FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 2. série
B – kategória (mladší)
23. ročník
zimný semester
školský rok 2007/2008

www. **.sk**

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

B-2.1 Globálne otepľovanie (opravoval Robo K., vzorák Robo K. & Tomáš)

Aký vplyv má rozpúšťanie ľadovcov na výšku svetového oceánu? Zamyslite sa nad vplyvom Arktídy a Antarktídy. (Prezradíme, že napriek tomu, že celá Arktída je vlastne plávajúci ľadovec, je tento ľad, minimálne sčasti, sladkovodný.)

Ahojte! Tento príklad si nekládol za cieľ nejaké kvantitatívne výpočty vplyvu globálneho otepľovania na hladinu morí, skôr uvedomiť si zopár fyzikálnych zákonitostí.

Skúsme sa pre začiatok pozrieť na kocku ľadu plávajúcu v pohári, ktorý je po okraj naplnený vodou. Čo sa stane s hladinou po roztopení ľadu? Ľad váži presne toľko, koľko by vážila voda, ktorá by zaplnila presne taký objem, ako má časť ľadovej kocky, ktorá je pod vodou. Toto nie je nič iné ako Archimedov zákon. Nakoľko pri topení sa nám zmenšuje objem, avšak zachováva hmotnosť rozpúšťaného ľadu, vieme hneď povedať, že po roztopení ľadu sa s hladinou nestane nič.

Situácia sa však zmení, pokiaľ by sme uvažovali sladkovodný ľad a morskú vodu. Táto má väčšiu hustotu (kvôli soli) a z kocky bude preto vytŕčať viac, resp. ponorená časť bude menšia. Čo sa nám ale nezmenilo je objem vody, ktorý dostaneme z kocky po jej roztopení. Preto hladina musí stúpnuť.

Napokon dobré je si uvedomiť ešte jeden fakt, kvôli ktorému naše riešenie nie je úplné (aj keď od Vás sme toto zamyslenie nevyžadovali). Jedná sa o to, že zmiešaním dvoch (rôznych) kvapalín, každej o objeme (napríklad) 1 m^3 nemusíme nutne získať výslednú kvapalinu s objemom 2 m^3 a to napriek tomu, že kvapaliny nebudú chemicky reagovať. Prečo je to tak? Pretože usporiadanie molekúl zmiešanej kvapaliny môže byť iné, tesnejšie, ako pôvodných kvapalín, inak povedané, molekuly budú mať menej životného priestoru. Dá sa však očakávať, že keďže v našom prípade sú obe kvapaliny skoro 100% vody, tento efekt nebude príliš silný.

Dúfam že ste sa dačo podučili a keď najbližšie budete svojim konzumným spôsobom života prispievať ku globálnemu otepľovaniu, kúpte si plutvy.

B-2.2 Čajový René (opravoval Jano, vzorák Kubus)

odstavil svoj litrový čaj, ktorý akurát zovrel. S výrazom vedca doň strčil teplomer. Za minútu teplota vody klesla o stupeň. Predpokladajte, že rýchlosť chladnutia je priamo úmerná rozdielu teplôt medzi vodou a miestnosťou (20 °C).

a) Ako dlho potrvá ochladnutie z 50 °C na 49 °C?
b) Ako dlho potrvá variču s výkonom 2kW, kým ohreje vodu z 49 °C na 50 °C?

Tento príklad bol vlastne celkom jednoduchý, všetko potrebné vieme už zo základnej školy alebo nám bolo povedané v zadaní. Napríklad nám bolo povedané to, že rýchlosť chladnutia (či už pokles teploty za čas alebo stratový výkon, teda množstvo strateného tepla za čas) je priamo úmerná rozdielu teplôt medzi vodou a miestnosťou. Toto je celkom intuitívne – čím teplejší čaj, tým viac tepla stráca do okolia.

a) Ak má práve zovretý čaj teplotu približne 100°C, jeho teplotný rozdiel vzhľadom na 20°C okolie bude 80°C, zatiaľ čo 50°C čaj bude mať len 30°C rozdiel. Takže 50°C čaj má 3/8-krát taký teplotný rozdiel ako 100°C čaj a z našej priamej úmery bude aj mať 3/8-krát takú rýchlosť chladnutia. Čo znamená, že rovnaké množstvo tepla stratí za 8/3-krát taký čas („rýchlosť chladnutia = teplo / čas“, teda „čas = teplo / rýchlosť chladnutia“). Ochladením o stupeň stratí liter vody rovnako veľa tepla, či má na začiatku 100 a či 50 stupňov, takže z 50°C na 49°C sa čaj ochladí za 8/3 minúty čiže 160 sekúnd.[1]

V poslednej vete tejto úvahy sme mlčky predpokladali, že stratový výkon sa počas chladnutia o jeden stupeň nemení. To samozrejme nie je pravda, pretože sa mení teplota čaju – a teda aj teplotný rozdiel voči okoliu, od ktorého stratový výkon závisí. Ale keďže tento sa počas nášho jednostupňového chladnutia zmení len nanajvýš na 29/30-tín (resp. 79/80-tin) pôvodného, rovnako málo sa zmení aj stratový výkon a tieto zmeny môžeme zanedbať. Tiež sme predpokladali, že merná tepelná kapacita vody sa v závislosti od teploty nemení, čo nie je úplne pravda.

b) Ak teraz začneme tento 49-stupňový čaj znova zohrievať výkonom $P^+ = 2000$ W, nič to nezmení na tom, že je stále o 29 (až 30, keď ho zohrejeme na 50°C) stupňov teplejší ako okolie a stále stráca teplo (takmer) rovnakým stratovým výkonom P^- ako pri chladnutí v časti a). Tento výkon zrátame jednoducho ako stratené teplo za čas, teda

$$P^- = \Delta Q / t = mc\Delta T / t \approx 1\ \text{kg} \cdot 4{,}2\ \text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \cdot 1\ \text{K} / 160\ \text{s} \approx 26\ \text{J/s} = 26\ \text{W},$$

kde ΔT je veľkosť zmeny teploty vody v časti a), t je čas, ktorý táto zmena teploty trvala, a c je merná tepelná kapacita vody.

Takže celkový výkon, ktorým bude voda zohrievaná, bude

$$P = P^+ - P^- \approx 2000\ \text{W} - 26\ \text{W} \approx 1974\ \text{W}.$$

Vidíme, že v tomto prípade môžeme straty takmer zanedbať. Kto tak však urobil bez mihnutia oka a bez akéhokoľvek zdôvodnenia, bodovej strate sa nevyhol! Tak či tak, celkový čas potrebný na zohriatie vody o jeden stupeň výkonom P je

$$t = \Delta Q / P = mc\Delta T / P \approx 1\ \text{kg} \cdot 4{,}2\ \text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \cdot 1\ \text{K} / 2\ \text{kW} \approx 2{,}1\ \text{J/W} = 2{,}1\ \text{s}.$$

B-2.3 Plochá Zem (opravoval Jakub)

Kedysi dávno, keď ešte všetci verili, že Zem je plochá doska, istý mecenáš niekde v severnom Taliansku si zmyslel, že by rád vedel, ako ďaleko je Slnko. Tak si zavolal svojho dvorného fyzika Frantu Kusého Sedmohlavého, dal mu prostriedky a 5 rokov času. Franta si zaobstaral asistenta Filipa Osmouchého a tomu prikázal ísť ďaleko (známu vzdialenosť) na juh Talianska, tam si zriadiť pozorovaciu stanicu a jeden celý rok – deň, čo deň – robiť pozorovania Slnka. Konkrétne mu dal merať výšku Slnka na poludnie nad horizontom a uhlový polomer Slnka (cez začadené sklíčko; NESKÚŠAŤ!). Potom sa mal vrátiť späť. Franta pritom celý čas, doma v severnom Taliansku, robil tie isté pozorovania ako Filipus kdesi ďaleko na juhu. Mal šťastie, lebo F.O. bol spoľahlivý asistent, ktorý nešiel do najbližšej dediny za kultúrou, ale naozaj vykonal, čo mu bolo poručené – rok cestoval na juh, rok meral, a rok mu trvala cesta naspäť. Keď sa Filipus vrátil, tak sa Franta dal do vyhodnocovania údajov. Pol roka vyhodnocoval, pol roka rátal chyby určenia, pol roka sa čudoval a zvyšný polrok sa odvažoval, až mu čas vypršal a musel ísť za svojím mecenášom. Aké novinky mu povedal?

