FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
B – kategória (mladší)
23. ročník
zimný semester
školský rok 2007/2008

www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

B-3.1 Kamarát Jano (opravoval kamarát Jano)
má smolu. Vo svojom aute značky SafeRide havaroval, konkrétne rýchlosťou 40 km/h nabúral čelne do (veľmi pevnej) steny. Utešuje ho jedine škodoradosť, pretože kamarát Jožo nabúral síce iba rýchlosťou 30 km/h ale zato čelne do protiidúceho auta, ktoré išlo oproti nemu rovnakou rýchlosťou. Ktorý z kamarátov je na tom horšie, ak všetky autá, ktoré v príbehu vystupujú, sú rovnaké?

Pozrime sa na situáciu Janka. Kým ešte spokojne išiel, mal kinetickú energiu číselne (vo vhodných jednotkách) rovnú $1/2mv_1^2 = 1/2m.40^2 = \mathbf{800}\boldsymbol{m}$ (m je hmotnosť auta, ktorá v zadaní síce nebola zadaná, ale vieme, že je rovnaká pre všetky autá) a stena stála. Celková energia sústavy stena+auto teda bola rovná kinetickej energii Janovho auta. Keď sa zrazí so stenou, zastane a jeho rýchlosť bude nulová (veľmi pevná stena bude stáť aj naďalej nepohnute, akoby sa nič nestalo). Celková energia sústavy sa zachováva. Pohltilo ju Janovo auto (a Jano) na deformáciu. (Veľmi pevná stena je taká pevná, že sa nedeformuje.)

A čo Jožko? Tu sa rozbehli dva rovnaké autá proti sebe. Sústava týchto áut bude mať teda celkovú energiu rovnú dvojnásobku kinetickej energie Jožkovho auta $2\,(1/2\ mv_2^2)$. Pri zrážke tieto tiež zastanú. Obdobne sa celková energia zachová a použije na deformáciu. Významný rozdiel tu však je, že v tomto prípade sa deformujú autá dve. (Autá sú uvažované rovnaké a teda sa aj rovnako deformujú.) Jožkovo auto teda pohltí deformáciou polovicu tejto energie, $2\,(1/2\ mv_2^2)\,/2 = 1/2\ mv_2^2$ Ak sa pozrieme pozornejšie, všimneme si že je to číselne rovné kinetickej energii Jožkovho auta pred zrážkou, číselne $0{,}5.m.30^2 = \mathbf{450}\boldsymbol{m}$. To je približne polovica energie, ktorá zdeformovala Janovo fáro.

Jano teda dopadol horšie ako Jožo. A naozaj. Mohli sme si to všimnúť skôr a uvažovať takto: Situácia 2 (Jožkova zrážka) je v každom čase osovo symetrická voči vertikálnej osi prechádzajúcej miestom kontaktu. Ak by sme položili medzi tieto dve autá pevnú stenu (hoci na kolieskach a hoci veľmi ľahkú), akoby sa nič nezmenilo – každé auto do nej (naraz) vrazí zo svojej strany a stena sa ani nepohne. Teda by sa nič nezmenilo, keby táto stena bola prikovaná k zemi ... a moment, také niečo sme tu už videli, zrazenie auta so stenou zapustenou do zeme predsa už prežil Jano. Teda úlohu vieme takouto úvahou teda previesť na prvý (Janov) prípad. Jediným rozdielom medzi Janom a Jožom bude rýchlosť (a teda aj kinetická energia).

Jano išiel rýchlejšie a jeho auto sa napokon viac zdeformovalo ... **mal** (väčšiu) **smolu** ... niekedy zadanie napovie viac ako sa môže zdať :-)

Poučenie1: ideálne pevné steny síce neexistujú, a aj keď v počítačových hrách zväčša nie je problém kosiť pouličné lampy, akoby sa nič nestalo, v praxi to býva smutnejšie. Videl som už totiž v praxi auto obtočené okolo stĺpa, alebo ak chcete – stĺp, ktorý sa natlačil až do priestoru medzi predné sedadlá (s tragickými následkami) aj bez trhania rýchlostných rekordov (bolo to v obci).

Poučenie2: pri zrážkach pozor na rýchlosť, deformačná energia, ako sme ukázali, rastie s jej druhou mocninou (napríklad dvojnásobná rýchlosť znamená štvornásobnú deformačnú energiu). Zároveň vieme, že je energia úmerná hmotnosti, pri náraze do steny je teda vyššia hmotnosť nevýhodou, pri zrážke s autom je výhodou (keď idete s trabantom proti kamiónu, nemáte šancu).

Poučenie3: tu uvádzané rýchlosti sa nám možno zdajú na autá nízke, ale ... autá zvyknú (napr. poučené poučením2) pred zrážkou brzdiť a bežné havárie sa stávajú pri podobných rýchlostiach. A aj havárie pri týchto rýchlostiach majú fatálne dôsledky. Ako príklad uvediem podmienky testu Euro NCAP (crashtesty dávajúce autám hviezdičky bezpečnosti) „Skúška čelného nárazu sa vykonáva pri rýchlosti 64 km/h do predsunutej deformačnej bariéry, skúška bočného nárazu pri rýchlosti 50 km/h, skúška nárazu do stĺpa pri rýchlosti 29 km/h a skúšky ochrany chodcov pri rýchlosti 40 km/h“ (z www.crashtest.sk).

B-3.2 Červ Juraj (opravoval Škrek)

sa plazí po rovnej zemi, zrazu však pred ním vyrastie kocka so stranou a. Červ si povie, že ju prelezie (pohybuje sa kolmo na ňu). Dĺžka červa je l a jeho dĺžková hustota je p (t.j. jeden meter červa by vážil p kilogramov). Po tom, ako sa celý ponad kocku preplazil, zistil, že na to spotreboval energiu E. Nakreslite graf závislosti E od l.

Dokáže červotoč vytočiť červa? Čo ak mu pri tom červík vytočí črevá? Čo na to vraví naša milá pásomnica Jurko?

Jurko o tom samozrejme nič nevie, zato kociek má plnú hlavu. Akoby aj nie, veď dnes už snáď prelieza štyridsiatu siedmu. A ako sa pri tom zapotí. Tak znie otázka.

Energiu spotrebovanú pri trení neuvažujeme. Predpokladáme, že červík Jurko, ako to už býva, je veľmi malý, chudý a ľahký. Teda celú energiu ktorú potrebuje na to aby preliezol kocku spotrebuje iba na zdvihnutie svojho ťažiska do nejakej maximálnej výšky. Otázka teraz znie, ako najvyššie sa dostane jeho ťažisko? Ak je červík kratší ako strana kocky *a*, tak je to jasné. Najvyššia poloha ťažiska bude vo výške *a*, keď bude celý sa váľať hore na kocke.

