Fyzikálny korešpondenčný seminár
29. ročník, 2013/2014
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 2. kola zimnej časti 2013/2014

2.1 B0 – Kolieska (opravovala teta Katka)

Luxusko sa rozhodol postaviť pre Katku drvič banánov. Vytlačil si na 3D tlačiarni tento mechanizmus a zaujíma ho, akou uhlovou rýchlosťou sa bude otáčať každé z koliesok, ak koliesko K roztáča uhlovou rýchlosťou ω v kladnom smere.

Kolieska majú dve veľkosti. Menšie majú 10 zubov a polomer r, väčšie majú 20 zubov a polomer $2r$. Sú tam aj 2 pásy (čierne), ktoré na zuboch neprešmykujú.

Na zvládnutie tohto príkladu sa musíme vysporiadať so situáciami medzi kolieskami drviča. Konkrétne s *i*) otáčaním dvoch susedacich koliesok (pomocou zubov); *ii*) otáčaním koliesok pomocou pásu; a *iii*) otáčaním dvoch koliesok, ktoré sú na jednej oske (to sú tie, ktoré majú spoločný stred na obrázku).

Začnime otáčaním dvoch susediacich koliesok: Predstavme si dve kolieska, pričom prvé má polomer r_1 a druhé r_2. Prvýmislieskom točíme uhlovou rýchlosťou ω_1. Druhé sa roztáča vďaka kontaktu zubov týchto koliesok, preto je zubová rýchlosť (známa pod pojmom *obvodová rýchlosť*) oboch koliesok rovnaká. Pre obvodovú rýchlosť v kolieska platí $v = \omega r$. Ak teda dáme do rovnosti obvodové rýchlosti koliesok, dostaneme

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

kde ω_2 je uhlová rýchlosť druhého kolieska. Preto ak poznáme polomery oboch koliesok a uhlovú rýchlosť prvého, vieme dopočítať uhlovú rýchlosť druhého. Čo sa týka smeru otáčania, tak po chvíľke predstavovania si situácie prídeme na to, že druhé koliesko sa otáča v opačnom smere ako prvé.

Pri otáčaní koliesok pomocou pásu je situácia veľmi podobná. Prvé koliesko roztáča pás, ktorý následne roztáča druhé koliesko. Preto je zubová rýchlosť prvého kolieska a pásu rovnaká. Taktiež je rovnaká aj zubová rýchlosť druhého kolieska a pásu. To ale znamená, že opäť sú zubové rýchlosti (obvodové rýchlosti) pre obe kolieska totožné. Čo vedie opäť k rovnici pre obvodové rýchlosti koliesok

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

V prípade, že pás nie je prekrížený, tak otáča obe kolieska v rovnakom smere. Ak je v strede prekrížený, tak sa mení smer otáčania pásu, a preto sa druhé koliesko otáča v opačnom smere ako prvé.

Zostáva sa zamyslieť nad otáčaním koliesok na jednej oske. Tieto kolieska sa otáčajú spoločne, preto sa za daný čas otočia o rovnaký uhol. Čo znamená, že majú rovnakú uhlovú rýchlosť a samozrejme aj smer otáčania.

Seminár podporujú:

Rozobrali sme si všetky interakcie medzi kolieskami, ktoré sa vyskytujú v drviči banánov. Skúsme sa na to teraz pozrieť konkrétnejšie. Ak pomocou zubov alebo pásu otáčame kolieska rovnakého polomeru, tak podľa odvodeného vzťahu platí rovnosť uhlových rýchlostí. V prípade, že otáčame koliesko s polomerom r a druhé koliesko má polomer $2r$, tak z našej rovnice vyplýva, že uhlová rýchlosť druhého je polovičná. Keby sme otáčali väčšie z nich, tak uhlová rýchlosť menšieho by bola dvojnásobná.[1] Teraz už môžeme priamo vypočítať uhlové rýchlosti jednotlivých koliesok v drviči. Začneme od kolieska K a budeme postupovať po kolieskach v smere otáčania hodinových ručičiek. Podľa zadania Luxusko otáča kolieskom K uhlovou rýchlosťou ω v kladnom smere. Druhé koliesko má polovičný polomer, a teda je otáčané rýchlosťou 2ω v zápornom smere. Tretie koliesko má opäť polovičný polomer oproti druhému, ktoré ho otáča, preto jeho uhlová rýchlosť je 4ω v kladnom smere. Podobne uhlová rýchlosť štvrtého je 8ω v zápornom smere. Piate koliesko má rovnaký polomer ako štvrté, ktoré ho roztáča, preto jeho rýchlosť je 8ω v kladnom smere. Rovnakými úvahami ukážeme, že uhlová rýchlosť šiesteho kolieska je 4ω v zápornom smere, siedmeho je 4ω v zápornom smere, ôsmeho je 8ω v kladnom smere a deviateho je 16ω v zápornom smere. Tu však nastáva problém, lebo koliesko K roztáča priamo deviate koliesko a to rýchlosťou 2ω v zápornom smere. Preto takto zostrojená sústava koliesok sa nebude točiť, ale bude sa zadrhávať.