Ako asi vyzerajú namerané údaje? No, odhliadnuc od dní, keď sa niektorej z pozorovacích staníc nepodarilo zaznamenať požadované údaje, tak merania zrejme vykazujú nasledovné črty:

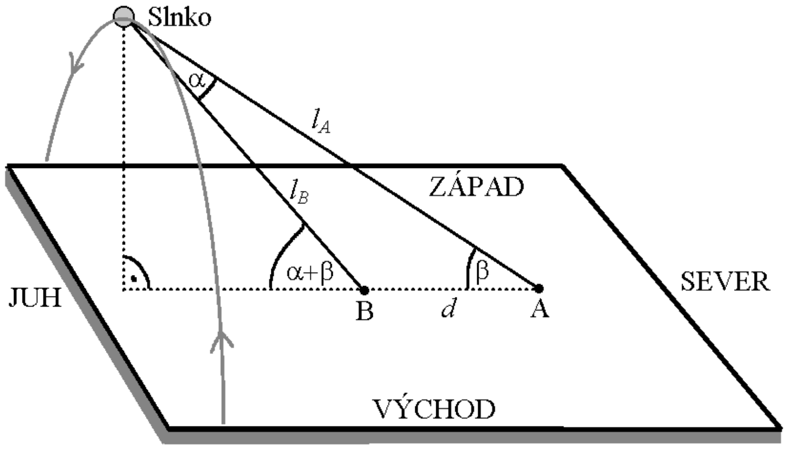
1. Tvar slnka je kruhový[2], s konštantným uhlovým polomerom[3] $\gamma \approx 16'$.
2. Výška slnka na poludnie pozorovaná z miesta medzi obratníkom Raka a severnou polárnou kružnicou (kam Taliansko spadá) sa v rámci roka pohybuje medzi $90° - \theta - \varphi$ (pri zimnom slnovrate) a $90° - \theta + \varphi$ (pri letnom slnovrate), kde θ je zemepisná šírka pozorovateľne a $\varphi \approx 23{,}5°$ je odklon zemskej osi od normály (kolmice) ekliptiky (rovina obehu Zeme okolo Slnka).
3. Rozdiel v pozorovanej výške slnka nad horizontom na poludnie v ľubovoľnom dni je pre stanice A a B konštantný (označím ho α) a **my** vieme, že to je rozdiel zemepisných šírok pozorovacích staníc, pre severné ($\theta_A = 45°$) a južné Taliansko ($\theta_B = 40°$) rádovo $\alpha \approx 5°$.

[1] Všimnite si, že celé sme to zrátali bez jediného označenia si niečoho písmenkom. Samozrejme, mohli sme si všetky veličiny pooznačovať, zistiť konštantu úmernosti k, atď.

[2] okrem pozorovaní slnka nízko nad horizontom kvôli ohybu svetla pri prechode atmosférou

[3] on sa síce mení počas roka (o približne 3 %), každopádne rozdiel uhlového polomeru Slnka v danom čase pri meraní z rôznych miest na Zemi neprekročí 0,005 %.

Samozrejme, stredoveký vedec, tvárou v tvár nameraným hodnotám, so **svojou** predstavou o svete si nakreslil obrázok pre nejaký konkrétny deň, dosadil údaje a vyhodnotil. Pre každý deň v roku. Niečo podobné urobíme aj my. Treba si uvedomiť, že ak F.O. išiel od F.K.S. iba na juh, tak zrejme poludnie budú pozorovať obaja v rovnakom čase. Túto dedukciu mohol urobiť aj vedec v dávnoveku, lebo slnko vždy „ide po oblohe“ z východu na západ. Preto polohu slnka na poludnie môžeme určiť ako priesečník polpriamok, na ktorých pozorovatelia A a B vidia slnko na svoje poludnie. Tieto polpriamky sú určené práve výškou slnka nad horizontom na poludnie v bodoch A (označím β) a B (podľa bodu 3 to je $\beta + \alpha$). Potom ale uhol A-Slnko-B má pre každé poludnie veľkosť α.



Vyzbrojený touto vedomosťou vieme ľahko spočítať pomocou sínusovej vety vzdialenosti Slnka od staníc A, resp. B:

$$l_A = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} d\,, \quad \text{resp.} \quad l_B = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} d$$

Ďalej spracujeme informáciu o uhlovom polomere γ. Preň platí $tg\,\gamma = r/l \approx 0{,}00465$, kde r je polomer Slnka (o ktorom sa nazdávame, že je guľové, keďže z rôznych pozorovateľní sa javí vždy kruhové) a l je vzdialenosť pozorovateľa od Slnka.

Urobme si tabuľku výsledkov pre letný a zimný slnovrat:

	β	l_A/d	l_B/d	r_A/d	r_B/d
leto	68,5°	11,0	10,7	0,051	0,050
zima	21,5°	5,1	4,2	0,024	0,020

kde r_A (r_B) je polomer Slnka podľa pozorovateľa A (B), čiže $r_A = 0{,}00465\, l_A$ ($r_B = 0{,}00465\, l_B$)

Vidíme istú nezrovnalosť v tom, že skutočný (nie zdanlivý) polomer Slnka počas roka **pulzuje** a podľa pozorovateľa A až **o 16% inak** ako podľa B. To sa už nedá pripísať na vrub chybe merania a ak uznáme, že ten polomer musí **objektívne** nejaký byť, tak to je **spor** s teóriou plochej Zeme.

Aké závery z tohto môžeme vzniesť? Ak sa máme pridŕžať stredovekého myslenia, tak prakticky hocijaké. Napríklad, že Slnko je Božský objekt, ktorý je objektívne nepozorovateľný a obidvaja pozorovatelia nepozorovali Slnko, ale jeho Ideu, ktorá nepodlieha objektívnemu realizmu ale subjektívnemu gnosticizmu[4].

Ak však ostaneme nohami pevne na zemi, tak z toho vyvodíme zrejme to, že Zem **nemôže byť plochá**, čo automaticky neznamená, že je guľatá! Zhodný uhlový polomer slnka pozorovaný v A aj B v ľubovoľný deň nám indikuje, že trojuholník A-Slnko-B musí byť poriadne dlhý, teda vzdialenosť Slnka od Zeme je oveľa väčšia ako d. Ak by sme kvantifikovali chybu merania uhlového polomeru, tak by sme mohli určiť aj jej spodný odhad.

