme zrážať dve identické telesá, čím bude zrážka symetrická, a teda obe telesá prispejú rovnakou mierou k stratám energie;
- teleso budeme zrážať s dokonale tuhým terčíkom, čím eliminujeme vplyv terčíka na priebeh zrážky.

Prvá možnosť by bola ideálna, lenže zraziť centrálne dve hopsalky bez toho, aby po zrážke nezačali rotovať a odrazili sa presne v smere, v ktorom sa zrazili, je prakticky nerealizovateľné. Budeme sa teda musieť uchýliť k druhej možnosti, aj keď sme si vedomí, že dokonale tuhé teleso neexistuje. V snahe minimalizovať systematické chyby teda vyberieme to najtuhšie, čo môžeme. Takže nie, perzský koberec v obývačke u krstnej mamy nie je dobrá voľba.

No a teraz už môžeme konečne začať dumať nad tým, ako samotné meranie prevedieme. Na určenie rýchlosti štandardne potrebujeme merať dve veličiny – vzdialenosť a čas. Lenže zadanie nám zakazuje používať dĺžkové meradlo, čiže musíme nájsť spôsob, ako tento zákaz obísť. Jedným z riešení by mohlo byť napríklad meranie rýchlosti využívajúc Dopplerov jav (radar). Takéto meranie by však bolo dosť nepresné a náročné na vybavenie.

Rozpamätajme sa na už spomínaný vzorák k experimentálke o meraní tiažového zrýchlenia.[4] Predstavili sme v ňom koncept relatívnych meraní. Ten spočíval v tom, že jednu veličinu zafixujeme a sledujeme zmeny meranej veličiny pri menení druhej. V našom prípade vieme merať čas, no nevieme merať dĺžku. Ak však považujeme tiažové zrýchlenie za známe, vieme času jednoznačne dĺžku priradiť.

Myšlienka je asi nasledovná. Nech má teleso tesne pred dopadom rýchlosť v_i. Jeho kinetická energia je teda $E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv_i^2$. V momente spustenia z výšky h má nulovú rýchlosť, čiže jeho mechanická energia spočíva len v potenciálnej energii $E_{\mathrm{pot}} = mgh$. Z rovností týchto energií je možné určiť rýchlosť meraním výšky pri známom tiažovom zrýchlení. Toto sa robí štandardne. My však nemôžeme merať výšku, no môžeme použiť rovnaký trik, aby sme meranie výšky previedli na meranie času. Merajme čas od momentu spustenia po moment dopadu. Nech je tento čas t. Potom výšku, z ktorej sme teleso nechali padať, určíme jednoducho ako $h = \frac{1}{2}gt^2$. Rovnakým spôsobom by sme vedeli určiť aj výšku výstupu, no na to by sme museli vedieť presne zmerať čas výstupu od momentu odrazu po najvyšší bod trajektórie, a ten je dosť problematické určiť.

Dá sa to však ešte celé vylepšiť. Nemerajme čas od spustenia po dopad a od odrazu ma najvyšší bod, ale merajme čas medzi dvomi dopadmi. Vieme, že v priblížení voľného pádu výstup a následný pád trvajú rovnako dlho, takže nebude problém dopracovať sa k výške výstupu ani týmto spôsobom. V skutočnosti tú výšku ale ani nepotrebujeme. To, čo nás zaujíma, sú predsa rýchlosti a výška bol len taký medzikrok, ktorý sa štandardne používa. My však poznáme vzťah pre rýchlosť pre zvislý vrh nahor

$$v(t) = v_0 - gt.$$

V čase dopadu τ má teleso rovnakú veľkosť rýchlosti, ako v čase $t = 0$, len má opačné smer, teda

$$v(\tau) = -v_0 = v_0 - g\tau,$$

odkiaľ dostávame hľadaný vzťah medzi rýchlosťou a časom

$$v_0 = \frac{g\tau}{2}.$$

[4] https://fks.sk/ulohy/riesenia/1401/

Vidíme, že rýchlosť je úmerná času medzi dvomi po sebe nasledujúcimi dopadmi telesa.

Povedzme, že koeficient reštitúcie určujeme z i-teho a $(i+1)$-ho časového rozdielu medzi dopadmi. Potom

$$e_i = \frac{v_{i+1}}{v_i} = \frac{\frac{g}{2}\tau_{i+1}}{\frac{g}{2}\tau_i} = \frac{\tau_{i+1}}{\tau_i} < 1.$$

Všetko, čo musíme urobiť, je zaznamenať časy dopadov, určiť časové intervaly medzi následnými dopadmi, no a potom dať už iba susedné časové intervaly do pomeru. Pokiaľ koeficient reštitúcie nezávisí na rýchlosti, všetky pomery budú nadobúdať približne rovnaké hodnoty. Na záver vypočítané pomery spriemerujeme, čím získame hodnotu koeficientu reštitúcie.