2.2 B1 – „Kopec so stromčekmi bez oblohy, poprosím." (opravoval Helboj, vzorák Vlejd)

Squiddie si chcel nafotiť svoj obľúbený kopec. Tak vyliezol na náprotivný vrch a detailne si ho nacvakal. Potom dal programu Adobre FotoShrot všetky fotky a on to zložil. A tu sa Squiddie plesol po čele - zabudol nafotiť oblohu!

Nevadí. Aj tak by toto dielo rád zavesil na stenu a chce kladivom udrieť po hlavičke, teda pribiť obrázok vytlačený na pevný papier o stenu priamo v jeho ťažisku. No nie a nie nájsť ťažisko. Nájdete ho vy zaňho pomocou pravítka a bez použitia gravitácie, kým si on vylieči nervy NesKvíkom?

Máme zistiť ťažisko bez experimentu, len použitím pravítka. To vyzerá, že manuálnej práci sa nevyhneme :-(. Nanešťastie to je pravda, takže len s radosťou do toho!

Spomeňme si, čo vieme o ťažisku. Ak máme dva objekty s danou polohou, hmotnosťou a ťažiskami, tak vieme nájsť ich spoločné ťažisko, teda ťažisko objektu, ktorý sa z týchto dvoch skladá. To spravíme tak, že si ich ťažiská spojíme. Dostaneme úsečku, ktorú vieme rozdeliť bodom X v obrátenom pomere hmotností daných objektov. Práve bod X bude ťažiskom. Táto metóda je síce správna, ale je dosť pracná a nakoľko musíme rysovať, tak aj trochu nepresná. Jej výhoda je ale v tom, že ak by sme to dohnali do extrémov, tak nemusíme nič merať, lebo násobiť a rozdeľovať úsečky v nejakom pomere vieme aj geometricky.

Je ešte jedno dosť zaujímavé geometrické riešenie, ktoré je ale oveľa pracnejšie, ale je veľmi pekné, ak sa spraví poriadne. Jeho myšlienka je nasledovná. Máme nejaký obrázok. Keď ho rozdelíme na dve rôzne časti (ktoré sa nebudú prekrývať) ku ktorým budeme vedieť nájsť ťažisko, tak ťažisko výsledku bude na tejto čiare. Označme ju p. Ak si ale zvolíme iné rozdelenie a zistíme ťažiská nových častí, tak ťažisko celku musí byť aj na tejto čiare. Označme ju q. Ak sme mali aspoň trochu šťastie, a tieto čiary nebudú zhodné, tak ťažisko musí byť na ich priesečníku. Problém tu je, že je to neskutočne veľa práce, lebo ľahko vieme nájsť ťažisko len obdĺžnikov. Museli by sme to teda rôzne skladať a vždy si dávať na veľa vecí pozor. Má to ale svoje čaro.

[1] Môžeme si všimnúť, že tento výsledok je veľmi intuitívny.

Poďme teraz na numeriku. Ako celkom dobrý nápad sa zdá rozdeliť si obrázok na nejaké pekné časti, napríklad obdĺžniky. Prečo je to fajn? Obdĺžnik vieme ľahko zmerať. Dve strany a sme hotoví. Tiež vieme, kde presne má taký odbĺžnik ťažisko. No a to je všetko, čo potrebujeme. Tiež vieme, ako rátať ťažisko sústavy nejakých hmotných bodov, ak poznáme ich hmotnosť a ich súradnice. Nahradíme teda ťažiská jednotlivých obdĺžnikov hmotnými bodmi s príslušnými hmotnosťami a dosadíme do sumy:

$$\vec{T} = \frac{\displaystyle\sum_{\text{všetky body } B} (\overrightarrow{\text{poloha } B})(\text{hmotnosť } B)}{\text{celková hmotnosť}}$$

Chceme vážený priemer vektorových polôh ťažísk.