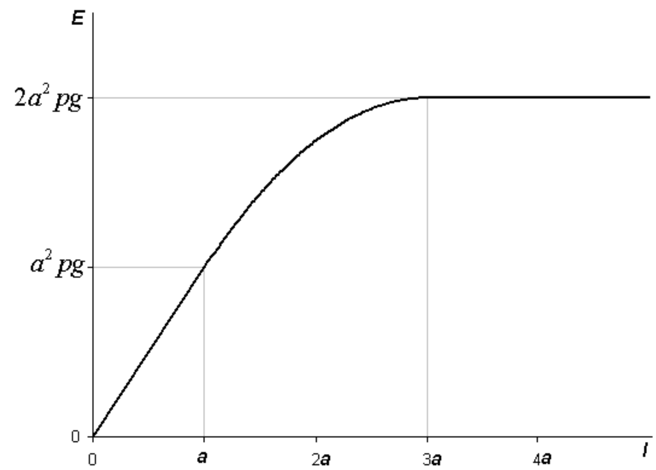
Čo ak je ale dlhší ako *a*? Ťažisko bude najvyššie vtedy, keď bude symetricky prevesený cez kocku tak, že nesklzne pod vlastnou váhou na žiadnu stranu. Prečo? Argumentov existuje viac. Ak by sme do červa v tejto polohe ťukli tak sklzne z kocky na jednu alebo druhú stranu. To znamená že všetky polohy červíka blízke (keď je červík máličko vychýlený) tejto symetrickej majú menšiu potenciálnu energiu (ťažisko takýchto polôh je nižšie). Keď sa pásomnica zamyslí, je evidentné, že ani veľmi vzdialené polohy (v zmysle nepodobajúce sa), nemôžu mať vyššie ťažisko (napríklad preto, že keď sa bude sklzavať, bude stále zrýchľovať, t.j. každá ďalšia poloha bude mať ešte nižšie ťažisko).

l	h_T <u>výška</u> *ťažiska*	$Ep=mgh=lpghT$
$l<a$	a	$lpga$
$a<l<3a$	$\dfrac{ap*a+(l-a)p(a-\frac{l-a}{4})}{lp}=\dfrac{6la-a^2-l^2}{4l}$	$pg\dfrac{6la-a^2-l^2}{4}$
$l>3a$	$\dfrac{ap*a+2ap*\frac{a}{2}+(l-3a)p*0}{lp}=\dfrac{2a^2}{l}$	$2a^2pg$

Len pozor, celá úvaha s labilnými polohami funguje len pre červa kratšieho ako 3*a*. Čo ak ale máme megapásomnicu dlhšiu ako 3*a*? Tak potom ťažisko je najvyššie v hociktorej polohe keď červík „obplazil“ celú kocku (okrem podstavy).

Poďme spočítať výšku ťažiska. Výška ťažiska kúskov je také že:

$$h_T=\sum_i \frac{m_i h_i}{M}$$



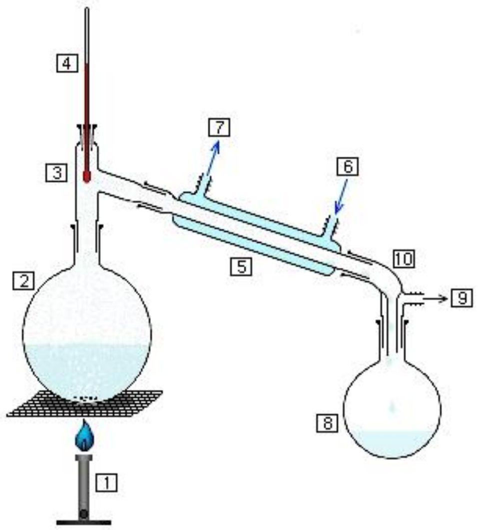
kde *M* je celková hmotnosť všetkých kúskov dokopy, m_i je hmotnosť *i*teho kúsku ktorý má ťažisko vo výške h_i. Keď $a<l<3a$, rozdelíme si červíka na tri kúsky. Prvý leží hore na kocke a má dĺžku *a* a ťažisko vo výške *a*, druhé dva kúsky (tie čo prevísajú cez kocku) majú dĺžku dokopy $l-a$ a ťažisko vo výške $a-(l-a)/4$ (premysli!). Analogicky sa dorobí aj prípad $l>3a$. Výsledky sú prezentované v tabuľke a je jednoduché sa k nim dopracovať.

A teraz si nakreslíme graf, keď už sme si to spočítali.

Čo sme dostali? Napríklad to, že od istej dĺžky červa sa energia potrebná na pretiahnute červa nemení. To dáva zmysel. Keď červík prelezie hlavou cez celú kocku, tak už iba vlastnou váhou bude ďalej pretahovať telo a zadok cez kocku. To je pekné, nie?

B-3.3 Destilujem, destiluješ, destilujeme... (5 bodov)

pri tom, ako dobre vieme, potrebujeme chladiť pary odparené z destilovaného roztoku. Na to slúži chladič – pozostáva z dvoch dlhších, do seba vložených valcovitých nádob, vnútornou sa hrnie para, priestorom medzi vonkajšou a vnútornou ide chladivo – napr. voda, ktorá cez steny vnútornej nádoby pary ochladzuje. Čo však nie je úplne jasné, je smer, ktorým treba vodu pustiť: môžeme ju pustiť tak, aby sa pohybovala rovnakým smerom ako para, alebo naopak. Ktorý zo spôsobov (a prečo) sa v praxi používa?



Ahojte! Bez dlhých rečí si pozrime chronicky známy obrázok destilačnej aparatúry, ktorý sa považuje v rôznych chemických knihách a na internete (napríklad na wikipedii, ako ten môj). Ako ste všetci správne zistili, voda v chladiči (č. 5) musí prúdiť v opačnom smere vzhľadom na smer pohybu pary v potrubí (teda vstupovať otvorom č. 6 a vystupovať otvorom č. 7). Týmto spôsobom zabezpečíme, že postupujúca ochladzujúca sa para sa stretáva s čoraz chladnejšou vodou, ktorá je najchladnejšia v mieste vpúšťania. Pre dostatočne dlhý chladič takto vieme pary ochladiť až na teplotu pritekajúcej vody. Ak by bol smer prúdenia vody v chladiči totožný so smerom prúdenia pary, teda vodu by sme vpúšťali otvorom č. 7 a vypúšťali otvorom č. 6, voda by prakticky hneď pri vstupe do chladiča akosi „spriemerovala" svoju teplotu s parou (predpokladajme, že voda aj para sa pohybujú približne rovnako rýchlo) a ďalšia tepelná výmena by neprebiehala, darmo by sme dali chladič hocijaký dlhý. Samozrejme, voda v chladiči sa asi nebude pohybovať rovnako rýchlo ako pary, ale tento problém vždy do istej miery zostáva. Nemôžeme očakávať, že voda, ktorú hneď na začiatku oteplíme na „spriemerovanú" teplotu, nám nakoniec ochladí pary na teplotu prichádzajúcej vody.

Druhý, veľmi vážny problém je nasledovný: ak by voda do chladiča vtekala otvorom č. 7 a vytekala otvorom č. 6, môže v chladiči vzniknúť vzduchová bublina (podľa slov Bzduša, ktorému týmto ďakujem za poskytnutie jeho celoživotných chemických skúseností☺, aj cez dve tretiny objemu chladiča) a vtekajúca voda bude len stekať po stenách vnútornej nádoby, čím sa zmenšuje efektívny povrch, cez ktorý sa predáva teplo. Samozrejme, uvedený nedostatok možno čiastočne odstrániť vhodnou konštrukciou chladiča (napríklad vo forme obvinutej rúrky okolo potrubia s parami), tým však zmenšíme jeho efektívny povrch, ktorým prestupuje teplo a nič sme nedosiahli.

Napokon dve vety o hodnotení úlohy. Tí z vás, ktorí v riešení uviedli oba opísané efekty, majú plný počet bodov. Za jeden z nich som udeľoval o bod menej.