Záver: Františk oznámil svojmu peňazodarcovi, že Slnko má zrejme tvar gule. To sa mu ešte prepieklo. Ďalej, že Zem, hoc' sa to človeku veľmi nezdá, že je skrátka krivá ako pirátova drevená noha, ba možno ešte i o čosi viac. Vlna znepokojenia prebehla tvárou jeho chlebodarcu. Franta pokračoval, že síce nevie ako ďaleko je Slnko, ale vie, ako blízko nie je. To už bolo priveľa! Franta neprišiel ani len s odpoveďou na zadanú otázku! Bol pohodený hladnej inkvizícii, ktorá ho nenásytne zjedla...

[4] Nemám páru čo som to akurát napísal.

F.K.S. vstal z mŕtvych pred 23 rokmi.

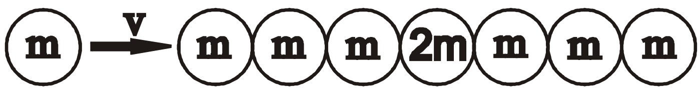
Poznámka: Ako merať šikovne uhlový polomer? Napr. pomocou da Vinciho vynálezu zvaného *camera obscura*, čo je veľká škatuľa s malou dierkou (má funkciu šošovky), v ktorej je zavretý človek a ten vidí prevrátenú projekciu vonkajšieho sveta na tienidle; meraním polomeru obrazu a vzdialenosti tienidla od diery získame priamo $tg\,\gamma$. Výška slnka nad horizontom sa zase meria podľa dĺžky tieňa palice zapichnutej zvislo do Zeme.

B-2.4 Čierna ovca (opravár a vzorkár Bea☺)

Majme v rade tesne za sebou postavených n rovnakých gulí. Stredná má hmotnosť 2m, pričom všetky ostatné majú hmotnosť m. Do takéhoto radu vpálime ďalšiu guľu (pohybuje sa po priamke na ktorej leží celý rad gúľ) – zase s hmotnosťou m. Opíšte, ako sa bude systém správať, ak všetky zrážky sú dokonale pružné. Pod kvalitatívnym opisom rozumieme, že poviete veci ako: Táto guľa pôjde doprava, táto doľava, táto zase doprava ale o čosi pomalšie ako prvá, atď.

Ahojte bobáci☺. Ovečka bola vcelku ukážkový príklad zrážky, ale problém sa ťažko analyzoval. Aspoň pre prvákov to mohol byť problém zahrnúť každú možnosť. Čo bolo treba?

Majme rad guličiek 1 až n, pričom v strede je gulička s hmotnosťou $2m$. Rad tvorí priamku, neuvažujeme žiadne odchýlenia od tohto smeru. Sú postavené tesne za sebou – dotýkajú sa.



Pri dokonale pružných zrážkach platí zákon zachovania hybnosti a energie. Na začiatok si porátajme, čo sa stane, keď sa centrálne (=čelne) zrazia dve rôzne gule. Zapíšeme zákony zachovania:

$$v_1 m_1 + v_2 m_2 = u_1 m_1 + u_2 m_2$$
$$v_1^2 m_1 + v_2^2 m_2 = u_1^2 m_1 + u_2^2 m \qquad (1)$$

Kde v označuje rýchlosť pred a u rýchlosť po zrážke, indexy označujú prvé a druhé teleso.

Vyjadrime si z nich u_1 a u_2:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$
$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \qquad (2)$$

Teraz vpáľme do nich guličkou číslo nula a hľa, čo sa stane po zrážke podľa vzorcov (2):

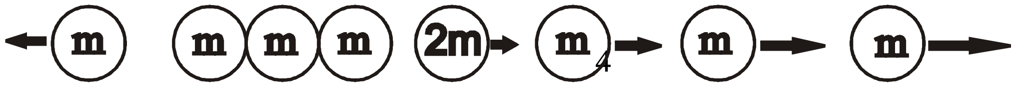
1.) V prvom rade nastáva zrážka gule vpaľovanej do gule, ktorá je v rade prvá. Rozdiel hmotností $m_1 - m_2$ aj rýchlosť v_2 sú nulové. Preto rýchlosť u_1 je nulová tiež. Ďalej rýchlosť $u_2 = v_1$. Takže narážajúca guľa zastaví a jej rýchlosť "preberie" prvá guľa v rade, ktorá naráža do druhej. Čo sa stane? Druhá guľa zase "preberie" jej rýchlosť. Takto to ide, kým uvažujeme zrážky medzi guľami s rovnakou hmotnosťou.

2.) Zrážka gule s hmotnosťou m s guľou hmotnosti $2m$:

Pre nové rýchlosti dostaneme veľkosti: $$u_1 = \frac{-v_1}{3} \qquad u_2 = \frac{2v_1}{3} \qquad (3)$$

Čo znamená, že malá guľa vrazí do veľkej a odrazí sa od nej späť jednou tretinou pôvodnej rýchlosti. Narazí do najbližšej gule a dejú sa veci z bodu 1.) až kým sa nedostaneme ku krajnej guli a táto bude od skupinky odpálená až do Tramtárie rýchlosťou $-v_1/3$. Pohyb veľkej gule bude mať smer pôvodnej rýchlosti v_1 a 2/3 jej hodnoty.

3.) Zrážka gule s hmotnosťou $2m$ s guľou hmotnosti m:



Označme si ešte novšie rýchlosti, čiže po tejto zrážke, písmenkom *w*. Zase použijeme vzorec (2), len samozrejme nahradíme *w* namiesto *u* a *u* namiesto *v*. Potom dostávame:

$$w_1 = \frac{u}{3} = \frac{2v_1}{9} \qquad w_2 = \frac{4u}{3} = \frac{8v_1}{9} \tag{4}$$

Čo znamená, že guľa rýchlosti w_2 zase narazí do gule s rovnakou hmotnosťou akú má ona sama a potom zastane. Rýchlosť w_2 je prenášaná z gule na guľu (podľa 1.) až kým n-tá guľa neodfičí rýchlosťou $8v_1/9$ do protiľahlej Tramtárie II. Ale bacha! Veľká guľa *is still alive*! Znova narazí do susedy a dá jej 4/3 svojej rýchlosti a sama si nechá len jej 1/3 (viď.(4)). Malá guľa sa nenechá zahanbiť a znova sa buchne aj ona, ale znova zastane. Svoju rýchlosť odovzdá ďalej až kým neodletí krajná guľa tou istou rýchlosťou. Ak ide o x-tú zrážku, tak rýchlosti veľkej a (poslednej) malej gule sú:

$$v_v = \frac{2v_1}{3}\cdot 3^{-x} \qquad v_m = \frac{2v_1}{3}\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x \tag{5}$$

Déjà vu? Áno. A toto sa opakuje až kým sa malé gule, do ktorých veľká naráža, neminú. Aby ste však neboli pomýlení, toto sa stane veľmi veľmi rýchlo, prakticky v jednom okamihu. Najkrajnejšia guľa nadobudne najvyššiu rýchlosť a veľká guľa najnižšiu. Nestane sa, aby sa navzájom dobiehali a znova zrážali. Odporúčam si tento príklad vyskúšať alternatívne – keďže snehové gule nie sú pružné, ich pružnosť zabezpečíme tým, že ich rozmiestnime medzi *n* ľudí. Nultý človek začne hádzať a koho trafí, ten musí guľu hodiť tak, aby neporušil zákony ;-)

B-2.5 Prepravník (opravoval Škrek)

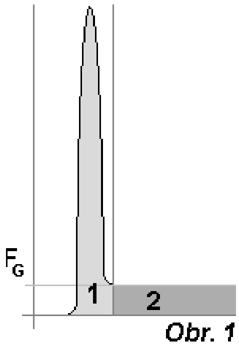
V Prievidzi máme továreň, ktorá má bežiaci pás, ak sa nemýlim, podľa jazykovedcov zvaný aj prepravník. Každú sekundu sa na prepravník zhodí z výšky asi 10cm konzerva plná jablkovej polievky o hmotnosti 1kg, tak, že dopadne pekne na podstavu. Ďalej sa nám podarilo odmerať, že po tom, ako sa konzervy položia na prepravník, sú dve susedné konzervy od seba vzdialené 20cm.

a) Vypočítajte, akou silou je potrebné pás ťahať. Trenie medzi pásom a kolieskami po ktorých sa pohybuje môžete zanedbať.

b) Koľko energie sa spotrebuje na rozbehnutie jednej konzervy po páde na rýchlosť prepravníka?