Rozdelíme si teda obrázok na obdĺžniky, pomeriame a dosadíme. Ešte taký detail. Hmotnosť môžeme svojvoľne zamieňať s plochami obdĺžnikov. V skutočnosti by sme to len museli všetko aj v čitateli aj menovateli vynásobiť hustotou, čo by sa aj tak vykrátilo (nakoľko je to homogénne). Podobne nemá zmysel trápiť sa nejakými jednotkami, lebo rozmery obrázka závisia od toho, ako ho vytlačíme alebo zobrazíme na počítači. Stačí nám zachovať pomery dĺžok.

výška	šírka	hmotnosť	poloha ťažiska
5	4	20	(2; 2.5)
6	4	24	(6; 3)
8	2	16	(9; 4)
12	1	12	(10.5; 6.5)
14	7	98	(14.5; 7.5)
12	7	84	(21.5; 6.5)
9	2	18	(26; 4.5)
4	2	8	(28; 2)

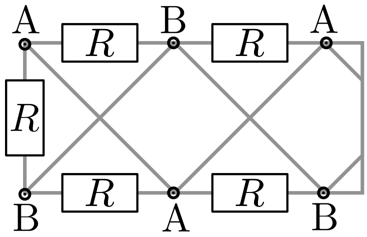
Keď to celé dáme do nášho vzorčeka, dostaneme výslednú polohu ťažiska (15.62; 5.52).

2.3 B2 – Hrejivý šálik (opravoval Jakub)

Vlejd si štrikuje šálik na zimu. Aby dobre hrial, tak bude z odporového drôtu a vodičov. Z časopisu O'Salsa zistil vzor pre najbližšiu módnu sezónu: uhlopriečky štvorcov. Ľaľa, aké sú sličné:

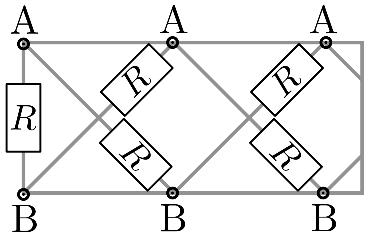
Vlejd ale nie je žiaden amatérsky štrikatér a chce ho upliesť nekonečne dlhý. Aký bude mať jeho šálik odpor medzi bodmi A a B? Vlejd použil na uhlopriečky (sivé) dokonale vodivý drôt a na okraj šálu (čierny) odporový drôt taký, že jedna strana pomyselného štvorca má odpor R a vodiče sú vodivo spojené len v hrubo vyznačených miestach.

Začnime tým, že si každý odporový drôt predstavím ako rezistor s odporom R. Všetky body na šáliku, ktoré sú vodivým drôtom spojené s bodom A, nazvem body A a všetky body vodivo spojené s bodom B nazvem B. Potom Vlejdov šálik bude vyzerať nasledovne:



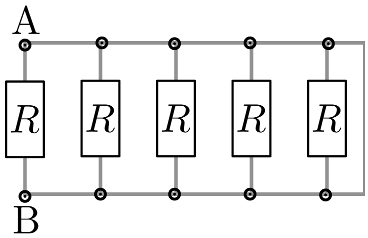
Obr. 1: Vlejdov šálik

A tu si môžeme všimnúť, že niektoré body sa nám dajú vymeniť. Poďme teda ten šálik postupne otáčať tak, aby sme hore dostali iba A body a dole iba B body. Keď si tento šálik pootáčame, bude vyzerať takto



Obr. 2: Šálik po rozmotaní

Čo s tým teraz? Vieme, že všetky body A a všetky body B sú pospájané vodivým drôtom, ktorý (keďže nemá odpor) môžem skrátiť na nulovú dĺžku a nič sa mi nezmení. Tým dostanem nekonečne veľa paralelne zapojených rezistorov s odporom R. A aký je potom výsledný odpor medzi bodmi A a B? To môžeme porátať dvomi spôsobmi:



Obr. 3: Nekonečne veľa paralelne zapojených rezistorov

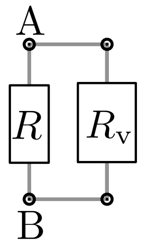
Môžeme to zrátať matematicky, čo znamená, že výsledný odpor si vyjadrím ako prevrátenú hodnotu súčtu prevrátených hodnôt všetkých odporov R

$$R_V = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{R}}$$

Čo môžme zapísať aj takto:

$$R_V = \lim_{n \to \infty} \frac{R}{n} = 0\,\Omega$$

Alebo to môžeme vypočítať oveľa krajšie (čítaj „fyzikálnym trikom“). A to tak, že si povieme, že keď už je tých rezistorov nekonečne veľa, tak ich výsledný odpor bude rovnaký aj keď k nim pridám ešte jeden. To bude vyzerať asi takto



Obr. 4: Po pridaní ďalšieho rezistora

A potom pre výsledný odpor bude platiť

$$R_V = \frac{RR_V}{R + R_V}$$

z čoho dostaneme (po triviálnej úprave) $R + R_V = R$ resp. $R_V = 0\,\Omega$. Vlejdov šálik bude mať teda nulový odpor, čo je preňho veľmi dobré, pretože potom po zapojení na napätie U bude produkovať Joulovo teplo $Q = \dfrac{U^2}{R}t$ a jeho šálik tak bude nekonečne teplý.