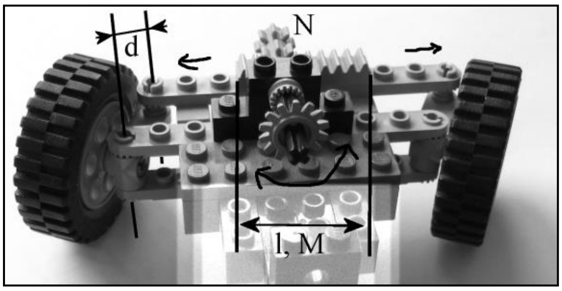
Ak máte dedka, ktorý sa vyžíva v pálení (určite minimálne svetoznámej) dedkovice[1], určite mu nezabudnite pripomenúť, aké praktické veci vás seminár učí.

---

[1] Alkoholický nápoj pripravovaný dedkom, nie alkoholický nápoj z dedka.

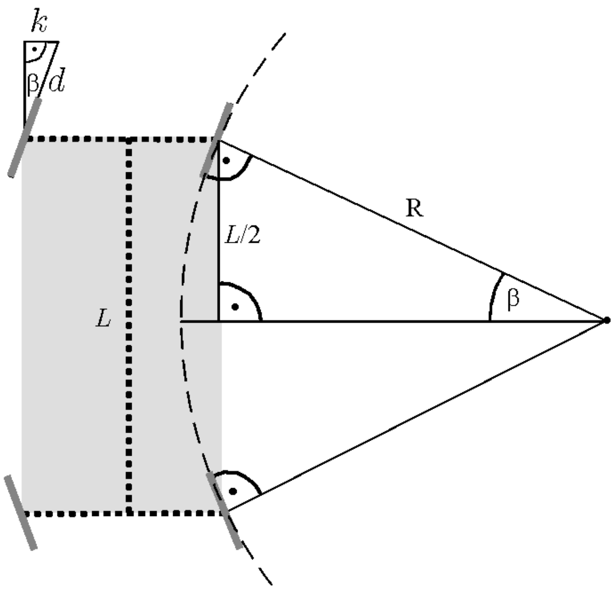
B-3.4 Infantilný Kubo (5 bodov)

si postavil z LEGO-TECHNIK-ovej stavebnice auto. A to auto má volant, ktorý ovláda obidve nápravy súčasne. Podobne to funguje na niektorých stavebných ťažkých strojoch. Potrebné údaje (nájdeš ich aj v obrázku): počet zubov kolieska na oske volantu je N = 8, počet zubov na rovnom segmente je M = 10, pričom jeho dĺžka je l = 4 kocky. Dĺžka d pohyblivej časti spojenej s kolesom je 2 kocky. Vzdialenosť náprav (odborne rázvor) je L = 16 kociek. Urči polomer zatáčania môjho vozidla, ak otočím volantom o uhol α.



Ako prvé porátame, o aký uhol sa otočia kolesá pri otočení volantu o uhol α. To je veľmi jednoduché, lebo vieme, že otočením o uhol α sa nám ozubené koliesko na oske volantu otočí o $z = (\alpha / 360°)\, N$ zubov. Teda o rovnakých z zubov sa pod kolieskom musí posunúť ten rovný ozubený segment, čo činí posun o $k = (z / M)\, l$ kociek. Označím si β uhol otočenia kolies prislúchajúci otočeniu volantu o α. Pozriem na obrázok a vidím, že platí $\sin\beta = k / d$.

Dokopy máme: $\sin\beta = \dfrac{\alpha}{360°}\dfrac{N}{M}\dfrac{l}{d}$, čo je odpoveď na prvú otázku úlohy.



Ešte som nevyčerpal všetko, čo mi obrázok poskytuje. Dokreslím si kružnicu, po ktorej pôjdu pravé kolesá. To je taká kružnica, ktorá sa oboch kolies dotýka. To, že sa ich dotýka, znamená, že spojnica stredu kolesa so stredom kružnice je kolmá na koleso (zároveň mám aj návod, ako tú kružnicu nájsť). Vďaka jednoduchej geometrii objavím uhol β aj v tejto kružnici. Zbadám, že $\sin\beta = L / (2R)$.

Zošitím získaných vzťahov tou správnou ihlou (porovnaním) dostávam riešenie

$$R = \frac{360°}{\alpha}\frac{M}{N}\frac{d}{l}\frac{L}{2} = \frac{360°}{\alpha} 5 kociek\,.$$

Poznámka: ľavé aj pravé kolesá opisujú rovnaký oblúk. To nie je v reáli možné a zákonite musia kolesá trochu prešmykovať do strany. Stred vozidla však bude viac-menej naozaj opisovať kružnicu o polomere R.

Poznámka o minimálnom polomere otáčania: posuvný segment sa môže na autíčku v bočnom smere posunúť o najviac 1 kocku (potom tomu otočnému ramenu kolesa bráni súčiastka, po ktorej posuvný segment kĺže), čo dáva polomer $R_{\min} = 16$ kociek.

Hodnotenie: za prvú časť úlohy sa dalo získať najviac 2,5 boda, zvyšok za súvis medzi natočením kolesa a polomerom zatáčania. A opisovať sa neoplatí! Piešťanské dámske kvarteto bolo penalizované v súlade s pravidlami – svoj celkový bodový zisk si rozdelili spravodlivo, po 0.5b.

B-3.5 Kondenzátorovica (5 bodov)

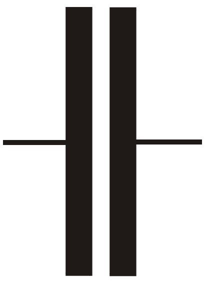
***a)** Keď zapojíme kondenzátor do obvodu, chvíľu sa správa ako vodič s nulovým odporom. Ako je to možné, keď dosky kondenzátora sú od seba oddelené dielektrikom?*

***b)** Názorne, t.j. bez výpočtov, odvoďte vzorce pre skladanie kapacít kondenzátorov zapojených sériovo a paralelne. Využite, že kapacita je priamo úmerná ploche dosák a prevrátenej hodnote vzdialenosti medzi nimi.*

***c)** (Viaceré) teoretické výsledky pre kondenzátor platia, pokiaľ jeho dosky sú nekonečne veľké. Načo je táto teória dobrá, keď bežné kondenzátory sú také maličké?*

***d)** Učíme sa, že potenciál elektrického poľa je určený jednoznačne až na konštantu – podľa toho, kde si zvolíme nulu, nám vyjde potenciál ostatných bodov priestoru, podobne, ako pri určovaní nadmorskej výšky kladieme nulu na hladinu mora. Aký význam má potom nápis 1.5V na baterke?*

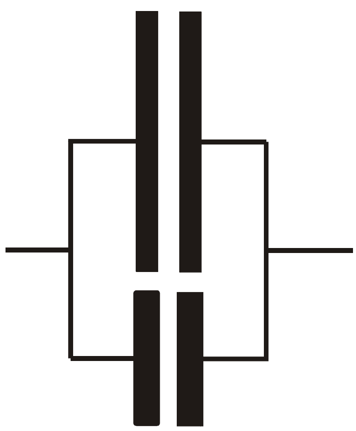
Tak ako je to s tým kondenzátorom? V prvom rade sa zamyslíme nad tým, prečo obvodom, ktorý sa skladá iba zo zdroja, ktorého konce sú spojené drôtom, ktorý je v strede rozstrihnutý prúd **netečie** – čo ako triviálne sa to zdá. Ako zdroj „zistí“, že obvod je prerušený? Predstavme si maličký náboj, ktorý sa odvážne vydá z jednej svorky zdroja do druhej.[2]