Keď si Izák Mlok večer líhal spať, isto nemal tušenia, že si líha v práci na výrobnú linku. V poslednom čase bol trochu nesvoj. Ráno ho prebudil tvrdý náraz do lebky, ktorý mu nechal na čele vytetované logo Spojených Konzervární a.s. Izák sa posadil na bežiacom páse, pozrel na nekonečné rady konzerv s jablkovým pyré pred sebou a druhý krát sa tresol do čela. „Mám to!“ zvolal a bežal domov, aby napísal tento vzorák.

Tak pozrime sa na našu konzervu ako si tak pokojne svišti vzduchom. Potom dopadne na pás a je z toho celá konzervovaná. V čase *t* na pás tlačí silou *F(t)*, kde *F(t)* má asi takýto priebeh, viď obr.1. Fáza označená číslom jedna je taká, že konzerva tvrdo dopadne na pás (veľká zmena hybnosti za čas) až kým sa neustáli, čo zodpovedá fáze číslo 2, kde je konzerva na páse položená (pôsobí konštantnou silou svojej váhy). Vo vertikálnom smere pôsobí pás rovnako veľkou silou opačného smeru. Ďalej, kým konzerva na páse nie je ešte ustálená (t.j. prešmykuje), pás ešte pôsobí trecou silou v smere svojho pohybu, ktorá je rovná $F_t=F(t)*f$ kde *f* je koeficient trenia konzervy a pásu. Kým konzerva prešmykuje, platí, že **graf trecej sily vyzerá presne ako graf na obr.1, akurát je prenásobený** *f*. Tým pádom aj plocha pod grafom[5] trecej sily je *f* krát plocha pod grafom sily prítlačnej a teda



Obr. 1

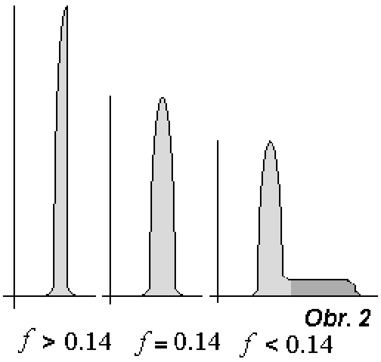
[5] Vezmeme nejaké dva časy a zrátame plochu medzi osou x a grafom funkcie medzi dvoma zvolenými časmi. Toto spravíme pre oba grafy a dostávame rovnaké číslo.

impulz hybnosti[6], ktorý konzerva získa v zvislom smere je *f* násobok impulzu hybnosti, ktorý získa v smere vodorovnom!

Aký impulz vo zvislom smere absorbuje pás čisto kvôli pádu konzervy? Zo vzorcov pre voľný pád vieme, že jej hybnosť tesne pred dopadom je $p = m * \sqrt{2hg}$. Plocha pod kopcovitou časťou grafu *F(t)* je presne zmena vertikálnej hybnosti a to je teda presne $m * \sqrt{2hg}$. Konzerva by teda mala získať vodorovný impulz hybnosti o veľkosti $fm * \sqrt{2hg}$, čo ju urýchli na rýchlosť $f * \sqrt{2hg}$.

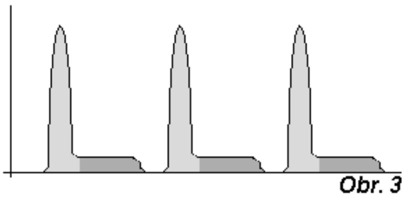
Samozrejme, konzerva je schopná urýchliť sa maximálne na rýchlosť v_p. Potom sa rýchlosti vyrovnajú a trenie prestáva pôsobiť. A teda všetko závisí od *f*. Ak impulz od kopčeka presne stačí na rozbehnutie konzervy na rýchlosť pásu, potom

$$f\sqrt{2hg} = v_p \Rightarrow f = \frac{v_p}{\sqrt{2hg}} = \frac{s/t}{\sqrt{2hg}} \cong 0.141,$$



Obr. 2

kde *s* je konečná vzdialenosť medzi konzervami a *t* časový interval medzi vypadnutiami dvoch konzerv. Ak *f* je väčšie ako táto hodnota, stačí iba časť kopčeka na rozbehnutie do potrebnej rýchlosti, naopak, ak je menšie, tak konzerva absorbuje celý kopček a ešte aj nejaký impulz spôsobený tiažovou silou[7]. Graf trecej sily pôsobiacej na jednu konzervu je zobrazený na obr.2 pre všetky tri prípady. No a celková sila pôsobiaca na pás bude súčet takýchto grafov časovo posunutých o jednu sekundu, napríklad ako na obrázku 3, v prípade, že by sa grafy prekrývali[8], tak sa iba jednoducho sčítajú. Toť odpoveď na prvú otázku.



Obr. 3

Druhá otázka by už po tomto mala byť malina. Predstavme si sami seba ako trpaslíka, ktorý ten pás ťahá. Akú energiu minie? No sila ktorou pôsobí krát dráha ktorú trpaslík pri tom prejde. No ale tá sila nie je konštantná! Tak sa na to pozrieme v takom krátkom okamihu dĺžky Δt, kde sa tá sila skoro nemení. Trpaslík vtedy odovzdá pásu maličkú energiu rovnú $\Delta E = F(t)\Delta s$, pričom Δs je dráha ktorú trpaslík prejde za krátky čas Δt, $\Delta s = v_p \Delta t$. Teda $\Delta E = F(t) v_p \Delta t$. $F(t)\Delta t$ je impulz sily (hybnosť) ktorú odovzdá pásu za kratučký okamih. No a aký celkový impulz musí odovzdať? No predsa mv_p. A teda celková energia spotrebovaná je $E = mv_p^2$. Čiže polovica energie sa spotrebuje na kinetickú energiu konzervy a polovica na straty, napríklad ohrev (ak by sa nejednalo o jablkové pyré, ale napríklad provensálske ragú, bolo by to veľmi praktické).

---

[6] Čo to je impulz hybnosti? Nič zložité, je to zmena hybnosti telesa medzi (nejakými) dvoma časmi. Platia preň jednoduché vzorce – konštantná sila *F* za čas *t* dodá telesu impulz hybnosti *F.t*, pre premenlivú silu je impulz hybnosti rovný ploche pod grafom tejto sily.

[7] Inými slovami, konzerva dopadne, pritom podskočí smerom dopredu, poskočenie je však slabé, pás ide ale stále rýchlejšie a preto ešte nejaký čas bude konzerva urýchľovaná trecou silou, zodpovedajúcou jej tiaži.