2.4 B3/A1 – Objavte teplú vodu! (opravoval Kubo)

Kubo by sa rád stal agentom s teplou vodou. A aby ste boli dobrým agentom, treba mať dobré známky zo skúšok. Najbližšie má skúšku zo slamkometrie: máte barel s teplou vodou a so studenou vodou. A slamku. Vodu nemôžete piť a ani vaše teplotné senzory v koži nemôžu ucítiť jej prenesené teplo, lebo firma, kde agenti pracujú, garantuje nedotknutosť a neprecítenosť jej teplej vody.

Kubo zistil, že má niečo s výfukom a na skúšku ísť nemôže a chce poslať vás. Nacvičte si túto skúšku v pohodlí svojho domova.

Zoberte si teda dve nádoby s vodou, jednu s horúcou, druhú so studenou vodou. Vymyslite, ako ich meraním rozoznať za pomoci slamky a odmerného valca. Vysvetlite, prečo táto metóda funguje. Meranie zrealizujte a zdokumentujte svoje výsledky. Jedine tak Kubo zistí, či sa na vás môže spoľahnúť!

Ešte predtým, než sa začneme hrajkať s vodou, bolo by dobré si riadne definovať a objasniť niektoré skutočnosti, ktoré vyplývajú zo zadania.

Keď sa sprchujeme vodou, ktorá má izbovú[2] teplotu T_i, tak by sme povedali, že nie je ani teplá, ani studená, pretože naše receptory vnímajúce teplo sú najviac navyknuté práve na takúto teplotu. Preto studenou vodou budeme nazývať vodu s teplotou $T_s < T_i$ a teplou takú, ktorá naopak bude mať teplotu $T_t > T_i$.

Povedzme si teraz niečo o obmedzeniach, ktoré nám zadanie kladie:

(i) K dispozícii máme len dve nádoby (s vodami teplôt T_s a T_t), slamku a odmerný valec. Je samozrejmosť, že nám zadanie dovoľuje používať také banálne pomôcky ako stôl, niť,

[2] Ak nebývate v chladničke alebo v saune, tak hodnota T_i by mala byť približne $\approx 20°$ C

lepiaca páska, nádoba s ryskami pre určovanie objemu, atď. Čo ale určite zakazuje, je používať zariadenia, ktoré nám odhalia hodnoty fyzikálnych veličín, ktoré by sme si inak mohli akurát tak vycucať z prsta (mám tým na mysli váhy, barometre, urýchľovače, atď.).

(ii) Firma, kde Kubo pracuje, garantuje nedotknutosť vody, takže vodu by sme určite nemali na seba liať (a ani na iné veci, ktoré jej ukradnú teplo).

Vybavení potrebnými informáciami môžme začať rozmýšlať, ako bezbolestne rozlíšiť teplú a studenú vodu iba s pomocou slamky a prázdnej nádoby navyše. Najskôr uvediem postupy, ktoré síce fungujú, ale nie sú ničím originálne: Napríklad pozorovať kondenzáciu na okraji nádoby, v ktorej sa nachádza teplá voda. Nuda. Alebo si uvedomiť, že teplá voda sa odparuje značne rýchlejšie, ako studená, preto by sme po dlhšom čase mohli pozorovať objemový rozdiel medzi jednotlivými nádobami. Nuda na druhú.

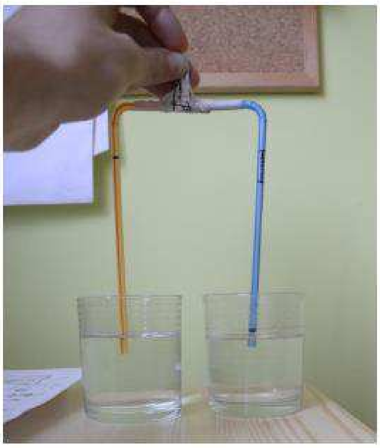
Poďme vymyslieť niečo zaujímavejšie. Vody v nádobách sa líšia okrem teploty aj v iných vlastnostiach, ktoré sú závislé práve na teplote. Najviac by som vypichol hustotu a povrchové napätie.

Experiment využívajúci zmenu hustoty

Vďaka teplotnej rozťažnosti sa nám hustota vody mení s teplotou podľa:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1+\beta\Delta T)} = \frac{\rho_0}{1+\beta\Delta T}$$

Tohto faktu pekne využil Matej Badin, ktorý si zostavil takúto T-slamku:



Obr. 5: T-slamka

Keď vytvoríme podtlak potiahnutím vzduchu (napr. ústami) na hornom konci, pričom dolné konce slamiek budú ponorené v nádobách s vodami, výšky vodných stĺpcov, ktoré sa vytvoria v jednotlivých ramenách T-slamky budú rôzne. A to všetko vďaka rovnakému hydrostatickému tlaku, ktorý vytvárajú teplá a studená voda na oboch stranách:

$$h_1\rho_1 g = h_2\rho_2 g$$

Voda, ktorá vytvorila vyšší stĺpec musí byť prirodzene teplá, pretože má nižšiu hustotu.