V okamihu, keď príde na rozstrihnuté miesto, nemôže sa ďalej hýbať. Elektróny sa rozostúpia rovnomerne po vodiči a spôsobia, že potenciál vodiča vzrastie, z pôvodnej nuly presne na hodnotu U, čo je potenciál svorky, z ktorej elektróny vyštartovali (ak by vzrástol viac, elektróny sa v snahe zaujať miesto s najnižším potenciálom vrátili naspäť do zdroja). To isté sa udeje v druhej polovici obvodu a celkovo to vyzerá tak, že obvodom v skutočnosti pretiekol istý náboj, akurát veľmi malý. V praxi povieme, že nepretiekol žiadny. Keď bude obvod prerušený kondenzátorom, situácia je iná iba z toho dôvodu, že kondenzátor má oveľa väčšiu kapacitu ako kus vodiča. Stále nové a nové elektróny budú pritekať na jednu z dosák, kde budú „uskladnené“ a stále väčší a väčší nedostatok elektrónov vznikne na doske druhej, pričom prebytočné elektróny odchádzajú do zdroja. Obvodom teda netečie prúd v pravom slova zmysle, aj keď, všetko vyzerá tak ako keby tiekol. Časom sa samozrejme aj veľkokapacitný kondík nabije a obvod sa správa ako každý iný slušný prerušený obvod. V prvých chvíľach nabíjania však vôbec nenabitý kondík nekladie žiadny „odpor“, neskôr pôsobí istým „protinapätím“ proti zdroju.

Teraz preskočíme úlohu b) a najprv sa pozrieme na časť **c)**[3]. Typickou ukážkou vzorca, ktorý predpokladá obrovské rozmery dosák, je $C = S\varepsilon / d$, čo je vzorec pre výpočet kapacity kondenzátora s doskami s plochou S, vzdialenosťou d, a permitivitou dielektrika medzi nimi ε. To, čo v skutočnosti pri výpočte (napríklad kapacity) potrebujeme, nie je obrovská veľkosť dosiek, ale to, aby dosky boli (v ľubovoľnom svojom rozmere) oveľa väčšie ako ich vzdialenosť d (stručne zapíšeme $S >> d$). A toto skutočne platí – minimálne pre niektoré druhy kondenzátorov. Na stavbu jedného takého kondíka sa pozrieme: na prvý pohľad vyzerá ako valček zhruba o rozmeroch prsta, to, čo však skrýva vo vnútri, sú dva veľmi dlhé pásy alobalu oddelené tenkým listom dielektrika. Tento sendvič ešte obložený dielektrikom (teda: dielektrikum, alobal, dielektrikum, alobal, dielektrikum) zrolovaný do rolky, vytvára valček, ktorý vidíme.

V prípade **b)** najprv odvodíme skladanie kapacít kondenzátorov C_1, C_2 zapojených paralelne. V prvom rade budeme predpokladať že existuje nejaký vzorec, ktorý výslednú kapacitu C z kapacít C_1, C_2 ozaj vypočíta[4]. Kapacity C_1, C_2 si môžme predstaviť realizované napríklad dvoma kondíkmi s parametrami S_1, d a S_2, d. Čo by sa stalo, keby sme teraz dosky priložili tesne k sebe (obr.)? Zrejme by sa nič nezmenilo, pretože v kondíku je každý bod jednej dosky elektricky ovplyvňovaný iba malým okolím náprotivného bodu na druhej doske – zvyšok dosky je príliš ďaleko a pôsobí pod príliš malým uhlom. Priložením dosák k sebe ale získavame nový kondík o ploche $S_1 + S_2$ a teda kapacite (vzorec zo zadania) $C_1 + C_2$. A sčítavanie kapacít je presne to, čo sme chceli odvodiť. Pri skladaní kapacít kondíkov zapojených za seba si C_1, C_2 predstavíme realizované dvoma kondíkmi s parametrami S, d_1 a S, d_2, viď obrázky dole. Vďaka tomu, že kondenzátor nevytvára mimo medzidosčia



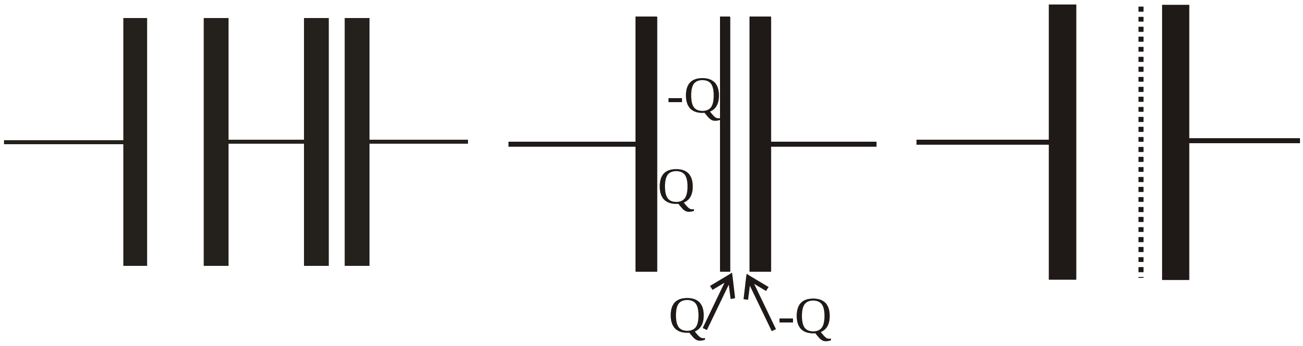
[2] Prečo by to náboj robil? Pretože zdroj si môžme predstaviť napríklad ako veľkú kovovú guľu plnú elektrónov, ktoré sú tam veľmi natesno, silno sa odpudzujú a v okamihu, keď zdroj spojíme s elektricky neutrálnym vodičom, tam bude pár najbližších elektrónov vytlačených.

[3] Prvá filozofická odpoveď na otázku znie – a prečo by sme nemohli používať malé kondenzátory, ktoré sú praktické (aj keď možno ťažko porátateľné) a mať aspoň dáke pekné teoretické výsledky pre veľké kondenzátory? Konieckoncov, je to bežný postup v mnohých vedných oblastiach, kde teoretické výsledky platia pre veľmi zidealizované podmienky a s praxou nemajú spoločné veľa. Tuto je však situácia iná.

[4] Tento predpoklad je dôležitejší než by sa na prvý pohľad zdalo, ale po chvíli rozmýšľania ľahko zistíme, prečo je to tak.

žiadne el. pole (až na zanedbateľné oblasti blízko okrajov dosiek), môžeme vodivo spojené dosky 2 a 4 „prekresliť“ tak, ako je to ukázané na ďalších obrázkoch a v konečnom dôsledku ich z obvodu úplne vypustiť, pretože dvojica veľmi blízkych nábojov $-Q$ a Q nemá žiadny elektrický vplyv na zvyšok sústavy. Tým sme situáciu prerobili na jeden kondík s plochou dosák S a vzdialenosťou $d_1 + d_2$. Keďže kapacita je nepriamo úmerná d, máme hneď návod na skladanie kapacít: Prevrátené hodnoty sa sčítajú a dostávame prevrátenú hodnotu výslednej kapacity.