Uvedený postup má jeden maličký nedostatok. Pri vyšších poradových číslach odrazov budú dĺžky časových intervalíkov malé, takže relatívna chyba merania bude dosahovať veľké hodnoty. Vieme sa tomu vyhnúť tak, že vyššie odrazy nebudeme brať do úvahy, alebo vieme náš postup ešte trochu vylepšiť. Všimnime si, že ak je koeficient reštitúcie naozaj konštantný, veľkosti intervalíkov tvoria geometrický rad, keďže $\tau_{i+1} = e\tau_i$. To znamená, že $\tau_{i+1} = \tau_1 e^i$. Ak zadefinujeme n-tý čiastočný súčet geometrického radu ako

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i = \sum_{i=1}^{n} \tau_1 e^{i-1} = \frac{1-e^n}{1-e}\tau_1,$$

ten potom predstavuje časový rozdiel medzi n-tým a nultým[5] dopadom. Tým sme se elegantne vyhli malým časovým intervalíkom. Navyše sme dostali vzťah medzi časom dopadu a jeho poradovým číslom, takže ak grafom preložíme krivku tohto tvaru, vieme jednoducho vizuálne posúdiť, či koeficient reštitúcie naozaj nezávisí na rýchlosti.

Dosť už bolo slov, poďme merať! Zoberieme si svoju obľúbenú hopsalku a nájdeme vhodný terčík. Rozumným terčíkom je napríklad keramická dlažba. Ešte nájdeme spôsob, ako rozumne merať čas. A nie, stopky nie sú rozumný spôsob, pretože chceme merať krátke časové intervaly a meranie stopkami by spôsobovalo obrovské chyby. Ani videozáznam nie je najoptimálnejšie riešenie, pokiaľ nemáme vysokorýchlostnú kameru, pretože snímková frekvencia bežných kamier sa pohybuje okolo 30 snímok za sekundu a navyše rýchlo sa pohybujúca hopsalka by na zázname bola rozmazaná. Do úvahy by pripadal napríklad fotosenzor umiestnený tesne nad podlahou, no pri ňom je ten problém, že by sme museli nejakým spôsobom zabezpečiť, aby hopsalka dopadala vždy pred ním, čo by mohlo byť dosť problematické. Ako najideálnejšie riešenie sa nám javí použiť zvukový záznam. Každý dopad hopsalky zanechá zvukovú stopu, takže nie je problém určiť okamih dopadu, no a nie sme ani odkázaní na presne vymedzené miesto dopadu, keďže vieme zachytiť zvuk dopadu, nech sa udeje kdekoľvek – jediným obmedzením je veľkosť terčíka.

Musím sa priznať, že toto bola asi najrýchlejšie nameraná experimentálka, s akou som sa stretol. Jednoducho som zobral telefón, spustil nahrávanie zvuku a položil ho na podlahu. Potom som už len niekoľkokrát spustil hopsalku na podlahu a nechal ju skackať. Celé meranie netrvalo viac než dve minúty aj so stiahnutím zvukového záznamu do počítača.

Dáta máme, môžeme ich spracovať. Ak som povedal, že dáta som mal namerané do dvoch minút, tak s ich spracovaním som zabil celý deň. Na analýzu zvukového záznamu použijeme program *Audacity*, ktorý je voľne dostupný. Postupne prechádzame zvukovou stopou a čas zvukového impulzu zapíšeme do excelovskej tabuľky. Čas vieme odčítať s presnosťou až na jednu tisícinu sekundy. Keď takto získame časy všetkých dopadov, môžeme pokračovať ich spracovaním. Postupne si ukážeme oba prístupy, ako sa vieme dopracovať ku koeficientu reštitúcie.

[5]Indexujeme od nuly.

Začnime metódou pomerov. Analýzu jedného pádu prevedieme podrobne, u ostatných potom uvedieme len výsledky. Dáta sú zapísané v tabuľke. Poďme si ich vysvetliť. V druhom stĺpci je čas dopadu t_i, ako bol určený zo záznamu. Absolútna chyba tohto času je určená presnosťou, akou vieme odčítať čas – v našom prípade 0,001 s. V treťom stĺpci je doba τ_i medzi dvomi nasledujúcimi dopadmi. Keďže bola určená ako rozdiel dvoch časov s chybou 0,001 s, jej absolútna chyba je 0,002 s. Vo štvrtom stĺpci je potom relatívna chyba tejto doby $\delta\tau_i$ vyjadrená v percentách. Vidíme, že relatívna chyba s poradovým číslom dopadu rastie. V ďalšom stĺpci je vypočítaný koeficient reštitúcie e_i z podielu dvoch nasledujúcich dôb medzi dopadmi. V posledných dvoch stĺpcoch sú relatívna a absolútna chyba koeficientu reštitúcie. Keďže koeficient reštitúcie je vypočítaný z podielu dvoch dôb, jeho relatívna chyba δe_i je súčtom relatívnych chýb príslušných dôb. Relatívna chyba dosahuje pri posledných odrazoch hodnotu až okolo 5 %, čo potvrdzuje naše tvrdenie, že toto je slabinou tejto metódy. Absolútnu chybu Δe_i udávame zaokrúhlenú na tri desatinné miesta, pretože s rovnakou presnosťou máme uvedený aj samotný koeficient reštitúcie. Pri ďalších výpočtoch však budeme používať presnejšie hodnoty.