Experiment využívajúci zmenu povrchového napätia

O zmene povrchového napätia v závislosti od teploty hovorí Eötvösova rovnica, ktorá tvrdí, že so vzrastajúcou teplotou povrchové napätie klesá. To sa dá prakticky využiť napríklad tak, že kvapneme na stôl pomocou slamky jednu kvapku teplej a jednu studenej vody. Vzniknuté kvapky budú mať rozdielny povrch, pričom teplá voda by mala mať väčší, než studená.

Experiment využívajúci zmenu parametrov vzduchu

Najoriginálnejšie a asi aj časovo najnenáročnejšie riešenie je ponorenie slamky do nádoby s vodou s upchatým vrchným koncom. Totiž, medzi vzduchom uzavretým v slamke (zhora prstom, zdola vodou) a samotnou vodou prebieha tepelná výmena (aj cez povrch slamky). Tá sa v prípade prítomnosti teplej vody (čiže $T_{voda} > T_{vzduch}$) prejaví ohriatím vzduchu v slamke, čo zvýši kinetickú energiu molekúl vzduchu a tým pádom aj tlak týchto častíc naražájúcich na povrch vody dole. Toto prakticky znamená **bublinky**! Tento jav krásne zachytila Barbora Kováčová na videu ktoré sa dá nájsť na `http://youtu.be/QsUxoBOfvYO`.

Pri studenej vode tento jav, prirodzene, nenastane. Práve naopak, teplo vzduchu uzavretého v slamke si ukradne okolitá voda!

V tomto experimente nebolo treba robiť žiadne číselné merania, po ktorých by sme boli povinní porátať aj priemerné hodnoty, chyby merania a iné štatistické hávede. Stačilo iba voľným okom rozlíšiť značné zmeny, ktoré nastali počas vykonávania jedného z experimentov.

Poznámky k došlým riešeniam

V texte vyššie som spomínal, že netreba počítať priemery a chyby merania, ak sme nemerali číselné hodnoty. To znamená, že ak ste vo svojom riešení nejaké namerané hodnoty reálne použili, vyžadoval som k nim aj všetko ostatné, čo k tomu náležite patrí. Preto som strhával body, ak som videl použité namerané hodnoty, ale žiadne dodatočné úpravy.

Presne 1 bod som strhával za chýbajúcu fotodokumentáciu u riešiteľov posielajúcich elektronicky. K experimentu také veci proste treba.

Ďalšie body som strhával za to, ak ste si neuvedomili, že vo svojom postupe nemôžte používať neštandardné pomôcky alebo ste nedostatočne fyzikálne popísali priebeh a dôsledky samotného experimentu.

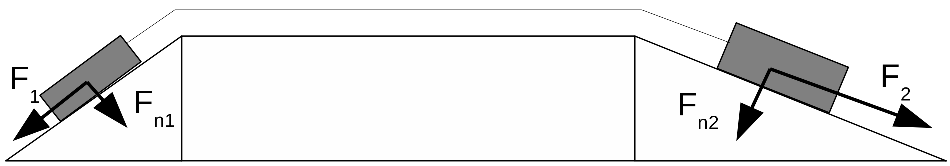
To by malo byť na dnešok všetko. Lovu zdar! :-)

2.5 B4/A2 – Fakt kúl sústavy (opravoval Jimi)

Jimi si otvoril obchod so sústavami. Nervová, tráviaca, rozmnožovacia, pohybová, periodická, dvojková, slnečná, distribučná, repro, menová, pozičná... Práve teraz by potreboval spustiť reklamnú kampaň na nové mechanické sústavy s trecími koeficientami a sklonmi a závažiami. A kedže všetkých dnes zaujíma len akcelerácia, s akým zrýchlením zrýchľuje m_1 v tejto sústave?

Akceleráciu, alebo aj zrýchlenie sústavy, je možné vypočítať ako podiel celkovej sily pôsobiacej na sústavu a hmotnosti sústavy (celková sila je súčet všetkých síl). Hmotnosť sústavy poznám, je $m_1 + m_2$, takže potrebujem nájsť už len silu.

Na obe závažia mi pôsobí gravitačná sila, na každé ako F_{g_1} a F_{g_2}. Túto silu môžem krásne rozložiť na dve zložky: rovnobežnú s príslušnou naklonenou rovinou (F_1 a F_2) a kolmú na túto rovinu (F_{n_1} a F_{n_2}).