[8] O tento Tomáškov novotvar nemám to srdce vás pripraviť.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 2. série
A – kategória (staršia)
23. ročník
zimný semester
školský rok 2007/2008

www.fks.sk

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

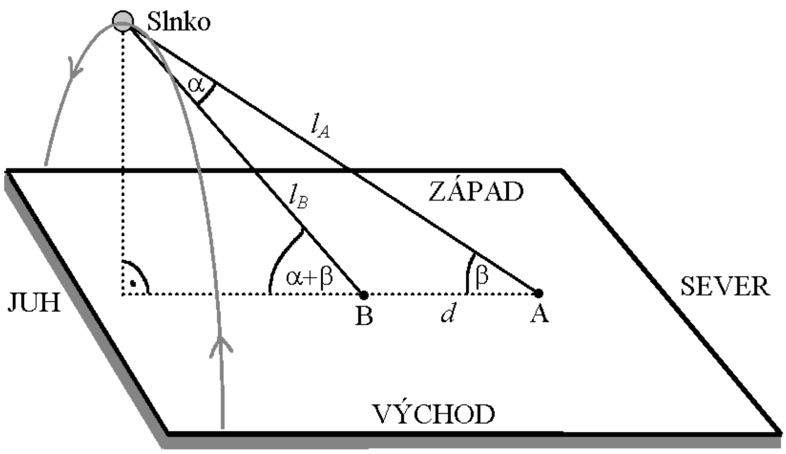
A-2.1 Plochá Zem (opravoval Jakub)

Kedysi dávno, keď ešte všetci verili, že Zem je plochá doska, istý mecenáš niekde v severnom Taliansku si zmyslel, že by rád vedel, ako ďaleko je Slnko. Tak si zavolal svojho dvorného fyzika Frantu Kusého Sedmohlavého, dal mu prostriedky a 5 rokov času. Franta si zaobstaral asistenta Filipa Osmouchého a tomu prikázal ísť ďaleko (známu vzdialenosť) na juh Talianska, tam si zriadiť pozorovaciu stanicu a jeden celý rok – deň, čo deň – robiť pozorovania Slnka. Konkrétne mu dal merať výšku Slnka na poludnie nad horizontom a uhlový polomer Slnka (cez začadené sklíčko; NESKÚŠAŤ!). Potom sa mal vrátiť späť. Franta pritom celý čas, doma v severnom Taliansku, robil tie isté pozorovania ako Filipus kdesi ďaleko na juhu. Mal šťastie, lebo F.O. bol spoľahlivý asistent, ktorý nešiel do najbližšej dediny za kultúrou, ale naozaj vykonal, čo mu bolo poručené – rok cestoval na juh, rok meral, a rok mu trvala cesta naspäť. Keď sa Filipus vrátil, tak sa Franta dal do vyhodnocovania údajov. Pol roka vyhodnocoval, pol roka rátal chyby určenia, pol roka sa čudoval a zvyšný polrok sa odvažoval, až mu čas vypršal a musel ísť za svojím mecenášom. Aké novinky mu povedal?

Ako asi vyzerajú namerané údaje? No, odhliadnuc od dní, keď sa niektorej z pozorovacích staníc nepodarilo zaznamenať požadované údaje, tak merania zrejme vykazujú nasledovné črty:

1. Tvar slnka je kruhový[1], s konštantným uhlovým polomerom[2] $\gamma \approx 16'$.
2. Výška slnka na poludnie pozorovaná z miesta medzi obratníkom Raka a severnou polárnou kružnicou (kam Taliansko spadá) sa v rámci roka pohybuje medzi $90° - \theta - \varphi$ (pri zimnom slnovrate) a $90° - \theta + \varphi$ (pri letnom slnovrate), kde θ je zemepisná šírka pozorovateľne a $\varphi \approx 23{,}5°$ je odklon zemskej osi od normály (kolmice) ekliptiky (rovina obehu Zeme okolo Slnka).
3. Rozdiel v pozorovanej výške slnka nad horizontom na poludnie v ľubovoľnom dni je pre stanice A a B konštantný (označím ho α) a **my** vieme, že to je rozdiel zemepisných šírok pozorovacích staníc, pre severné ($\theta_A = 45°$) a južné Taliansko ($\theta_B = 40°$) rádovo $\alpha \approx 5°$.

Samozrejme, stredoveký vedec, tvárou v tvár nameraným hodnotám, so **svojou** predstavou o svete si nakreslil obrázok pre nejaký konkrétny deň, dosadil údaje a vyhodnotil. Pre každý deň v roku. Niečo podobné urobíme aj my. Treba si uvedomiť, že ak F.O. išiel od F.K.S. iba na juh, tak zrejme poludnie budú pozorovať obaja v rovnakom čase. Túto dedukciu mohol urobiť aj vedec v dávnoveku, lebo slnko vždy „ide po oblohe“ z východu na západ. Preto polohu slnka na poludnie môžeme určiť ako priesečník



---

[1] okrem pozorovaní slnka nízko nad horizontom kvôli ohybu svetla pri prechode atmosférou

[2] on sa síce mení počas roka (o približne 3 %), každopádne rozdiel uhlového polomeru Slnka v danom čase pri meraní z rôznych miest na Zemi neprekročí 0,005 %.

polpriamok, na ktorých pozorovatelia A a B vidia slnko na svoje poludnie. Tieto polpriamky sú určené práve výškou slnka nad horizontom na poludnie v bodoch A (označím β) a B (podľa bodu 3 to je $\beta + \alpha$). Potom ale uhol A-Slnko-B má pre každé poludnie veľkosť α.

Vyzbrojený touto vedomosťou vieme ľahko spočítať pomocou sínusovej vety vzdialenosti Slnka od staníc A resp. B:

$$l_A = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} d \,, \quad \text{resp.} \quad l_B = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} d$$

Ďalej spracujeme informáciu o uhlovom polomere γ. Preň platí $tg\, \gamma = r/l \approx 0{,}00465$, kde r je polomer Slnka (o ktorom sa nazdávame, že je guľové, keďže z rôznych pozorovateľní sa javí vždy kruhové) a l je vzdialenosť pozorovateľa od Slnka.

Urobme si tabuľku výsledkov pre letný a zimný slnovrat:

	β	l_A/d	l_B/d	r_A/d	r_B/d
leto	68,5°	11,0	10,7	0,051	0,050
zima	21,5°	5,1	4,2	0,024	0,020

kde r_A (r_B) je polomer Slnka podľa pozorovateľa A (B), čiže $r_A = 0{,}00465\, l_A$ ($r_B = 0{,}00465\, l_B$)

Vidíme istú nezrovnalosť v tom, že skutočný (nie zdanlivý) polomer Slnka počas roka **pulzuje** a podľa pozorovateľa A až **o 16% inak** ako podľa B. To sa už nedá pripísať na vrub chybe merania a ak uznáme, že ten polomer musí **objektívne** nejaký byť, tak to je **spor** s teóriou plochej Zeme.

Aké závery z tohto môžeme vzniesť? Ak sa máme pridŕžať stredovekého myslenia, tak prakticky hocijaké. Napríklad, že Slnko je Božský objekt, ktorý je objektívne nepozorovateľný a obidvaja pozorovatelia nepozorovali Slnko ale jeho Ideu, ktorá nepodlieha objektívnemu realizmu ale subjektívnemu gnosticizmu[3].

Ak však ostaneme nohami pevne na zemi, tak z toho vyvodíme zrejme to, že Zem **nemôže byť plochá**, čo automaticky neznamená, že je guľatá! Zhodný uhlový polomer slnka pozorovaný v A aj B v ľubovoľný deň nám indikuje, že trojuholník A-Slnko-B musí byť poriadne dlhý, teda vzdialenosť Slnka od Zeme je oveľa väčšia ako d. Ak by sme kvantifikovali chybu merania uhlového polomeru, tak by sme mohli určiť aj jej spodný odhad.