Tabuľka 1: Ukážka spracovania dát

i	$t_i\,[\mathrm{s}]$	$\tau_i = t_i - t_{i-1}\,[\mathrm{s}]$	$\delta\tau_i\,[\%]$	$e_i = \frac{\tau_{i+1}}{\tau_i}$	$\delta e_i\,[\%]$	Δe_i
0	3,563					
1	4,288	0,725	0,276	0,861	0,596	0,005
2	4,912	0,624	0,321	0,872	0,688	0,006
3	5,456	0,544	0,368	0,866	0,792	0,007
4	5,927	0,471	0,425	0,879	0,908	0,008
5	6,341	0,414	0,483	0,899	1,021	0,009
6	6,713	0,372	0,538	0,909	1,129	0,010
7	7,051	0,338	0,592	0,923	1,233	0,011
8	7,363	0,312	0,641	0,923	1,335	0,012
9	7,651	0,288	0,694	0,931	1,441	0,013
10	7,919	0,268	0,746	0,925	1,553	0,014
11	8,167	0,248	0,806	0,927	1,676	0,016
12	8,397	0,230	0,870	0,948	1,787	0,017
13	8,615	0,218	0,917	0,936	1,898	0,018
14	8,819	0,204	0,980	0,926	2,039	0,019
15	9,008	0,189	1,058	0,899	2,235	0,020
16	9,178	0,170	1,176	0,918	2,459	0,023
17	9,334	0,156	1,282	0,910	2,691	0,024
18	9,476	0,142	1,408	0,915	2,947	0,027
19	9,606	0,130	1,538	0,908	3,233	0,029
20	9,724	0,118	1,695	0,898	3,582	0,032
21	9,830	0,106	1,887	0,906	3,970	0,036
22	9,926	0,096	2,083	0,948	4,281	0,041
23	10,017	0,091	2,198	0,923	4,579	0,042
24	10,101	0,084	2,381	0,917	4,978	0,046
25	10,178	0,077	2,597	0,948	5,337	0,051
26	10,251	0,073	2,740			

Na záver sa potrebujeme z týchto dát dopracovať k najpravdepodobnejšej hodnote koeficientu reštitúcie. Mohli by sme jednoducho spriemerovať všetky vypočítané koeficienty a boli by sme vybavení. Takýto prístup má však jeden nedostatok – koeficienty, ktoré majú veľkú chybu prispievajú do priemeru rovnako ako tie s malou chybou. Tomuto sa dá vyhnúť použitím váženého priemeru

$$\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i e_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i},$$

kde ako váhu použijeme prevrátenú hodnotu absolútnej chyby $w_i = \frac{1}{\Delta e_i}$, čím zabezpečíme, že čím je chyba väčšia, tým je príspevok danej hodnoty do celkového priemeru nižší. Suma v menovateli mi zabezpečuje len to, aby boli váhy normované na jednotku.[6] Keď vykonáme príslušný výpočet, dostaneme hodnotu $\bar{e} = 0{,}901$. Len pre porovnanie, nevážený priemer dáva $\bar{e} = 0{,}913$, čo je dôsledkom toho, že koeficienty reštitúcie vypočítané z neskorších odrazov sú väčšie.

Ešte nám zostáva odhadnúť chybu merania. Tá pozostáva z dvoch častí. Systematickú chybu sme už vyčísľovali pre každú hodnotu zvlášť. Ako výslednú chybu môžeme zobrať napríklad maximálnu z nich alebo viac optimisticky ich priemer. Nech sa už rozhodneme akokoľvek, vždy je treba presne uviesť, ako sme túto chybu určili. Maximálna chyba má hodnotu 0,051 a priemerná 0,021. Ešte treba určiť náhodnú chybu. Pre tento účel vypočítame výberovú smerodajnú odchýlku priemeru. Môžeme opäť zvoliť jej vážený variant

$$s_{\bar{e}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} w_i \left(e_i - \bar{e}\right)^2}.$$

V takom prípade sa dopracujeme k hodnote $s_{\bar{e}} = 0{,}005\,61$. Túto hodnotu treba ešte prenásobiť Studentovým koeficientom zodpovedajúcim nami zvolenej miere spoľahlivosti. Koeficient 1 pri výpočte z 25 hodnôt (24 stupňov voľnosti) zodpovedá hladine spoľahlivosti 67,28%, čo znamená, že s takouto pravdepodobnosťou leží skutočná hodnota v rozsahu $\bar{e} \pm s_{\bar{e}}$. Vidíme teda, že dominantnou je systematická chyba plynúca z nepresnosti merania času.