Obr. 6: Sústava

Tieto sily si viem vyjadriť ako

$$F_1 = m_1 g \sin\alpha_1 \qquad F_{n_1} = m_1 g \cos\alpha_1$$
$$F_2 = m_2 g \sin\alpha_2 \qquad F_{n_2} = m_2 g \cos\alpha_2$$

Môžeme si všimnúť, že normálové sily F_{n_1} a F_{n_2} nemajú žiaden vplyv na akceleráciu sústavy keďže sú kompenzované reakčnou silou podložky, ale vďaka nim vznikajú trecie sily a s veľkosťami $F_{t_1} = f_1 m_1 g \cos\alpha_1$ a $F_{t_2} = f_2 m_2 g \cos\alpha_2$.

Ok, to by boli všetky relevantné sily. Teraz už len zistiť akým smerom pôsobia. Predpokladajme, že závažie bude akcelerovať smerom doľava. Tým pádom ho urýchľuje sila F_1 a spomaľuje sila F_2. Trecie sily vždy pôsobia v smere proti pohybu, preto budú tiež spomaľovať závažie.

Výsledná sila na sústavu teda bude:

$$F = F_1 - F_2 - F_{t1} - F_{t2} = m_1 g \sin\alpha_1 - m_2 g \sin\alpha_2 - f_1 m_1 g \cos\alpha_1 - f_2 m_2 g \cos\alpha_2$$

Túto silu potrebujeme vydeliť hmotnosťou sústavy a dostanem zrýchlenie

$$a = g\frac{m_1 \sin\alpha_1 - m_2 \sin\alpha_2 - f_1 m_1 \cos\alpha_1 - f_2 m_2 \cos\alpha_2}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

A ak bude akcelerovať doprava? Vtedy bude sila F_1 spomaľovať, F_2 zrýchľovať a trecie sily znova spomaľovať (lebo pôsobia proti smeru pohybu). Preto výsledná sila bude

$$F = m_2 g \sin\alpha_2 - m_1 g \sin\alpha_1 - f_1 m_1 g \cos\alpha_1 - f_2 m_2 g \cos\alpha_2$$

a zrýchlenie

$$a = g\frac{m_2 \sin\alpha_2 - m_1 \sin\alpha_1 - f_1 m_1 \cos\alpha_1 - f_2 m_2 \cos\alpha_2}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

Na tomto mieste treba upozorniť že vzorec 1 nie je identický s 2. Ak do nich dosadíme tie isté hodnoty, dostanem rôzne výsledky (nielen v znamienku). To nastáva preto, že sa otáča smer trecích síl v závislosti od finálneho zrýchlenia.

Naša sústava môže zrýchľovať doprava a doľava. Pozornému čitateľovi by však nemalo ujsť že môže robiť aj niečo iné – stáť. Vtedy platí jednoduché $a = 0$.

2.6 A3 – Luxusný sendvič (opravoval Paťo)

Pekelný robot Hellboy si zoberie akýkoľvek leták, aký mu pred intrákmi strčia do rúk. A teraz dostal leták pre zmenu od Krute Fritovaných Súčiastok na luxusný sendvič plnený a) kovom, b) dielektrikom s relatívnou permitivitou ϵ_r. Náplň je hrubá $d/4$, rovnobežná s platňami a je vzdialená $d/4$, resp. $d/2$ od platní. Poraďte mu výpočtom kapacít oboch luxusných sendvičov, ktorý je luxusnejší, teda ktorý má väčšiu kapacitu, ak kapacita neluxusného prázdneho kondenzátora je C.

V minulej sérii sme si vysvetlili, že každú vodivú dosku si vieme rozdeliť na 2 tenké doštičky spojené vodičom – to preto, lebo povrch nejakého vodivého materiálu má všade rovnaký potenciál. Ak to urobíme pre luxusný sendvič plnený kovom, dostaneme vlastne dva sériovo radené doskové kondenzátory, ktorých dosky sú od seba vzdialené $d/2$ a $d/4$.

Pre kapacitu neluxusného kondenzátora poznáme vzťah

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d},$$

kde ε_0 je permitivita vákua, keďže neluxusný sendvič je plnený ničím. Z úmernosti na $1/d$ vidíme, že kondenzátory luxusného sendviča majú kapacity $C_1 = 2C$ a $C_2 = 4C$. Výslednú kapacitu zistíme sčítaním sériových kapacít

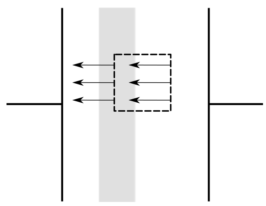
$$C_{\mathrm{kov}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4}{3} C,$$

Ako to bude so sendvičom s dielektrikom? Dielektrikum je taký viťúz, že vplyvom elektrického poľa sa polarizuje, čím vytvára vlastné elektrické pole v opačnom smere. Celkom neluxusné.

Pomôžeme si ale veľmi elegantne – mocným nástrojom, ktorý sa volá Gaussov zákon. V jeho najvšeobecnejšej podobe (tj. pre dielektrické prostredia) vyzerá takto:

$$\int D \cdot \mathrm{d}S = Q_{\mathrm{v}},$$

Teda hovorí nám, že po integrál elektrickej indukcie (čo je súčin permitivity a elektrickej intenzity) cez nejakú plochu (v našom prípade to bude kocka so stranami a) je rovný *voľnému* náboju, ktorý plocha uzatvára.