Záver: Františk oznámil svojmu peňazodarcovi, že Slnko má zrejme tvar gule. To sa mu ešte prepieklo. Ďalej, že Zem, hoc' sa to človeku veľmi nezdá, že je skrátka krivá ako pirátova drevená noha ba možno ešte i o čosi viac. Vlna znepokojenia prebehla tvárou jeho chlebodarcu. Franta pokračoval, že síce nevie ako ďaleko je Slnko, ale vie, ako blízko nie je. To už bolo priveľa! Franta neprišiel ani len s odpoveďou na zadanú otázku! Bol pohodený hladnej inkvizícii, ktorá ho nenásytne zjedla...

F.K.S. vstal z mŕtvych pred 23 rokmi.

Poznámka: Ako merať šikovne uhlový polomer? Napr. pomocou da Vinciho vynálezu zvaného *camera obscura*, čo je veľká škatuľa s malou dierkou (má funkciu šošovky), v ktorej je zavretý človek a ten vidí prevrátenú projekciu vonkajšieho sveta na tienidle; meraním polomeru obrazu a vzdialenosti tienidla od diery získame priamo $tg\, \gamma$. Výška slnka nad horizontom sa zase meria podľa dĺžky tieňa palice zapichnutej zvislo do Zeme.

---

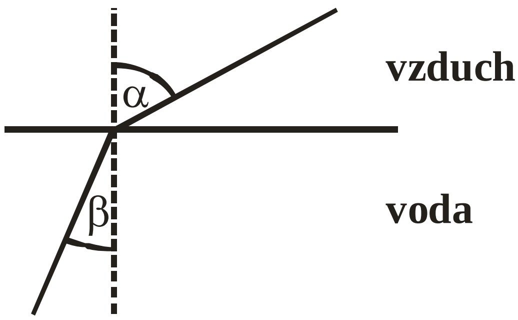
[3] Nemám páru čo som to akurát napísal.

A-2.2 Romantika (opravovala Marcelka)

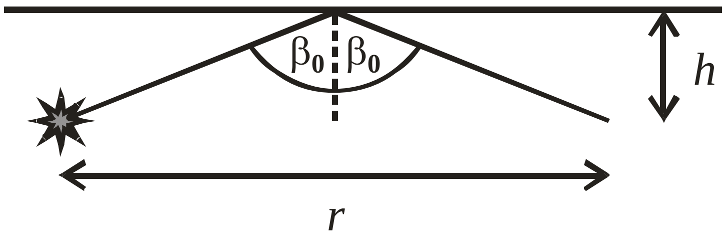
Na dno bazéna do jeho stredu dal René namontovať veľmi romanticky pôsobiace svetlo osvetľujúce hladinu bazéna a šíre nebe nad ňou. Keď sa však potom na svoje dielo pozrel z brehu, ostal prekvapený: na dne bazéna pozoroval tmavý kruh s polomerom r a okolo krásne osvetlené dno – a to napriek tomu, že žiarovka bola vmontovaná do dna a bola teda pod jeho úrovňou.

***a)** Vysvetlite, ako je to možné. **b)** Zrátajte polomer r. **c)** Pojednajte o romantickosti takéhoto úkazu.*

Pri riešení tohoto príkladu bolo podstatné zamyslieť sa, ako sa bude správať svetlo zo žiarovky po dopade na rozhranie vody a vzduchu. Určite všetci poznáte Snellov zákon, ktorý hovorí, že svetlo sa pri prechode z opticky hustejšieho prostredia do opticky redšieho prostredia láme „od kolmice". To znamená, že ak na vodnú hladinu dopadne svetlo pod nejakým uhlom β, malo by do vzduchu vycestovať pod uhlom väčším ako β (označme si ho α). (V skutočnosti neprejde do vzduchu všetko svetlo, ale nejaká malá časť sa od hladiny odrazí naspäť do vody.)



Čo sa stane, ak budeme uhol β postupne zväčšovať? Pravda je taká, že uhol α nadobudne hodnotu 90° pre nejaké β_0 (neskôr uvidíme, že $\beta_0 \approx 48^\circ$). Ak uhol β ešte zväčšíme, uhol α sa už nebude mať kam zväčšovať. Pre takéto uhly β do vzduchu neprejde žiadne svetlo, ale všetko sa odrazí naspäť do vody a osvetlí dno bazénu. Ako dôsledok bude teda dno bazénu pekne osvetlené až vo vzdialenosti r od svetla.



Ostáva to porátať. Snellov zákon pre lúč prechádzajúci z vody do vzduchu vyzerá takto: $\sin\alpha = n\sin\beta$ (n je index lomu vody a má veľkosť približne 4/3). Pre nejaké uhly β (konkrétne pre $\beta \geq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \approx 48^\circ$) však vychádza $\sin\alpha > 1$. To znamená, že neexistuje uhol, pod ktorým by svetlo malo vycestovať z vody, aby spĺňalo Snellov zákon. V takomto prípade sa všetko svetlo odrazí naspäť do vody a osvetlí dno bazénu. Ak má bazén hĺbku h, pre polomer r platí (z obrázku):

$$\tan\beta_0 = \tan\left(\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{r/2}{h}.$$

Preto

$$r = 2h\tan\left(\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2h\frac{\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = 2h\frac{\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} = 2h\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \approx 2{,}27h$$

Ako riešenie časti c) uvedieme jedno z najlepších polemík o romantike, ktoré ste poslali ☺

Pozerám sa do vody
Vidím čierny kruh
Začína mi z toho šibať
A dostal som pruh.

Čierny kruh tam stále straší
Aj keď ovce sú už na paši

Asi tam chce na stálo byť
Ja môžem tak na Mesiac vyť.

Nádherné je svetlo lampy
Ožaruje celú noc
Ponad celé šíre pampy
Mesiačiku na pomoc.

Je to také nádherné,
Až som z toho celý paf,
Potom prišiel veľký psisko
A do mojej nohy „raf".

Vravím: „Psíček zadívaj sa
Na tú krásu preveľkú,
Nesprávaj sa jak hovado
A nepozeraj na telku."

Pes mi na to vraví: „Hav,
Je to krajšie ako páv."
„No už vidím aký si ty,
Inteligent preveliký."

Vyšlo slnko spoza hory
A svit lampy je už chorý,
Každé ráno sa on stratí
A večer sa zase vráti.

Už sa teším na večer,
Keď sa lampa rozsvieti,
Čierny kruh tam bude stále,
No mňa to už netrápi.

Bazén bude krásne žiariť
Zase celú noc.
Budeže to prenádherné
A svietiť to bude zas.

(cteným autorom je Michal Hojčka)

A-2.3 Zoo (opravoval Bzdušo)

Dve opice visia na špagáte, ktorý je prehodený cez kladku, obe sú v rovnakej výške. Keďže jedna z opíc je dvakrát taká ťažká ako druhá, má ľahšia opica na svojej strane k lanu pevne pripevnené závažie presne o hmotnosti svojho tela, takže celá sústava je v rovnováhe. Náhle sa začne ľahšia opica šplhať nahor a to tak, aby sa vzhľadom na lano pohybovala istou konkrétnou rýchlosťou v. Ktorá z opíc sa dostane ku kladke skôr a o koľko to bude?

Úvodom by som poďakoval za nádherné obrázky opíc, ktorých mi došlo naozaj mnoho. Prehral som. Ale nie to som chcel...