Rovnakým postupom spracujeme aj ostatné hody hopsalky. Získané koeficienty reštitúcie pre lepšiu prehľadnosť zobrazíme v tabuľke. Výslednú hodnotu môžeme opäť vypočítať váženým priemerom koeficientov nájdených z jednotlivých hodov. Ak sa medzi hodnotami nachádzajú aj výrazne nižšie, môžeme ich pokojne vyradiť,[7] pretože s najväčšou pravdepodobnosťou zodpovedajú prípadom, keď sa hopsalka odrazila výrazne do strany, prípadne sa rozrotovala, a teda časť energie sa využila inak než na vystúpanie hopsalky do maximálnej výšky.

Tabuľka 2: Namerané koeficienty reštitúcie metódou pomerov

	Hod 1	Hod 2	Hod 3	Hod 4	Hod 5	Hod 6	Hod 7	Výsledná hodnota
$\bar{e}$	0,901	0,875	0,869	0,878	0,858	0,876	0,891	0,878
$s_{\bar{e}}$	0,005 61	0,006 24	0,003 10	0,005 57	0,009 37	0,004 18	0,006 36	0,004 89

Metódou pomerov sme sa dopracovali k hodnote $\bar{e} = 0{,}878$ so smerodajnou odchýlkou $s_{\bar{e}} = 0{,}004\,89$, čo značí, že rozptyl nameraných koeficientov bol pomerne malý. Nezabúdajme však, že máme relatívne vysokú systematickú chybu na úrovni približne $\Delta e \sim 0{,}02$ pochádzajúcu z nepresnosti merania času. Pozrime sa, či iný prístup nevedie k menšej chybe.

[6] T. j. aby súčet všetkých váhových koeficientov bol rovný jednej. Všimnime si, že keď ako váhu použijeme $w_i = \frac{1}{N}$ pre všetky hodnoty, dostaneme známy vzťah pre aritmetický priemer $\bar{e} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} e_i$.

[7] Obzvlášť vtedy, keď smerodajná odchýlka je malá, pretože vtedy si môžeme byť takmer istí, že nejde o náhodnú, ale o systematickú chybu.

Už sme ukázali, že ak T_n je čas n-tého odrazu od nultého odrazu, potom musí spĺňať rovnicu