Obr. 7: Gaussov zákon na rozhraní

Ak sa pozrieme na rozhranie vákuum – dielektrická náplň, bude cez plochu a^2 vtekať vektor $D_1 = \varepsilon_0 E$ a vytekať vektor $D_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 E$. Výsledný integrál bude kvôli symetrii problému jednoduché násobenie:

$$\int D \cdot \mathrm{d}S = (D_1 - D_2)a^2,$$

Aký je ale voľný náboj vo vnútri pomyselnej kocky? Predsa žiadny! Vnútri sa nachádza iba náboj, ktorý sa vytvoril spolarizovaním dielektrika na jeho povrchu. Takýto náboj sa nazýva *viazaný* a do Gaussovho zákona neprispieva. Platí teda veľká pravda: na rozhraní dvoch *nevodivých* prostredí sa vektor elektrickej indukcie zachováva.

Pre nás to znamená $D_1 = D_2$, alebo inak napísané, elektrická intenzita v dielektriku je ε_r-krát menšia ako vo vákuu, z čoho máme veľkú radosť. Dôvod uvidíte neskôr.

Teraz si popíšme výrobu luxusného sendviča v KFS. Najskôr zoberieme sendvič neluxusný a zapojíme ho na napätie U. Intenzita poľa v ňom je konštantná a rovná $E = U/d$. Zdroj napätia následne odpojíme, čím zaručíme, že náboj na platniach (a z Gaussovho zákona) elektrická intenzita vo vákuu zostane rovnaká. Potom vložíme dovnútra dielektrikum, čím sa nám zmení napätie na hodnotu

$$U^* = E\frac{d}{4} + \frac{E}{\varepsilon_r}\frac{d}{4} + E\frac{d}{2} = \frac{3\varepsilon_r + 1}{4\varepsilon_r}Ed = \frac{3\varepsilon_r + 1}{4\varepsilon_r}U$$

Kapacita kondenzátou je z definície rovná pomeru Q/U. Keďže náboj sa nám pri prechode od neluxusného k luxusnému sendviču nemenil, kapacita sa musela zmeniť o prevrátenú hodnotu čudného zlomku pred napätím v poslednom vzorci, teda

$$C_{\text{diel}} = \frac{4\varepsilon_r}{3\varepsilon_r + 1}\,C,$$

Iba podoktnime, že k rovnakému výsledku by sme sa dopočítali, ak by sme luxusný sendvič rozdelili na 3 menšie: 2 by boli plnené vákuom a tretí dielektrikom.

Nakoniec musíme už iba vybrať sendvič s väčšou kapacitou. Pre všetky známe materiály platí $\varepsilon_r > 1$. Luxusnejší sendvič z Krute Fritovaných Súčiastok je teda ten s kovovou náplňou. Dielektrikum by muselo byť nekonečne polarizovateľné ($\varepsilon_r = \infty$), aby mal sendvič s ním rovnakú kapacitu. Holt, ale takému dielektriku hovoríme kov.[3] :-)

2.7 A4 – Hrátky s toroidmi (opravoval Mišo)

Kamilu už omrzelo počúvať o vesmíre stále tie isté fakty. Chcela vedieť viac. Chcela VIDIEŤ viac! Tak si teda socla Sysľovu raketu (od Maťa, ktorý ju používal naposledy) a vybrala sa objavovať vesmír na vlastnú pästť!

Len čo preprogramovala raketu na nepravdepodobnostný pohon, svetelné roky sa začali mihať ako protóny v CERNe. V takej rýchlosti sa ale blbo pozoruje okolie. Nuž pribrzdila a s úžasom zistila, že je obklopená obrovskými kozmickými toroidmi! Dieťa v jej srdci zajasalo a už mierila po osi jedného z nich rovno cez jeho stred. Potom si spomenula, že je tam za vedeckými účelmi, a tak zapla lodný počítač. Ten jej povedal, že je vo vzdialenosti d od stredu homogénneho toroidu s hustotou ρ_m, s polomerom diery r a celkovým polomerom $3r$. Zistil aj intenzitu gravitačného poľa v onom mieste, a to E.