No a **d)** na záver. 1.5V na baterke hovorí samozrejme o rozdiele potenciálov jej svoriek. Nevieme teda, či potenciály budú 0 a 1.5 alebo 0.5 a 2 či 100 a 101.5, ich rozdiel je však, aspoň do doby vybitia baterky, pevne daný.



Tento seminár podporujú
KTFDF FMFI UK,
JSMF,
iuventa

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
A – kategória (staršia)
23. ročník
zimný semester
školský rok 2007/2008

www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

A-3.1 Dvaja v jednom, jeden v dvoch (5 bodov)

Komu bude teplejšie: jednému človeku spiacemu v dvoch spacákoch navlečených na sebe alebo dvom ľuďom spiacim v jednom, rovnako veľkom spacáku?

Prvý problém je, čo to vlastne znamená povedať, že niekomu je teplejšie. Zmysluplný spôsob, ako to skúmať, je nasledovný: Strčíme do spacáku človeka s konštantným tepelným výkonom P_c a budeme skúmať, aká teplota sa v spacáku ustáli. Kto bude mať väčšiu teplotu, bude mu teplejšie. Nebude nás pritom vôbec zaujímať, že človek musí mať istú telesnú teplotu, pretože toto si človek v praxi rieši tým, že spacák viac alebo menej pootvorí (prípadne sa rozdrkoce, aby tak zvýšil svoj tepelný výkon), ale to až **po tom** ako zistí, že mu je teplo.

Pozrime sa teda, čo sa postupne deje s teplotou v spacáku. Kým doň vlezieme, nie je dôvod, aby tá teplota bola iná, než tá v okolí. Pozrime na prípad, že do spacáku ideme preto, že sa chceme ohriať, tzn. že vonkajšia teplota je nižšia než telesná.

$$P_s = \frac{\Delta T \cdot S}{R}$$

Prosím, zoznámte sa, toto je vzorec, ktorý budeme potrebovať. A čo nám chce povedať? Je celkom intuitívny. P_s je tepelný výkon, ktorý prechádza spacákom, S je plocha spacáku, ΔT je rozdiel teplôt medzi okolím a vnútrom spacáku, no a R je konštanta, ktorá vyjadruje to, ako veľmi dobrý je ten-onen spacák, inak povedané, ako dobre tepelne izoluje.

Človek, aj keď nič nerobí, má istý tepelný výkon. S kľudným srdcom ho pri spánku môžeme prehlásiť za konštantný (súvisí to s tým, čo je zdrojom tohoto tepelného výkonu – metabolické procesy a svalová činnosť, ktorá až na činnosť hladkého svalstva v spánku takmer úplne mizne). Takto si pomaly vyhrievame vnútro spacáku, ale spolu s rastúcou teplotou stúpa aj tepelný výkon, ktorý prechádza spacákom – a takto o teplo prichádzame. Až napokon (teoreticky po nekonečne dlhom čase, ale v rozumnom čase to bude naozaj veľmi blízko) sa náš tepelný výkon vyrovná s tým, ktorý bude prechádzať cez spacák a teplota sa ustáli.

No a už to skoro máme. Lebo P_s si môžme nahradiť P_c, teda výkonom človeka (v dobe, keď nás to zaujíma, sú oba rovnaké). V prípade dvoch ľudí je dvakrát väčší, ako keď je len jeden[1]. A to, čo je ešte rozdielne v tých dvoch prípadoch, je R. Z podobných dôvodov ako boli tie o vyhrievaní spacákov dostaneme, že medzi dvoma spacákmi bude teplota rovná aritmetickému priemeru medzi vnútornou a vonkajšou (inak by sme ešte neboli v ustálenom stave, pretože jedným spacákom by prenikalo viac tepla ako druhým), čo ale znamená, že tepelný výkon medzi vnútrom a stredom a stredom a vonkajškom, a teda aj celkovo, bude polovičný, čo vlastne znamená, že máme dvojnásobné R. Aby sme si mohli konečne vyjadriť vnútornú teplotu, stačí už len pár poznámok. S bude v oboch prípadoch rovnaké. A vonkajšia teplota tiež. Darmo, svet takto nevyhrejeme. Už si len dosaďme, čo sme zistili.

V prípade jedného človeka v dvoch spacákoch dostaneme:

---

[1] Tu ste mnohí vo svojich riešeniach spravili chybu – predpokladali ste, že tepelný výkon človeka klesne, pretože keď sú dvaja „nalepení" na sebe, teplo sa vylučuje iba „nenalepenou" časťou tela. To je samozrejme pravda, ale nenalepenou časťou tela potom môžem vypúšťať tepla o čosi viac. To všetko vďaka tomu, že krv pomerne efektívne teplo rozdistribuuje po celom tele.

$$\Delta T_1 = \frac{P_c \cdot 2R}{S}$$

A ak máme dvoch v jednom:

$$\Delta T_2 = \frac{2P_c \cdot R}{S}$$

Teda evidentne $\Delta T_1 = \Delta T_2$ čo znamená, že v oboch prípadoch bude vnútri spacáku rovnaká teplota.

Toľko nám k tomu povedal zidealizovaný fyzikálny model. A ako je to v reálnom živote? Prvé zanedbanie, ktorého sme sa dopustili, je, že plocha spacákov je v oboch prípadoch rovnaká. Vidieť, že jeden človek ju v skutočnosti vie mať menšiu, napríklad tak, že si zhúžve tie pretŕčajúce cípy pod seba. Druhým problémom je predpoklad, že teplo uniká len cez povrch spacáku. Kritickým miestom totižto je otvor, ktorým tam vliezame. Jeden človek si vie sťahovačku utiahnuť tesnejšie, než dvaja a teda takto stráca menej tepla. Rôznych zádrheľov je veľa a je jedno, ktoré ste našli – pokiaľ ste ich vôbec hľadali, pretože netreba zabúdať, že nutnou súčasťou každého dobrého riešenia je aj úvaha nad tým, ako to vyzerá v praxi, pokiaľ zadanie nie je zjavne čisto hypotetické (napr. majme dokonale čierne teleso...) a takisto aj to, ako naše zanedbania mohli ovplyvniť riešenie. Všetky zádrhele (vrátane poznámky 1) však poukazujú na to, že dvojici v jednom spacáku bude o čosi chladnejšie.