Všimnime si, že ťažšia opica sa po celý čas lana drží ako kliešť a vôbec sa po ňom nepohybuje. Nebude teda hriech si ju nahradiť závažím s hmotnosťou $2m$. Hmotnosť ľahšej opice na druhej strane kladky bude teda m, rovnako aj hmotnosť závažia pod ňou. Pointa úlohy je v tom, že keď sa opica začne po lanku pohybovať, začne sa zároveň otáčať kladka a opica sa vzhľadom na kladku nepohybuje vôbec tak rýchlo, ako prepletá pahýľmi po lanku. Prečo je to tak? A ako to porátať? Vidím ti v očiach nedočkavosť, tak čítaj ďalej a všetko sa dozvieš☺.

Pri kladkách je dôležitý jeden parameter súvisiaci s otáčavým pohybom. Je to jej moment zotrvačnosti. V tomto príklade stačilo, ako vo väčšine podobných úloh, považovať jej hmotnosť, a teda aj jej moment zotrvačnosti, za zanedbateľný oproti parametrom opice[4]. Čo také vieme o nehmotnom telese? Napríklad, že výsledná sila, ktorá naň pôsobí, musí byť nulová. Ak by to tak nebolo, tak podľa Newtonovho zákona $a = F/m$, začalo by sa toto teleso pohybovať s nekonečným zrýchlením. Navyše dostávame, že nad všetky hranice by narastalo aj uhlové zrýchlenie telesa, pokiaľ by naň pôsobil nenulový moment sily, pretože platí $\varepsilon = M/I$. Ide tu snáď o nejakú fintu ako sa možno jednoducho urýchliť na relativistické rýchlosti? NIE. Uvedené situácie sú v rozpore s tým, čo bežne pozorujeme. V skutočnosti sa svet správa tak, že ak sa hmotnosť našej kladky limitne približuje k nule, tak sa rovnako k nule bude musieť približovať aj výsledný moment pôsobiacich síl. Kto neverí, môže sa k tomu dobúšiť aj cez rovnice[5].

Vráťme sa k našim opiciam. Kým sa nehýbu, niet pochýb o tom, že sústava je v rovnováhe. Koľko ťahá z jednej strany, toľko ťahá aj z druhej. Čo sa stane, keď sa ľahšia opica začne zrazu pohybovať? V prvom rade, žiadny pohyb v skutočnosti nezačína „zrazu“, ale musí sa k nemu dospieť zrýchleným pohybom v priebehu istého malého času. To musí platiť aj pre našu opicu. Nech je počas jej rozbiehania v lanku pnutie T, ktoré bude zrejme väčšie, ako keď opica len tak stojí. Mohli by sme uvažovať zjednodušený prípad, keď je táto sila konštantná. Ukážeme si však spôsob ako problém ofintiť pre hocaký priebeh sily. Treba si uvedomiť, že výsledný moment sily pôsobiaci na kladku je stále nulový. Preto ak na jednej strane kladky pôsobí sila T, musí taká istá sila pôsobiť aj v lanku na druhej strane. Toto musí platiť v každom čase, preto môžeme povedať, že časový priebeh (funkcia) pnutia v oboch častiach lanka bude rovnaký. Ako sme už spomínali, táto sila bude zrejme väčšia, ako keď sa opica nepohybuje, teda väčšia ako tiaž závažia[6] s hmotnosťou $2m$. To je dôvod, prečo sa toto závažie začne pohybovať nahor – výslednica síl naň pôsobiacich smeruje nahor!

Ak si zakreslíme silu ako funkciu času, obsah pod krivkou sa nazýva impulzom sily a je rovný získanej hybnosti. V našej situácii, kde máme dva rovnaké priebehy od času, musia byť rovnaké hybnosti sústav na oboch stranách kladky. Označme rýchlosť ťažšieho závažia ako u. Bude to zrejme zároveň rýchlosť lana, preto závažie pod opicou bude touto rýchlosťou klesať a rýchlosť opice bude $v - u$ nahor. Ak dáme hybnosti na oboch stranách kladky do rovnosti, dostávame:

$$2mu = m(v-u) - mu$$

Hľa, na hodnote m nezáleží. Tu už nie je ťažké sa dopracovať k výsledku $u = v/4$ pre rýchlosť ťažšieho závažia. Rýchlosť ľahkej opice vzhľadom na kladku sa tiež doráta jednoducho: $w = (v-u) = 3v/4$. A to už je výsledok. Vidíme, že ak sa ľahká opica začne po lanku pohybovať rýchlosťou v vzhľadom na lano, tak sa bude hýbať vzhľadom na kladku trikrát rýchlejšie ako ťažšie závažie = opica na druhej strane kladky. Skôr sa teda ku kladke dostane ľahšia opica.

---

[4] Tak to už vo fyzike chodí, že sa snažíme spraviť čo najjednoduchší model situácie. Moment zotrvačnosti kladky síce uvažovať môžeme, rovnice by sa však stali omnoho komplikovanejšie a číselný výsledok by utrpel len drobnú kozmetickú úpravu na n-tej platnej číslici.

[5] Jednoduchý príklad: Cez kladku je prehodené lano, na ktorého koncoch sú závažia s hmotnosťami m_1 a m_2. Aký je moment síl roztáčajúcich kladku? Po vyriešení sústavy rovníc sa dá dopracovať k výsledku

$$M = \frac{(m_1 - m_2)IRg}{(m_1 + m_2)R^2 + I}$$

Ak dosadíme nulový moment zotrvačnosti kladky I, dostaneme nulový na ňu pôsobiaci moment sily M. Všimnite si, že pokiaľ tento prakticky nulový výraz vydelíme prakticky nulovým I, dostaneme pozorovateľné uhlové zrýchlenie.

[6] Stále platí zaužívaná konvencia, že ťažšia opica je „len“ závažie.

Iné, veľmi krátke riešenie využíva fakt, že na sústavu bude celý čas pôsobiť nulový výsledný moment vonkajších síl. Keďže na začiatku bol moment hybnosti sústavy nulový, musí taký byť aj keď sa ľahšia opica začne pohybovať. Ak si ho vyjadríme, položíme rovný nule a predelíme polomerom kladky, dostaneme presne tú istú rovnicu ako v našej pôvodnej úvahe a, samozrejme, ten istý výsledok.

K vašim riešeniam by som podotkol dve veci. Mnohí ste sa vydali na cestu zákonov zachovania a používajúc ZZ momentu hybnosti ste písali, ako používate ZZ hybnosti a vôbec vám nevadilo, že vám smery vektorov nesedia. Za toto som strhával polbod (a utrpeli ste tým ozaj mnohí...). Rovnako polbod som strhával, ak ste úlohu vyriešili používajúc predpoklad, že opica má konštantné zrýchlenie. Zadanie nič také nespomína. Priebeh jej zrýchlenia v čase mohol byť ozaj pestrý.

Záverom skúsme zodpovedať filozofickú otázku autora zadania: O koľko skôr príde ku kladke ľahšia opica? My už vieme povedať, že ak sa na začiatku obe opice nachádzali dĺžku H pod kladkou, tak keď sa ku kladke dostane ľahšia z nich, ťažšej bude ešte stále ostávať $2H/3$. Keď ľahšia opica príde na koniec kladky, bude musieť alebo zastaviť, čím sa zastaví aj postup opice na druhej strane, alebo prelezie na kladku, čím nastane nerovnováha a ťažšia opica začne padať. Ku kladke sa nijakým spôsobom nevie dostať. Musí sa spoľahnúť na kvantové tunelovanie:). *Fine funto di al capri*.