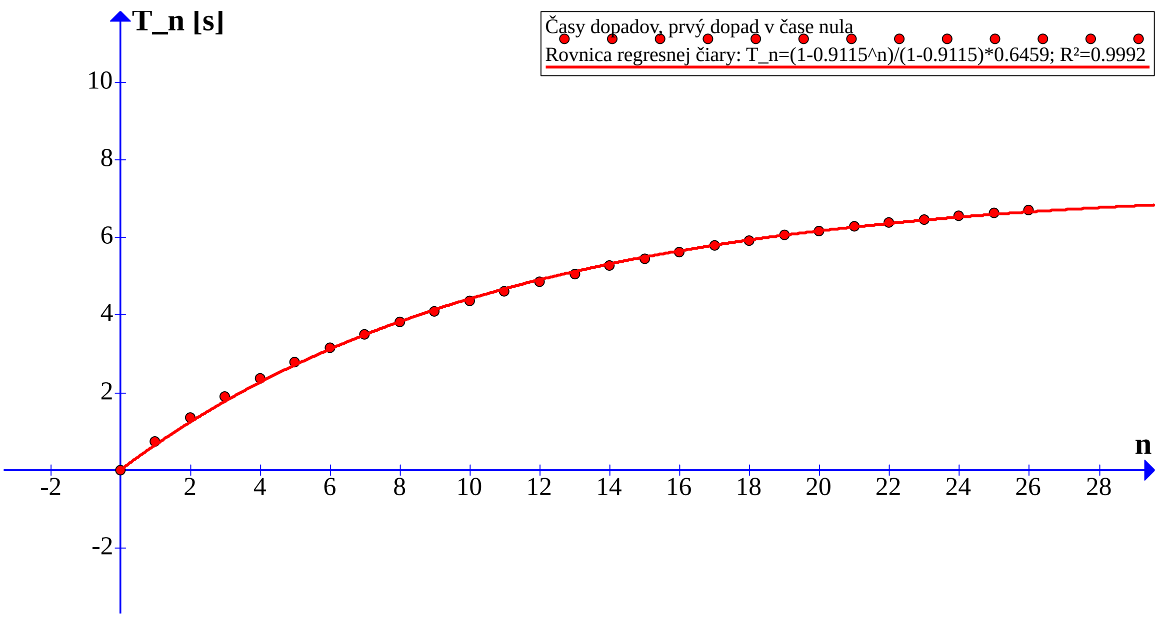
$$T_n = \frac{1 - e^n}{1 - e} T_1,$$

kde T_1 je čas prvého odrazu. Všetky časy T_n vieme určiť s absolútnou chybou $\Delta T_n = 0{,}002$ s, keďže ich počítame ako rozdiel dvoch časov. Rozdiel oproti predchádzajúcemu prípadu je ten, že $T_n > \tau_i$, takže sa dopúšťame menšej relatívnej chyby. Počítať koeficient reštitúcie priamo z tohto vzťahu je dosť problematické, no môžeme použiť metódu najmenších štvorcov s parametrami $\hat{e}$ a $\hat{T}_1$. Vzhľadom na to, že vykonávame regresiu cez veľa párov $[n; T_n]$, tak to celkovú chybu významne zníži. Chybu možno znížiť ešte tým, že budeme fitovať priamo časy dopadov funkciou

$$t_n = \hat{t}_0 + \frac{1 - \hat{e}^n}{1 - \hat{e}} \hat{T}_1$$

s parametrami $\hat{e}$, $\hat{t}_0$ a $\hat{T}_1$. V takom prípade časy t_n sú zaťažené systematickou chybou len $\Delta t_n = 0{,}001$ s. Daňou za to je však skutočnosť, že čas t_0 nezodpovedá skutočne zaznemenanému času nultého dopadu, ale je určený ako najlepší odhad času nultého dopadu určený z časov všetkých dopadov.[8]

Opäť si tento prístup ukážme podrobne na prvom hode hopsalky. Pre porovnanie ukážeme fitovanie oboma funkciami. Začnime prvou z nich. Vypočítame časy T_n ako rozdiely medzi n-tým a nultým odrazom a vynesieme ich do grafu ako funkciu n. Potom všetku prácu prenecháme na svoj obľúbený kalkulátor. Zadáme mu tvar funkcie, akou chceme body preložiť a on nám vráti najlepšie odhady parametrov $\hat{e}$ a $\hat{T}_1$. Dostaneme, že $\hat{e} = 0{,}9115$ a $\hat{T}_1 = 0{,}6459$ s s koeficientom determinácie $R^2 = 0{,}9992$.[9] Pre porovnanie metóda pomerov dávala v tomto prípade $\bar{e} = 0{,}901$ a $T_1 = \tau_1 = 0{,}725 \pm 0{,}002$ s. Vidíme teda, že daňou za lepší fit je skreslenie doby medzi prvými dvoma dopadmi.

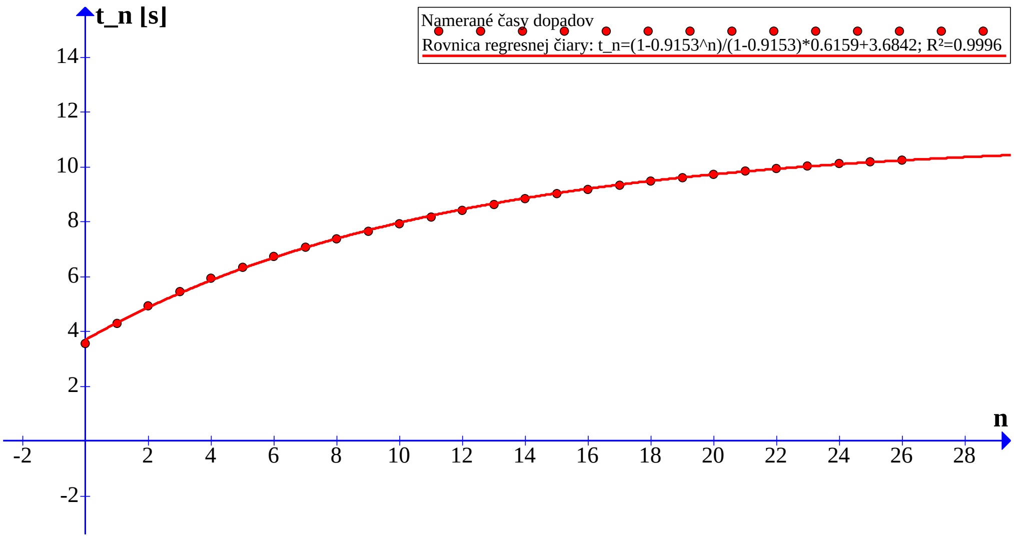


Obrázok 4: *Fit cez doby medzi n-tým a nultým dopadom*

[8] To je v skutočnosti dôvod, prečo je metóda najmenších štvorcov presnejšia.