A-3.2 Kondenzátorovica (5 bodov)

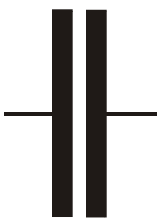
a) *Keď zapojíme kondenzátor do obvodu, chvíľu sa správa ako vodič s nulovým odporom. Ako je to možné, keď dosky kondenzátora sú od seba oddelené dielektrikom?*

b) *Názorne, t.j. bez výpočtov, odvoďte vzorce pre skladanie kapacít kondenzátorov zapojených sériovo a paralelne. Využite, že kapacita je priamo úmerná ploche dosák a prevrátenej hodnote vzdialenosti medzi nimi.*

c) *(Viaceré) teoretické výsledky pre kondenzátor platia, pokiaľ jeho dosky sú nekonečne veľké. Načo je táto teória dobrá, keď bežné kondenzátory sú také maličké?*

d) *Učíme sa, že potenciál elektrického poľa je určený jednoznačne až na konštantu – podľa toho, kde si zvolíme nulu, nám vyjde potenciál ostatných bodov priestoru, podobne ako pri určovaní nadmorskej výšky kladieme nulu na hladinu mora. Aký význam má potom nápis 1.5V na baterke?*

Tak ako je to s tým kondenzátorom? V prvom rade sa zamyslíme nad tým, prečo obvodom, ktorý sa skladá iba zo zdroja, ktorého konce sú spojené drôtom, ktorý je v strede rozstrihnutý prúd **netečie** – čo ako triviálne sa to zdá. Ako zdroj „zistí“, že obvod je prerušený? Predstavme si maličký náboj, ktorý sa odvážne vydá z jednej svorky zdroja do druhej.[2]



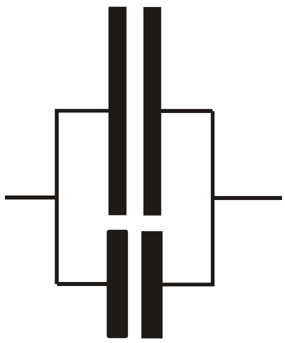
V okamihu, keď príde na rozstrihnuté miesto, nemôže sa ďalej hýbať. Elektróny sa rozostúpia rovnomerne po vodiči a spôsobia, že potenciál vodiča vzrastie, z pôvodnej nuly presne na hodnotu U, čo je potenciál svorky, z ktorej elektróny vyštartovali (ak by vzrástol viac, elektróny sa v snahe zaujať miesto s najnižším potenciálom vrátili naspäť do zdroja). To isté sa udeje v druhej polovici obvodu a celkovo to vyzerá tak, že obvodom v skutočnosti pretiekol istý náboj, akurát veľmi malý. V praxi povieme, že nepretiekol žiadny. Keď bude obvod prerušený kondenzátorom, situácia je iná iba z toho dôvodu, že kondenzátor má oveľa väčšiu kapacitu ako kus vodiča. Stále nové a nové elektróny budú pritekať na jednu z dosák, kde budú „uskladnené“ a stále väčší a väčší nedostatok elektrónov vznikne na doske druhej, pričom prebytočné elektróny odchádzajú do zdroja. Obvodom teda netečie prúd

[2] Prečo by to náboj robil? Pretože zdroj si môžme predstaviť napríklad ako veľkú kovovú guľu plnú elektrónov, ktoré sú tam veľmi natesno, silno sa odpudzujú a v okamihu, keď zdroj spojíme s elektricky neutrálnym vodičom, tam bude pár najbližších elektrónov vytlačených.

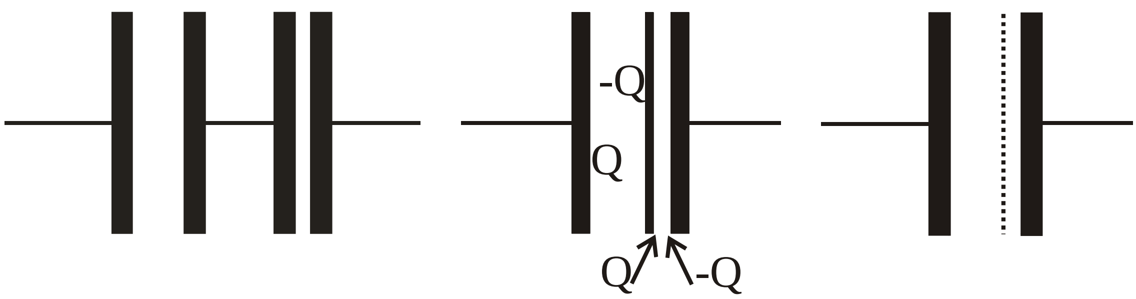
v pravom slova zmysle, aj keď všetko vyzerá tak, ako keby tiekol. Časom sa samozrejme aj veľkokapacitný kondík nabije a obvod sa správa ako každý iný slušný prerušený obvod. V prvých chvíľach nabíjania však vôbec nenabitý kondík nekladie žiadny „odpor“, neskôr pôsobí istým „protinapätím“ proti zdroju.

Teraz preskočíme úlohu b) a najprv sa pozrieme na časť **c)**[3]. Typickou ukážkou vzorca, ktorý predpokladá obrovské rozmery dosák, je $C = S\varepsilon / d$, čo je vzorec pre výpočet kapacity kondenzátora s doskami s plochou S, vzdialenosťou d, a permitivitou dielektrika medzi nimi ε. To, čo v skutočnosti pri výpočte (napríklad kapacity) potrebujeme, nie je obrovská veľkosť dosiek, ale to, aby dosky boli (v ľubovoľnom svojom rozmere) oveľa väčšie ako ich vzdialenosť d (stručne zapíšeme $S >> d$). A toto skutočne platí – minimálne pre niektoré druhy kondenzátorov. Na stavbu jedného takého kondíka sa pozrieme: na prvý pohľad vyzerá ako valček zhruba o rozmeroch prsta, to, čo však skrýva vo vnútri, sú dva veľmi dlhé pásy alobalu oddelené tenkým listom dielektrika. Tento sendvič ešte obložený dielektrikom (teda: dielektrikum, alobal, dielektrikum, alobal, dielektrikum) zrolovaný do rolky, vytvára valček, ktorý vidíme.

V prípade **b)** najprv odvodíme skladanie kapacít kondenzátorov C_1, C_2 zapojených paralelne. V prvom rade budeme predpokladať, že existuje nejaký vzorec, ktorý výslednú kapacitu C z kapacít C_1, C_2 ozaj vypočíta[4]. Kapacity C_1, C_2 si môžeme predstaviť realizované napríklad dvoma kondíkmi s parametrami S_1, d a S_2, d. Čo by sa stalo, keby sme teraz dosky priložili tesne k sebe (obr.)? Zrejme by sa nič nezmenilo, pretože v kondíku je každý bod jednej dosky elektricky ovplyvňovaný iba malým okolím náprotivného bodu na druhej doske – zvyšok dosky je príliš ďaleko a pôsobí pod príliš malým uhlom. Priložením dosák k sebe ale získavame nový kondík o ploche S_1+S_2 a teda kapacite (vzorec zo zadania) C_1+C_2. A sčítavanie kapacít je presne to, čo sme chceli odvodiť. Pri skladaní kapacít kondíkov zapojených za seba si C_1, C_2 predstavíme realizované dvoma kondíkmi s parametrami S, d_1 a S, d_2, viď obrázky dole. Vďaka tomu, že kondenzátor nevytvára mimo medzidosčia žiadne el. pole (až na zanedbateľné oblasti blízko okrajov dosiek), môžeme vodivo spojené dosky 2 a 4 „prekresliť“ tak, ako je to ukázané na ďalších obrázkoch a v konečnom dôsledku ich z obvodu úplne vypustiť, pretože dvojica veľmi blízkych nábojov $-Q$ a Q nemá žiadny elektrický vplyv na zvyšok sústavy. Tým sme situáciu prerobili na jeden kondík s plochou dosák S a vzdialenosťou $d_1 + d_2$. Keďže kapacita je nepriamo úmerná d, máme hneď návod na skladanie kapacít: Prevrátené hodnoty sa sčítajú a dostávame prevrátenú hodnotu výslednej kapacity.



