FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
B – kategória (mladší)
22. ročník
letný semester
školský rok 2006/2007

www. **.sk**

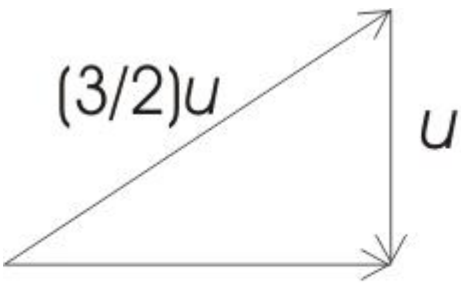
FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

B–3.1 Preteky (opravoval Robo A.)

Jožo1 a Jožo2 sa pokúšajú dostať cez rieku. Rieka tečie všade rýchlosťou u, na dopravu môžu obidvaja použiť kajak, v ktorom každý z nich na pokojnej hladine dokáže plávať maximálnou rýchlosťou 3/2 u. Chcú sa dostať do bodu, ktorý je na druhom brehu presne oproti. Jožo1 sadol do kajaku1 a nasmeroval si to rovno na druhý breh. Samozrejme, prúd ho odnesie o čosi poniže a túto vzdialenosť bude musieť Jožko1 prekonať priamou plavbou proti prúdu. Jožin 2 je prefíkaný a svoj kajak 2 nasmeruje tak, aby sa celý čas pohyboval kolmo na breh a voda ho teda vôbec neodnesie poniže. Ktorý Jožo príde do cieľového bodu skôr? Ako by dopadla podobná súťaž v reálnych podmienkach, napríklad na Dunaji v Bratislave?

Ahojte. Dúfam, že ste si pochutili na tejto krásnej kinematike. Aha.

Označme šírku rieky ako d a pozrime sa najprv na Joža 1. Ten pláva rýchlosťou $(3/2)u$ rovno na druhý breh, teda ho dosiahne za čas $t_1 = 2d/3u$. Počas tejto doby ho však rieka unášala rovnomerne rýchlosťou u, teda ho dokopy uniesla dolu prúdom o vzdialenosť $L = t_1 u = 2d/3$. Túto vzdialenosť musí potom prekonať rýchlosťou $u/2$ (vzhľadom na breh, $u/2$ je rozdiel rýchlosti, ktorou sa pohybuje vzhľadom na vodu a rýchlosti rieky, ktorá tečie rovno oproti nemu), čo mu potrvá čas $t_2 = L/(u/2) = 4d/3u$. Teda spolu mu celá procedúra potrvá čas $T_1 = t_1 + t_2 = 2d/u$.



Teraz sa pozrime na Joža 2. Na obrázku je nakreslený smer jeho rýchlosti $(3/2)u$ (vzhľadom na vodu) a smer rýchlosti prúdu u tak, aby sa na rieke v konečnom dôsledku pohyboval kolmo na breh. A teda aj kolmo na smer prúdenia rieky. Podľa Pytagorovej vety bude potom veľkosť jeho rýchlosti (vzhľadom na breh) $\sqrt{\frac{9u^2}{4} - u^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}u$ a cesta na druhý breh potrvá čas $T_2 = \frac{2d}{\sqrt{5}u}$. Porovnaním časov vidíme, že opačný breh dosiahne skôr Jožo 2.

Na záver sa ešte pozrieme, čo by sa stalo na reálnej rieke. Reálna rieka netečie po celom svojom priereze rovnakou rýchlosťou, ale pri brehoch menšou ako v strede (keďže prekonáva odpor od brehov). Teda Jožo 1 by v druhej fáze svojho boja prekonával menší protiprúd ako sme uvažovali, čo by znížilo jeho celkový čas.

Výsledok takýchto pretekov však nevieme presne určiť, kým nepoznáme presný profil rýchlosti vody v každom bode rieky. (Ak predpokladáme, že menšia rýchlosť prúdenia je iba tesne pri brehu (čiže čas Joža 2 by sa nezmenil), a že Jožo 1 dokáže veslovať na samom okraji rieky kde nemusí prekonávať žiadny protiprúd, trvalo by mu to čas $t_2 = L/(3u/2) = 4d/9u$. Jeho výsledný čas by potom bol $T_1 = 10d/9u$, čo je však stále viac, ako čas Joža 2. Ak by sme však rýchlosti trochu pomenili, mohlo by to celé dopadnúť inak.)