[9] Koeficient determinácie úzko súvisí s odchýlkou fitu. Tú možno pomerne jednoducho dopočítať v prípade lineárnej regresie. My však používame nelineárnu regresiu, takže výpočet odchýlky by bol komplikovaný, preto ho nebudeme robiť a uspokojíme sa s koeficientom determinácie.

Teraz si ukážme fit priamo cez časy dopadov na tom istom súbore dát. Jediný rozdiel oproti predchádzajúcemu prípadu je ten, že do grafu vynášame priamo namerané časy dopadov a fitujeme s tromi parametrami. Dostávame hodnoty $\hat{e} = 0{,}9153$, $\hat{T}_1 = 0{,}6159$ s a $\hat{t}_0 = 3{,}6842$ s. Koeficient determinácie je v tomto prípade až $R^2 = 0{,}9996$, čiže daňou za zvýšenie kvality fitu je opäť znepresnenie časov T_1 a t_0. Toto je všeobecnou vlastnosťou metódy najmenších štvorcov – pridaním parametra sa zvýši presnosť fitu, no treba si dávať pozor, či vylepšený model má stále fyzikálny zmysel.



Obrázok 5: *Fit cez časy dopadov*

Spracujme aj ostatné hody hopsalky metódou najmenších štvorcov podľa druhého modelu s tromi parametrami. Nájdené odhady koeficientu reštitúcie zapíšeme do tabuľky. Najpravdepodobnejšiu hodnotu z nich potom určíme ako priemer. Opäť môžeme použiť vážený priemer, kde ako váhy použijeme koeficienty determinácie, aj keď v tomto prípade to nebude mať až taký veľký význam, nakoľko sú vo všetkých prípadoch podobné. Dostaneme $\overline{\hat{e}} = 0{,}8854$ so smerodajnou odchýlkou $s_{\overline{\hat{e}}} = 0{,}006\,584$. Dostali sme síce o niečo väčšiu smerodajnú odchýlku ako v prípade metódy pomerov, no systematická chyba je v tomto prípade podstatne nižšia, nakoľko koeficienty determinácie vychádzajú blízke jednej.

Tabuľka 3: Namerané koeficienty reštitúcie metódou najmenších štvorcov

	Hod 1	Hod 2	Hod 3	Hod 4	Hod 5	Hod 6	Hod 7	Výsledná hodnota
$\hat{e}$	0,9153	0,8817	0,8704	0,8831	0,8660	0,8795	0,9019	$\overline{\hat{e}} = 0{,}8854$
R^2	0,9996	0,9996	1,0000	0,9995	0,9998	0,9998	0,9994	$s_{\overline{\hat{e}}} = 0{,}006\,584$

Vyzerá to komplikovane? Možno, no netreba sa toho báť. A čo sa vlastne od vás očakávalo? V prvom rade bolo treba prísť na to, ako možno koeficient reštitúcie zmerať. Potom bolo treba vykonať merania. To bola tá jednoduchšia časť. Najdôležitejšie však je vedieť svoje dáta spracovať a prezentovať. Tu, ako máte možnosť vidieť, existuje niekoľko spôsobov a je len na vás, ktorý si vyberiete. Nutnou súčasťou riešenia je aj odhad chýb. A nemôžete zabudnúť okomentovať jednotlivé výsledky. V opačnom prípade je to len zhluk hodnôt, ktoré bez patričnej interpretácie nemajú význam. Tak napríklad nestačí povedať, že toto je chyba merania, keď neuvediete, ako ste ju dostali. Nikto nemôže vedieť, či je to priemerná chyba, maximálna chyba a či smerodajná odchýlka. Táto časť riešenia zaberie najviac času. Napríklad ja som mal dáta namerané zhruba za minútku, no s ich spracovaním som strávil celý deň.

2.5 (Ne)ideálne akvárium?

vzorák **Adam**, opravoval **Maťo**

Dobrá analógia sa na svoj vzor podobá nielen podobizňou, ale aj správaním. Správanie ideálneho plynu poznáme ako termodynamické deje, z ktorých vyčnievajú štyri pomerne jednoduché: izotermický, izochorický, izobarický a adiabatický. Ich analógiou by pre náš systém mali byť deje: izovýškový, izodĺžkový, izosilový a znova adiabatický. Ak sa ale zamyslíme nad konkrétnou realizáciou, rad radom narážame na problémy.

Napríklad držanie stáleho h a menenie len F a l je v rozpore s konštatnosťou objemu užitej kvapaliny. Rovnakého pôvodu sú aj problémy pri ďalších dvoch dejoch, jedine adiabatický dej sa ukazuje byť pre náš systém vcelku prirodzeným. Adiabatický dej vyžaduje, aby „plyn“ menil svoju vnútornú energiu len konaním práce. Podmienka konštantosti objemu kvapaliny v systéme nám ale neumožňuje meniť vnútornú energiu (pravá strana našej stavovej rovnice) nijak inak ako konaním práce.