A-2.4 Čajový príklad (opravovala Tinka, vzorák Tomáš)

Dvaja fyzici – experimentátori by si radi uvarili čaj. K dispozícii majú autobatériu – akumulátor s vnútorným odporom 2R, ponorný varič s odporom R, jeden kondenzátor a čajové vrecúško plné chutí a vôní. Nakoľko akumulátor nie je nič moc, zvažujú rôzne spôsoby zapojenia:

a) *Pripoja akumulátor k variču a uvidia, čo to dá.*
b) *Pripoja akumulátor k variču, ale do série s varičom zapoja kondenzátor. Po tom, ako sa nabije, ho zapoja do obvodu naopak ... a takto stále dokolečka. Pritom sa budú dychtivo pozerať na čajové vrecúško.*
c) *Pripoja akumulátor ku kondenzátoru a keď ho nabijú, nechajú ho vybiť sa cez varič.*

Rozhodnite, ktorý zo spôsobov je najúčinnejší!

Milé naše. V prvom rade by som sa chcel spolovice ospravedlniť a spolovice vynadať všetkým, ktorí túto úlohu pochopili inak ako bolo treba. Ako už vyplynulo z búrlivej na debate prebehnuvšej diskusie, vaším cieľom bolo povedať čosi o účinnostiach jednotlivých spôsobov zapojenia. Nebudeme sa tu vracať k tomu, čo všetko vám v príklade znemožňuje porátať výkon (to je to, o čo sa niektorí pokúšali) jednotlivých spôsobov (pre záujemcov, je to stále na debate v sekcii O fyzike), presunieme sa k samotnému jadru vzoráku: Ako porátať účinnosti jednotlivých zapojení?

Prečo nie je účinnosť všetkých troch zapojení 100% a hotovo? Všetka el. energia sa predsa premieňa na teplo – na čo iné by sa mohla premieňať? Problémom je samozrejme vnútorný odpor zdroja. Ten spôsobuje, že časť výkonu sa premení na teplo na zlom mieste – vo vnútri zdroja – a nie na varnej špirále, ako by sme to potrebovali. Aká veľká časť výkonu to presne bude? Situácia **a)**. Nech v nejakom okamihu obvodom preteká prúd I. Pre výkon rezistora vo všeobecnosti platí

$$P = UI = I^2R,$$

kde R je odpor rezistora, U napätie na jeho svorkách a I prúd, ktorý ním preteká. Ak za R dosadíme odpor špirály (R), dostávame jej výkon v danom okamihu

$$P_{\text{dobrý}} = I^2R.$$

Pre výkon, ktorý pritom v tomto okamihu stratíme na zdroji, dostávame:

$$P_{\text{zlý}} = I^2.2R = 2.P_{\text{dobrý}}$$

Účinnosť zapojenia je potom $P_{\text{dobrý}} / P_{\text{celkový}} = 1/3.$

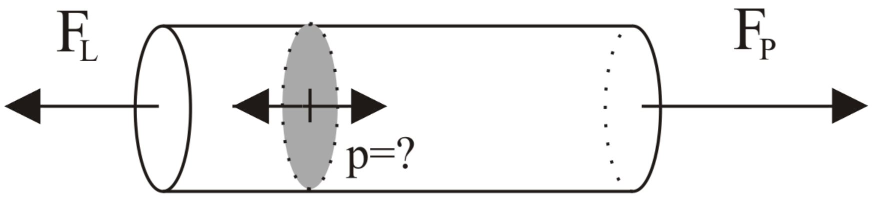
Dôležitým poznatkom, okrem toho, že nám vyšlo sympatické číslo, je, že nás vôbec netrápi, ako sa mení napätie na zdroji s časom (zdroj sa môže napríklad časom vybíjať a napätie tým klesne). Samozrejme, zmena napätia spôsobí zmenu prúdu pretekajúceho sústavou, ak však v každom momente platí, že účinnosť je 1/3, bude aj celková účinnosť 1/3.

Čo ako samozrejmé sa to zdá, tento výsledok nám okamžite pomôže vyriešiť **b)** časť úlohy. Čo zmení kondenzátor, ak ho zapojíme tak, ako je to popísané v zadaní? Kondenzátor nemá prakticky žiadny odpor. V obvode sa správa ako zdroj, teda pridáva do neho nejaký potenciálový rozdiel (napätie). Kondenzátor je plne nabitý vtedy, keď má na svojich svorkách presne opačný rozdiel potenciálov ako zdroj, ktorým sme ho nabili. To znamená, že keď sa nám kondenzátor plne nabije, obvodom nepreteká žiadny prúd nie preto, že by mal obrovský odpor, ale preto, že celkové napätie, ktoré poháňa tok prúdu, je nulové (U na zdroji plus $-U$ na kondenzátore). Keď takýto kondenzátor zapojíme do sústavy obrátene, bude zrazu celkové napätie $2U$ (U na zdroji plus U na kondenzátore) a kondenzátor sa začne prudko vybíjať. Celkové napätie klesá, zase až na 0, keď bude kondík nabitý zase presne opačne ako zdroj. Napriek analýze ktorú sme tu spravili, pointa je od začiatku tá istá – bez ohľadu na to, akými fintami spôsobíme nejaké v čase premenné napätie (a teda aj prúd) v obvode, účinnosť v každom momente a teda aj účinnosť celková, ostáva 1/3.

Čo s **c)** časťou úlohy? Tu sa musíme pozrieť oddelene na proces nabíjania a vybíjania kondenzátora. Už bude ťažšie použiť úvahy ako v prvých dvoch častiach, pretože ťažko povedať nejaké tvrdenie typu „v každom okamihu je účinnosť nejaká“. Skúsme najprv to nabíjanie. Keď nabijeme kondenzátor s kapacitou C na napätie U, bude mať energiu $E = CU^2 / 2$. To je pekné, nič nám to ale nehovorí o práci, ktorú sme na to nabitie museli vykonať. Na doskách kondenzátora sa po nabití usalašil náboj o veľkosti CU, čo je teda aj celkový náboj, ktorý musel pretiecť obvodom. Tento náboj teda pretiekol z jednej svorky zdroja na druhú, čo znamená, že sa dostal na miesto s potenciálom o U nižším a teda energia zdroja klesla o CU^2, čo je presne dvakrát viac ako energia kondenzátora po nabití. Účinnosť nabíjania je teda presne 1/2 a to **bez ohľadu na to**[7], aký veľký je odpor zdroja. Proces vybíjania je tutofka – všetka energia kondenzátora sa premieňa na teplo, pretože špirála je jediný rezistor, ktorý teraz v zapojení máme. Celková účinnosť najúčinnejšieho zapojenia, ktoré sme vymysleli[8], je teda 1/2.

A-3.4 Dodatok k úlohe Valček

Pre lepšie pochopenie sme k úlohe A-3.4 dodatočne nakreslili obrázok, ktorý ukazuje najvšeobecnejšiu situáciu, ktorú treba rátať:



sily posobia na cele podstavy, nie len na ich stredy.

---

[7] Zaujímavé, nie? Skoro až proti intuícii. V skutočnosti sa však nejedná o nič nepochopiteľné. Ak by sme zväčšili odpor zdroja, zväčšili by sme výkon pri konštantnom I, my však zároveň spomalíme celý proces nabíjania a teda akési priemerné I zmenšíme. Výkon závisí od prvej mocniny odporu ale až druhej mocniny prúdu a vďaka tomuto práca potrebná na nabitie vyjde naozaj rovnako.

[8] Keby vnútorný odpor zdroja bol namiesto 2R až 100R, zmenila by sa účinnosť prvých dvoch spôsobov na zhruba 0.01, kým účinnosť c) by bola stále 1/2.