Nakoniec by som chcel spomenúť, že mnohí z vás poslednú časť úlohy pochopili tak, že majú výsledky vypočítané v predošlej časti vyčísliť pre nejakú konkrétnu rieku – čo nebolo presne to, čo sme mali na mysli. Pá-pá!

B–3.2 Zo života domorodcov (opravovala Evka)

Dvaja rovníkoví Afričania sadli do svojich dvoch, úplne rovnakých, áut a rýchlosťou v sa začali pohybovať presne po rovníku, jeden na východ, druhý na západ. Rozhodnite, ktoré auto je pritláčané na zem väčšou silou a o koľko väčšia táto sila je.

„Ahoj Vab´huni! Pozri, mamička mi kúpila na narodeniny nové auto!"
„Nazdar Zag´huni! Jééééj! Pekné! Aj mne mamička kúpila nové auto, aha!"
„No toto! A je úplne rovnaké, ako moje! Aj ty máš dnes narodeniny?"
„Áno, Zag´huni. To bude asi tým, že sme dvojičky."
„Aha. Tak ich poďme vyskúšať!"
„Dobre. Navrhujem, aby sme šli rovnakou rýchlosťou, ako rovný s rovným, rovno po rovníku. Ja na východ a ty na západ."
„Prečo ty na východ a ja na západ?"
„Aby sa to dobre indexovalo, predsa. A vezmeme si aj vysielačku."
.....
„Tu Zag´huni, tu Zag´huni, počuješ ma? Idem rovno na západ, proti smeru otáčania Zeme. Čo myslíš, akou silou je tvoje auto pritláčané na zem? Prepínam."
„Tu Vab´huni, počujem ťa. Ja idem na východ, v smere zemskej rotácie. Gravitačná sila, ktorá na mňa pôsobí je $Fg = \kappa \frac{Mm}{R^2}$. M je hmotnosť Zeme, R polomer Zeme a m moja hmotnosť aj s autom. Potom na mňa pôsobí aerodynamická prítlaková sila. No a keďže Zem rotuje, pôsobí na mňa aj odstredivá sila. Keby som stál na mieste, tak by bola $F_O = \frac{mv_Z^2}{R}$, v_Z je obvodová rýchlosť Zeme na rovníku. Lenže ja si fičím na svojom novom aute rýchlosťou v v smere rotácie, takže moja celková rýchlosť je $v_Z + v$. Čiže na mňa pôsobí sila

$$F_V = \kappa \frac{Mm}{R^2} - \frac{m(v_Z + v)^2}{R} .$$

A aká sila pôsobí na teba? Prepínam."
„Ja sa pohybujem v protismere rotácie, takže moja celková rýchlosť je $v_Z - v$. Teda na mňa pôsobí sila

$$F_Z = \kappa \frac{Mm}{R^2} - \frac{m(v_Z - v)^2}{R} .$$

Odstredivá sila, ktorá na mňa pôsobí, je menšia, takže ma to pritláča k zemi väčšou silou. Fakt si pripadám nejaký ťažší... Prepínam."
„Až taký ťažký si pripadať nemusíš. Sila, ktorá nás tlačí k zemi, sa líši od sily, keby sme stáli, len členom $\frac{m(v_Z - v)^2}{R}$. Mňa to práve o túto hodnotu nadľahčuje a teba pritláča. To znamená, že ťa pritláča sila o

$$\Delta F = F_Z - F_V = -\frac{m(v_Z - v)^2}{R} + \frac{m(v_Z + v)^2}{R} = \frac{m}{R}\left(-v_Z^2 + 2v_Z v - v^2 + v_Z^2 + 2v_Z v + v^2\right) = 4\frac{mv_Z v}{R}$$

väčšia, ako mňa. Ak ideme obaja stovkou a vážime aj s autom takých 500 kg, tak sa to činí len asi 4 N. Tvoja tiaž je o 2 N väčšia a moja o 2 N menšia. To už tá aerodynamika spôsobuje väčšie výchylky... Prepínam."
„Aha, tak to bude tými belochmi, čo sme mali na obed..."
„To je možné. Tvrdili, že musia zachrániť nejakú rovníkovú voš, tak možno boli trochu natvrdlí. Každý vie, že vši žijú v Arktíde..."