Vyvstáva otázka, kde má naša stavová rovnica vadu. Sama o sebe predsa dovoľuje všetky možné deje, ich nemožnosť odhalí až pokus o (aspoň myšlienkovú) realizáciu. Je namieste spomenúť si (alebo spraviť) na odvodenie rovnice. Použili sme na to jednak vzťah pre hydrostatický tlak na pohyblivú stenu akvária

$$\frac{F}{hd} = \frac{\rho g h}{2},$$

a dvak vyjadrenie objemu akvária pomocou jeho rozmerov

$$V = lhd,$$

kde d je šírka akvária. S dvoma rovnicami sme začali a použili sme ich na zostavenie ďalšej. V našej perepúti však stále máme dve nezávislé rovnice, a to, či je jedna z nich výpočet tlaku alebo „stavová rovnica“, je prakticky len estetickou záležitosťou. Stále máme aj druhú rovnicu, ktorá nás zväzuje. Tomu zodpovedá aj skutočnosť, že problém so stavovou rovnicou neoblomne vznikol vždy kvôli konštantnosti objemu užitej kvapaliny. Náš systém teda nie je vhodnou analógiou ideálneho plynu, keďže stavová rovnica, ktorú sme preň vytvorili nie je jedinou rovnicou zväzujúcou nami vybrané stavové veličiny.

Bonus

Zamyslime sa, čo sa stane, ak ako tretiu stavovú veličinu tohoto systému nevezmeme výšku hladiny, ale jej súčin s objemom, t. j. stavová rovnica bude

$$Fl = \frac{\rho g}{2}(Vh).$$

Takto povolíme aj zmenu objemu kvapaliny, čím na úrovni myšlienkových experimentov vykonaných vyššie odstránime kameň úrazov pri prvých troch priateľských dejoch. Vysvetlenie na matematickej úrovni je o čosi abstraktnejšie. Stále existuje rovnica

$$V = lhd,$$

ktorá bola pred chvíľou Achillovou pätou nášho sytému. V aktuálnejšom hábe vyzerá takto:

$$(Vh) = lh^2 d.$$

Ak narábame s Vh ako jednou nerozložiteľnou premennou (čo zhodou okolností práve robíme), táto rovnica o nej nič nehovorí, t. j. nedokáže prepojiť Vh s l nijak rozumne. Stále síce platí, ale na fyzikálnu výpoveď potrebuje vždy aj premennú h, ktorú jej momentálne nemienime dopriať.

Poznámka k bonusu

Naše preonačenie síce zlikvidovalo potentnosť rovnice, ktorá nám bola už dlhšie tŕňom v oku, ale skúsenejší čitateľ sa mohol pokúsiť preskúmať aj štvrtý z jednoduchých dejov, t. j. adiabatický. Ak on aj autor vzoráku postupovali správne, vznikla nemilá vec, a totiž zliatie sa izosilového a adiabatického deja (popísateľné tým, že adiabatická konštanta $\kappa = 0$). To má pôvod v malej chybičke krásy našej novej stavovej rovnice. Tá má na pravej strane totiž presne vnútornú energiu a nie len jej nejednotkový, násobok ako to je v stavovej rovnici ideálneho plynu. Nová rovnica teda je výbornou analógiou, ale pre fyzikálne nezmyselný systém, ideálny plyn, ktorého molekuly majú práve dva stupne voľnosti (odporúčam vyskúšať, pochopiteľne len výpočtom).

2.6 Duško má nabité

vzorák **Simon**, opravoval **Simon**

Kapacita, to je taká vec, že keď mám dve miesta, ktoré nie sú vodivo spojené, na jedno dám náboj +Q, na druhé -Q, tak aké napätie sa medzi nimi vytvorí. Teda akú prácu budem musieť vykonať, aby som preniesol nejaký malý kúsok toho náboja z jedného z tých miest na druhé.

Náboj a napätie na kondenzátore sú zviazané vzťahom

$$Q = CU.$$

A prečo sa kondenzátory toľko omieľajú, keď je to len nejaká nezaujímavá súčiastka? Preto, lebo kapacitu môžete definovať pre ľubovoľné dve miesta, ako už bolo v úvode naznačené a je to fundamentálna vlastnosť tých dvoch miest. Kondenzátor je len vec, ktorá je špeciálne vyrobená so zámerom mať čo najväčšiu kapacitu.