No a **d)** na záver. 1,5 V na baterke hovorí samozrejme o rozdiele potenciálov jej svoriek. Nevieme teda, či potenciály budú 0 a 1,5 alebo 0,5 a 2 či 100 a 101,5, ich rozdiel je však, aspoň do doby vybitia baterky, pevne daný.

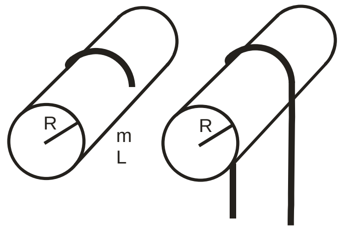


[3] Prvá filozofická odpoveď na otázku znie – a prečo by sme nemohli používať malé kondenzátory, ktoré sú praktické (aj keď možno ťažko porátateľné) a mať aspoň dáke pekné teoretické výsledky pre veľké kondenzátory? Koniec koncov, je to bežný postup v mnohých vedných oblastiach, kde teoretické výsledky platia pre veľmi zidealizované podmienky a s praxou nemajú spoločné veľa. Tuto je však situácia iná.

[4] Tento predpoklad je dôležitejší než by sa na prvý pohľad zdalo, ale po chvíli rozmýšľania ľahko zistíme, prečo je to tak.

A-3.3 Obesenec (opravoval Kubus)

Na hladkom valci s polomerom R a vodorovnou osou je v rovine kolmej na túto os symetricky položená retiazka dĺžky L a hmotnosti m. Situácia môže vyzerať napríklad ako na obrázkoch. Akou silou je napínaná vo svojom najvyššom mieste?



Keď som uvidel tie haldy integrálov vo vašich riešeniach, pravdupovediac som sa dosť zhrozil. Majte na pamäti, že vo FKS *väčšinou* integrovať naozaj netreba. Integruje sa maximálne tak vo FX, tam sa môžete naozaj vyšantiť do sýtosti. Pozor, nieže by boli integrály nejakým spôsobom nečisté alebo zlé. Je super, keď viete integrovať. Lenže, povedané slovami básnika Sirupa, integrál je ako oheň – dobrý sluha, ale zlý pán. Ukážeme si teda, ako to celé funguje v tomto prípade, počnúc od toho – prepytujem – integrálu. Ľuďom, ktorí sú na d-čka alergickí, odporúčam prvé dve tretiny vzoráku preskočiť.[5]

Rozdeľme si retiazku na veľa drobných kúskov a pozrime sa na jeden z nich: nech je dĺžky dl a nech sa dotýka valca v mieste, ktorého (kolmá) spojnica s osou valca zviera so zvislicou uhol α. Predpokladáme, že retiazka je homogénna, jej dĺžková hustota je teda $\rho = m/L$. Potom na náš kúsok pôsobí tiažová sila $\mathrm{d}G = \mathrm{d}m.g = \mathrm{d}l.\rho.g$. Zložku tejto sily kolmú na povrch valca presne vyruší reakčná sila od valca, zostane nám len rovnobežná zložka $\mathrm{d}F = \mathrm{d}l.\rho.g.\sin\alpha$. Čo sa stane s touto silou? Vieme, že retiazka sa nepohybuje, takže celková sila pôsobiaca na náš malý kúsok musí byť nulová. Keďže nemáme trenie o valec, jediným „riešením“ ako sa vyrovnať s touto silou je napätie v retiazke. Sila, ktorou je kúsok ťahaný „hore“ (v smere retiazky, samozrejme, nie kolmo hore) musí byť presne o dF väčšia ako sila, ktorou je ťahaný dole: vtedy budú všetky sily v rovnováhe. Spočítané dF bude teda práve prírastkom napätia retiazky na našom malom kúsku. [Kúsky retiazky ktoré sa valca nedotýkajú (prevísajú) sú na tom podobne, sila dF bude priamo rovná $\mathrm{d}G = \mathrm{d}l.\rho.g$, keďže sa nepapreme so žiadnym dotykom.]

Na konci retiazky je napätie nulové (jej konce nik neťahá), stačí teda sčítať = zintegrovať všetky tieto prírastky napätia dF pre jednu polovicu retiazky a máme napätie, ktorým je napínaná v najvyššom bode (t.j. v polovici).

Tu by sme mohli skončiť, popasovať sa s nepríliš ľúbeznými vzťahmi, pointegrovať nejaký kosínus, nespraviť chybu a dostať výsledok. Pozorný riešiteľ sa však pozrie na vzťah pre dF a hneď si všimne jednu zaujímavú vec. Celý vzťah sa dá prepísať aj ako

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}l.\rho.g.\sin\alpha = \rho.g.\mathrm{d}y,$$

kde dy je akási výška nášho malého kúska, konkrétne výškový rozdiel medzi jeho horným a dolným koncom. Rovnako to je pre valcasanedotýkajúci kúsok. Pozor pozor, dostali sme teda vzťah, ktorý nezávisí od uhlu α! Sčítavaním (áno áno, integrovaním) týchto prírastkov napätia budeme sčítavať výšky jednotlivých kúskov (násobené konštantou), výsledkom teda bude celková výška retiazky (násobená tou konštantou), čiže $F = \rho.g.y$. (Kde y je spomínaná výška retiazky, teda výškový rozdiel medzi jej najvyšším bodom a spodnými koncami.)

Presné detaily integrovania pre tieto dva spôsoby riešenia tu rozpisovať nebudem, znalci integrálov si ich určite doplnia sami. Určite sa však zamyslite, ako súvisia (najmä ten druhý spôsob) s tretím, ***bezintegrálovým!*** **riešením.**

Rozseknime na chvíľku retiazku v najvyššom bode. Ak bola napínaná silou F, teraz budeme musieť oba konce držať takouto istou silou, aby nespadli dole. Urobíme teraz nasledujúcu fintu. Jednu z týchto polovíc necháme „spadnúť“ o malý kúsok d. Inak povedané, ak po rozseknutí držal polovicu retiazky silou F maličký trpaslík stojaci v najvyššom bode valca, tak tento trpaslík prejde po povrchu valca vzdialenosť d. Táto

[5] Aj keď Tomáš si to po Kubíkovi prečítal celé a odporúča vám sa tým prehrýzť, lebo Veľkú teóriu malých kúskov vám málokto vysvetlí prehľadnejšie.

vzdialenosť nech je taká malá, že sa na situácii skoro nič nezmení; teda ani sila, ktorou trpaslík retiazku drží, sa skoro vôbec nezmení (a zostane rovná F). Retiazka na trpaslíkovi teda vykonala prácu $W = F.d$. Odkiaľ na to vzala energiu? No predsa odtiaľ, že sa zosunula o ten kúsok d a získala pri tom nejakú potenciálnu energiu.[6]

Integrály na spočítanie tejto energie však nechajme doma v skrini a pozrime sa na to trochu inak: ak sa homogénna retiazka zosunula o malý kúsok d, je to presne to isté, akoby sme jej zo začiatku (z vrchu) usekli kúsok o dĺžke d a prilepili ho na koniec. Tu už vieme potenciálnu energiu spočítať hneď, bude to jednoducho $E_p = m.g.h = \rho.d.g.y$, kde y je (tak ako minule) výškový rozdiel medzi horným a dolným koncom retiazky. Z rovnosti vykonanej práce a nadobudnutej potenciálnej energie dostávame $F.d = \rho.d.g.y$, čiže $F = \rho.g.y$.