B–3.3 Mäso (vzorák Tomáš, opravovala Bea)

Keď vyberieme mäso z mrazničky, je zmrznuté. Pri rozmŕzaní je možné postupovať viacerými spôsobmi. Je však zaujímavé, že keď mäso zabalíme do prakticky hocijakej kožušiny, rozmrzne skôr, ako keď ho dáme do umývadla pod tečúcu vodu s teplotou 10°C. Vysvetlite, ako je to možné.

Svet je zlý. Každý len hrabe, každý len tlačí, každý má pokrivený charakter. Tomu ver. Komu veriť v tomto prehnitom svete? Sebe a len sebe a ani sebe nie, lebo však čo človek vie, otázku si položím, len to čo sa detská myseľ učenlivá pozorovaním okolia naučila, odpoviem si sám. Prirodzený skepticizmus týmito úvahami vzniknutý si pesimistické povahy zvyknú vybíjať spravidla vytím na mesiac.

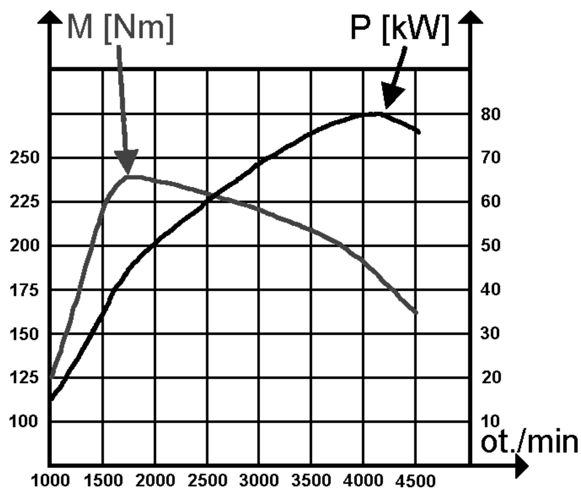
Keď vidím podobné, pochybne znejúce zadanie, je presne čas na trochu paranoje vzniknutej v zmysle predchádzajúceho odstavca. Ak je to tak, prečo zvieratá majú kožušinu ako vynikajúci tepelný izolant? A prečo gazdinky rozmŕzajú mäso pod tečúcou vodou? Kto si navyše spravil experiment, tomu už muselo byť úplne jasné, že svet funguje presne naopak než sa píše v zadaní. Tento omyl samozrejme nevznikol náhodou, vaším cieľom bolo odhaliť evidentnú blbosť v zadaní a napriek istej dôveryhodnosti, ktorú zadania disponujú (aspoň by mali) stáť si za svojím názorom.

Nakoniec však treba priznať, že zadanie nebolo naformulované práve najšťastnejšie. Nakoľko voda, ktorá obtekala mäso nebola dosť teplá, môže sa dostatočne veľký flák mäsa (Samo Hapák spočítal, že je potreba, aby jeho najmenší rozmer bol asi 30 centimetrov) môže naozaj správať tak, ako v zadaní. Nakoľko sa skôr radím ku konzumentom < 1cm hrubých rezňov než 30 centimetrov hrubých mamutích stehien, pri formulácii príkladu mi niečo podobné ani nenapadlo. Tým pádom, keby som napísal úvahu o zlom zadaní v štýle druhého odstavca tohto vzoráku a zabudol na mamutie stehná, dopadol by som práve tak ako veľa z vás, teda stratil pol bodu. Úvahy o veľkých mäsách získavali plný počet, ostatné (zlé) úvahy boli ohodnotené podľa toho ako veľmi ste museli znásilňovať fyziku tak, aby ste vysvetlili nevysvetliteľné.

B-3.4 Kubove autá (opravoval nečakane Kubo)

Máme osobné auto Citroën Xsara Picasso s motorom 1,6 HDi 16V. Chceme určiť maximálne zrýchlenie, ktoré je mu motor schopný udeliť pri rýchlosti v = 60 km/h. Ďalej do akého maximálneho stúpania je motor schopný naše autíčko vytiahnuť a zaujíma nás aj najvyššia dosažiteľná rýchlosť na rovine $v_{max.}$ Valivé trenie môžeš zanedbať.