Keď kondenzátory pripojíme do série (za sebou) na napätie U, toto napätie bude súčtom napätí na každom z kondenzátorov (čo vyplýva priamo z definície pojmu napätie). Na každom z nich sa tiež nahromadí nejaký náboj. Tieto náboje budú rovnaké. Na to môžete prísť tak, že si uvedomíte, že jedna elektróda jedného kondenzátora a druhá elektróda druhého (tie, ktoré sú spojené) tvoria celok, ktorý je od zvyšku izolovaný. No a koľko kladného náboja sa objavilo na jednej elektróde, toľko isto záporného sa musí objaviť na druhej, lebo dokopy je ten celok neutrálny.

Takže z toho nám vyplývajú rovnice

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = Q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = Q_1\frac{1+k}{kC_2},$$

a

$$Q_1 = Q_2 = \frac{C_2kU}{1+k}.$$

A teraz nastal menší problém. Zadanie sa totiž dalo interpretovať dvoma spôsobmi. Konkrétne nebolo jasné, či pri paralelnom zapojení zostanú kondenzátory pripojené na zdroj napätia, alebo už nie. Nie je to ale nič strašné, pretože to predstavuje iba malú zmenu v riešení. Preto sú tu uvedené obe možnosti.

V prípade, že kondenzátory odpojíme z batérie a spojíme paralelne (vedľa seba), docielime to, že napätia na nich budú rovnaké, lebo konzervatívnosť. Takže máme rovnice

$$q_1 = \frac{C_2kU}{1+k} + q,$$

$$q_2 = \frac{C_2kU}{1+k} - q,$$

$$\frac{q_1}{kC_2} = \frac{q_2}{C_2} \rightarrow q_1 = kq_2,$$

$$\rightarrow \frac{C_2kU}{1+k} + q = (\frac{C_2kU}{1+k} - q)k,$$

$$C_2 = \frac{q(1+k)^2}{kU(k-1)},$$

$$C_1 = \frac{q(1+k)^2}{U(k-1)}.$$

Ak by kondenzátory pri paralelnom zapojení zostali pripojené na zdroj napätia U, napätia na oboch kondenzátoroch by boli opäť rovnaké, ale teraz by sme poznali aj hodnotu toho napätia U. Teda by sme mohli napríklad vyjsť z rovníc

$$q_1 = \frac{C_2kU}{1+k} + q,$$

$$\frac{q_1}{kC_2} = U,$$

$$C_2 = \frac{q(1+k)}{k^2U},$$

$$C_1 = \frac{q(1+k)}{kU}.$$

2.7 Intergalaktický chill II.

vzorák **Adam**, opravoval **Adam**

Zrýchlenia, ktoré bodom pripisuje Vladko, sa od zrýchlení pripisovaných inerciálnym pozorovateľom líšia o zrýchlenie zodpovedajúce tzv. fiktívnym silám. Ich pôvod a tvar je o čosi rozsiahlejšou témou, než má ambíciu pokryť tento vzorák, ale našťastie sa dá ľaho nájsť vzťah pre výpočet týchto zrýchlení.

$$\vec{a}_f = \vec{a} - \frac{\vec{F}}{m} = -\vec{a}_V - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} - \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) - \vec{\varepsilon} \times \vec{r},$$

kde $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ je zrýchlenie pozorované inerciálnym pozorovateľom, $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ poloha, resp. rýchlosť, resp. zrýchlenie príslušného bodu z pohľadu Vladka; a $\vec{\Omega}$, $\vec{\varepsilon}$, $\vec{a}_V$ uhlová rýchlosť, zrýchlenie a obyčajné zrýchlenie Vladka z pohľadu inerciálneho pozorovateľa.

Takýchto rovníc má Vladko k dispozícii práve toľko, koľkých bodov sa spýta. Každá takáto vektorová rovnica ale obsahuje tri skalárne neznáme, podobne ako naše tri vektorové neznáme $\vec{\Omega}$, $\vec{\varepsilon}$, $\vec{a_V}$ sú deviatimi skalárnymi neznámymi.

Pozrime sa na jednu z rovníc, ktorú máme k dispozícii pre nejaký bod.

$$a_x - \frac{F_x}{m} = -a_{Vx} - 2\Omega_y v_z + 2\Omega_z v_y - \Omega_x\Omega_y r_y + \Omega_x\Omega_z r_z + \left(\Omega_y^2 + \Omega_z^2\right) r_x - 2\varepsilon_y r_z + 2\varepsilon_z r_y .$$

Vidíme, že táto rovnica nie je v zložkách Ω lineárna. Takisto nebudú lineárnymi ani ďalšie dostupné rovnice. Keďže žiadame jednoznačnosť hľadaných vektorov, nestačí nám spýtať sa len troch bodov (z ktorých by sme mali deväť rovníc pre deväť neznámych), keďže takto získané riešenie by vo všeobecnosti nebolo len jedno. Na potvrdenie jedného z riešení teda potrebujeme ešte informácie o ďalšom bode, čo znamená, že Vladko sa dokopy musí spýtať štyroch bodov.