Nakoniec už len geometrická čerešnička, pre úplnosť riešenia si vyjadríme y podľa zadaných parametrov R a L. Ak retiazka neprevísa, teda $L < \pi R$, potom jej koncu bude prislúchať uhol $\alpha = L/2R$ (pri značení ako v druhom odseku). Výškový rozdiel medzi vrchom a koncami bude $y = (1 - \cos \alpha)R$, takže napätie v strede je

$$F = \rho g y = mgR \frac{1 - cos(L/2R)}{L}.$$

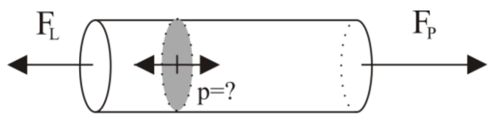
Pri prevísajúcej retiazke sa πR dĺžky bude dotýkať valca a zvyšných $L - \pi R$ bude visieť v dvoch rovnakých kusoch, takže $y = R + (L - \pi R)/2$ a teda

$$F = \rho g y = mgR \frac{(1 - \pi/2 + L/2R)}{L}.$$

Nakoniec jedna poznámka k riešeniam. Ak máme lano a ťaháme naň zľava silou F a sprava silou F, napätie v ňom bude F, a nie $2F$. Prečo? Lebo. Lebo je to definícia napätia v lane. Uvedomme si však, že je to veľmi rozumná definícia. Na vytvorenie niečoho, čo sa dá jasne nazvať napätím vždy potrebujeme dve sily (inak by lano len zrýchľovalo) a ak by sme napätím označovali dvojnásobok jednej potrebnej sily, spôsobovalo by to kopec divných komplikácií. (Napríklad, uviažem lano o stĺp a ťahám ho silou F, čím spôsobujem napätie $2F$. Atď.)

A-3.4 Valček (opravovala Marcelka)

s dĺžkou l, prierezom S a hmotnosťou m začneme ťahať silou F_l doľava a F_p doprava. Akým tlakom namáhame vnútro valčeka? Presnejšie, keby sme si z valčeka odkrojili úzky krúžok ako z klobásy, akými tlakmi by bol tento krúžok rozťahovaný?

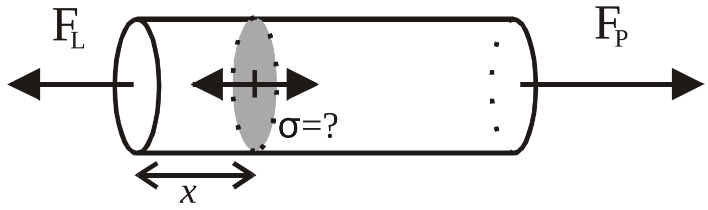


sily posobia na cele podstavy, nie len na ich stredy.

Zlá správa pre všetkých, ktorí sa pokúsili riešenie odbiť tvrdením ako napríklad, že vnútro valčeka je rozťahované väčšou z dvojice pôsobiacich síl: Pnutie vo vnútri valčeka sa bude meniť s polohou vo valčeku. Preto správna odpoveď musí vyzerať nejako takto: Ak sme vzdialení x od ľavého okraja, bude pnutie vo valčeku rovné *blabla*. Špeciálne, pnutie pri ľavom okraji musí byť F_l / S, pri pravom F_p / S. Zamyslite sa prečo. Najprv ukážeme riešenie pre všeobecné x inšpirované Samom Hapákom a Luciou Simanovou, čím sa im obom podľa neúprosných pravidiel body predeľujú na polovicu:

---

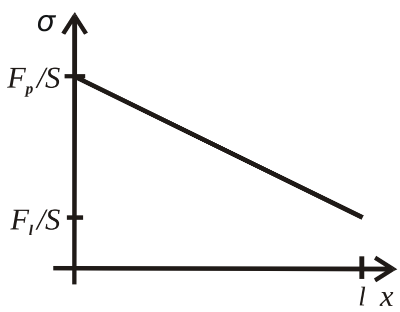
[6] Ak máte problém predstaviť si polovicu retiazky ako koná prácu na trpaslíkovi, možno bude jednoduchšie pozrieť sa na opačnú situáciu, keď trpaslík vyťahuje polovicu retiazky o vzdialenosť d.



Zrýchlenie valčeka vieme vypočítať ako $a = \frac{F_l - F_p}{m}$ (za kladný smer považujeme smer doľava). Rozdeľme valček na 2 časti vo vzdialenosti x od ľavého konca valčeka. Ľavý kus valčeka má hmotnosť $\frac{x}{l}m$. Tento kus (tak isto ako celý valček) zrýchľuje so zrýchlením a, takže výslednica síl, ktoré naň pôsobia musí mať veľkosť $\frac{x}{l}\left(F_l - F_p\right)$. Na kus pôsobia 2 sily: F_l doľava a neznáma sila F od pravého kusu valčeka doprava. Preto musí platiť $F_l - F = \frac{x}{l}\left(F_l - F_p\right)$. Odtiaľ dostávame $F = \frac{l-x}{l}F_l + \frac{x}{l}F_p$. Vo vzdialenosti x od ľavého konca valčeka je teda napätie $\frac{F}{S} = \frac{l-x}{lS}F_l + \frac{x}{lS}F_p$.

Skúsme sa ešte pozrieť na príklad z iného uhla. Na chvíľu zabudnime na valček a predstavme si vlak. Bude mať lokomotívu a 8 rovnakých vagónov (každý o hmotnosi m) a bude rovnomerne zrýchľovať so zrýchlením a. Čo bude cítiť prvý vagón? Lokomotíva ho ťahá silou 8 ma (presne takáto sila je potrebná, aby začalo niečo s hmotnosťou 8 m zrýchľovať so zrýchlením a). Zároveň tento vagón musí ťahať ďalších 7 vagónov, teda na ne musí pôsobiť silou 7 ma. Z jednej strany teda vagón ťahá sila 8ma, z druhej 7ma. Podobnou úvahou zistíme, že na druhý vagón pôsobí z jednej strany sila 7ma a z druhej 6ma, a tak ďalej. Na posledný vagón už pôsobí len sila veľkosti ma z jednej strany. Zisťujeme teda, že každý vagón bude „rozťahovaný“ inak. Tiež si môžeme všimnúť, že sily pôsobiace na vagón z jednej a druhej strany lineárne klesajú s poradím vagónu.

S trochou snahy si valček vieme predstaviť ako vlak, ktorý má veľmi veľa (označme si tento počet N) vagónov v tvare tenučkých krúžkov. Na každý krúžok bude pôsobiť nejaká sila F doľava a sila $F - \frac{m}{N}a$ doprava. Ak je N dostatočne veľké (teda ak sú krúžky veľmi tenké), na obe strany krúžku pôsobia približne rovnaké sily a napätie v mieste, kde sa nachádza krúžok bude $\frac{F}{S}$. Podobne ako pri vlaku, aj vo valčeku sily pôsobiace na jednotlivé krúžky klesajú lineárne s poradím krúžku – teda s polohou krúžku. Vieme, že krúžok najviac vľavo je ťahaný silou F_l a krúžok najviac vpravo je ťahaný silou F_p. Závislosť napätia vo valčeku od polohy o preto bude vyzerať takto (napätie je označené písmenkom σ):



Toto je vyjadrené rovnicou $$\frac{F}{S} = \frac{l-x}{lS}F_l + \frac{x}{lS}F_p.$$

Tento seminár podporujú
KTFDF FMFI UK,
JSMF,
iuventa