[3] Myslíme tým to, že vo svojom vnútri dokáže dielektrikum polarizáciou vynulovať ľubovoľne veľké elektrické pole. Nulovosť poľa je ale vlasnosť kovov. V skutočnosti je permitivita kovov nejaké divoké komplexné číslo…

Keď sa vynorila, jej zmysly náhle upútal ďalší toroid. Vyzeral akosi étericky. Nuž nazbierala odvahu a poď ho priamo cezeň. Vtom však lodný počítač začal v panike vypisovať, že tento toroid je 2-krát väčší a rovnomerne objemovo vyplnený elektrickým nábojom! Polomer diery $2r$, celkový polomer $6r$, vzdialenosť od stredu $2d$, objemová hustota náboja ρ_e, intenzita elektrického po... Zhasol... Kamila skúseným informatickým okom usúdila, že elektrické pole lodnému počítaču neprospieva. Rada by teraz vedela, aké to elektrické pole vlastne bolo, nech si v manuáli môže prečítať, či je poškodenie lode trvalé. Keďže sa však zapredala informatike, musíte jej s fyzikou pomôcť vy.

Začneme tým, že si povieme, čo platí pre intenzity gravitačného G a elektrického poľa E od hmotného bodu a bodového náboja vo vzdialenosti x:

$$G = \kappa \frac{M}{x^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{x^2}$$

kde M je hmotnosť bodového náboja a Q je veľkosť bodového náboja.

Pozor, značíme inak ako zadanie, lebo sme samopašní a indexov bude vo vzoráku habadej.

Pokračujme teraz nasledovnou úvahou: Predstavme si kvádrik s objemom $\Delta V = \Delta a \Delta b \Delta c$, kde tri členy na pravej strane predstavujú jej rozmery. Ttento kvádrik si predstavíme tak malý, že ho môžeme považovať za bodový náboj. A ako posledný krok myšlienkového pochodu si predstavíme toroid, ktorý je celý vyskladaný z takýchto malilinkých kvádrikov. No a keďže každý kvádrik má nejaký príspevok k celkovému poľu, celkové pole vieme vyjadriť ako súčet týchto príspevkov. Teda úlohou je zapísať, aká bude intenzita gravitačného poľa v bode, kde sa nachádza Kamila, od každého kvádriku, ktorý sa v toroide nachádza:

$$G = \sum_i \frac{\kappa \rho_m \Delta V}{x_i^2} = \kappa \rho_m \sum_i \frac{\Delta a_i \Delta b_i \Delta c_i}{x_i^2}$$

kde x_i je vzdialenosť i-teho kvádriku Kamily a hmotnosť každého kvádriku sme prepísali ako súčin hustoty a jeho objemu vyjadrený pomocou rozmerov kvádriku.

Analogicky si vieme zapísať intenzitu elektrického poľa.

Elektrický toroid si teraz opäť rozsekáme na zanedbateľné kvádriky, ale nie také hocijaké. Bude to rovnaké rozsekanie na rovnaký počet kvádrikov ako pre gravitačný toroid. To znamená, že to bude vyzerať rovnako, ako keby sme každému kvádriku z rozsekaného gravitačného toroidu dvakrát zväčšili každú hranu, a tak dosiahli dva razy väčší toroid. Stále budú naše kvádriky zanedbateľne malé, a teda pre ne znovu platí, že celková intenzita je rovná tejto sume.

$$E = \frac{\rho_e}{4\pi\epsilon} \sum_i \frac{\Delta a' \Delta b' \Delta c'}{x_i'^2}$$

Tak. Máme to.

Po tomto rozsekaní dostávame kvádriky, ktorých hrany sú dva razy väčšie ako v prípade gravitačného toroidu. Teda $\Delta a_i' = 2\Delta a_i, \Delta b_i' = 2\Delta b_i, \Delta c_i' = 2\Delta c_i$. A každý kvádrik je dvakrát vzdialenejší od Kamily ako jeho kamarát s polovičnými hranami z gravitačného toroidu, teda $x_i' = 2x_i$.

Dosaďme tieto výsledky do E:

$$E = \frac{\rho_e}{4\pi\epsilon}\sum_i \frac{\Delta a'\Delta b'\Delta c'}{x_i'^2} = \frac{\rho_e}{4\pi\epsilon}\sum_i \frac{2\Delta a_i 2\Delta b_i 2\Delta c_i}{(2x_i)^2} = \frac{\rho_e}{4\pi\epsilon}2\sum_i \frac{\Delta a_i\Delta b_i\Delta c_i}{x_i^2}$$

Teraz si stačí uvedomiť, že túto sumu máme v obdivoch výrazoch a jej hodnota je rovnaká. (Presne kvôli tomu, že všetky tie dĺžky z elektrického toroidu sú dva razy väčšie ako z gravitačného, čiže keď vytiahneme multiplikatívny faktor 2 z každého výrazu, ostane presne pôvodná suma. Neplatí to vo všeobecnosti tak jednoducho - keby sme použili rôzne sekania, vôbec by to nebolo také očividné.)

Teda stačí navzájom predeliť obe rovnice a dostaneme výsledok.

$$E = 2G\frac{1}{4\pi\epsilon\kappa}\frac{\rho_e}{\rho_m}$$

Tak, a máme to. Juch!