Potrebné údaje: hmotnosť auta m = 1500 kg; čelný prierez S = 2,7 m^2; polomer kolesa R = 31 cm; súčiniteľ odporu C = 0,35; hustota vzduchu ρ = 1,28 kg/m^3.



Stupeň prevodovky	*Spomalenie otáčok*
1	*3,45 x 3,68*
2	*1,87 x 3,68*
3	*1,16 x 3,68*
4	*0,82 x 3,68*
5	*0,66 x 3,68*
spiatočka	*3,33 x 3,68*

Pár technických vecí, ktoré by ste mali vedieť: Spomalenie otáčok je číslo (čísla v pravom stĺpci tabuľky treba vynásobiť, prečo sa zadávajú práve takouto formou nie je teraz dôležité) ktoré udáva pomer medzi otáčkami motora a kolies. Teda, kolesá sa vždy otáčajú pomalšie (čo do uhlovej rýchlosti) ako motor a koľkokrát pomalšie (pre jednotlivé prevodové stupne) zistite v tabuľke. Graf vpravo udáva závislosť otáčavého momentu a výkonu motora v závislosti na otáčkach (kolies). Na záver, vzorec F = $\rho SCv^2/2$ udáva veľkosť odporovej sily pre auto idúce rýchlosťou v, ostatné veličiny zo vzorca sú napísané v zadaní. Dá sa predpokladať, že odpor vzduchu je najdôležitejšou trecou silou, ostatné sú voči nej zanedbateľné.

Jednu z prvých vecí, ktoré si rozoberieme, sú prevody. Bude nás zaujímať, čo sa deje s veličinami ako výkon a moment sily pri prevode, ktorý nám zrýchli otáčanie k-krát. Najjednoduchšie sa na to nahliadne pri remeňovom prevode: Nech sila, ktorou je remeň napínaný je F, nech R_1 je polomer kolieska, z ktorého prenášame točiaci moment, a R_2 polomer toho druhého kolieska. Keď označím v posuvnú rýchlosť remeňa, tak $v = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$. Chceme zrýchliť otáčanie k-krát, čo zapíšeme $k = \omega_2/\omega_1$. Spolu s predošlou rovnosťou dostaneme podmienku $k = R_1/R_2$. Potom keď moment prenášaný oskou, na ktorom je prvé kolečko je $M_1 = FR_1$, tak moment prenášaný druhou oskou je $M_2 = FR_2 = FR_1(R_2/R_1) = M_1/k$. Výborne, a teraz sa ešte trošku pohráme s výkonom: $P = W/\Delta t = F\,\Delta s/\Delta t = Fv = FR\omega = M\omega$. Takže ak výkon na prvom kolečku je $P_1 = M_1\omega_1$, tak výkon na druhom je $P_2 = M_2\omega_2 = (M_1/k)(k\omega_1) = M_1\omega_1 = P_1$. To znie rozumne – nech spomaľujem či zrýchľujem otáčky prevodmi, výkon mi to nemení. Obdobne to funguje pre ozubené kolesá, reťaze a pod. Tam stačí zvážiť, že zuby sú rovnako veľké, a že pomer počtu zubov na kolesách je práve rovný k.

Mimochodom, dostali sme sa k rovnosti $P = M\omega$. To ale znamená, že tie dva grafy zo zadania sú navzájom závislé! Skúste si prepočítať pár hodnôt a zistíte, že naozaj platí $P(f) = 2\pi f\,M(f)$. Len si treba dať pozor na jednotky – totiž na grafe je tá frekvencia v 1/min a nie v 1/s.

Skúsme teraz riešiť úlohu o maximálnom zrýchlení pri danej rýchlosti $v = 60$ km/h. Označme spomalenie prevodovky $q(stupeň)$. Tak napr. potom $q(1) = 3{,}45x3{,}68$. Potom moment sily na poháňaných kolesách (dokopy, on sa nejako rozdelí v diferenciáli) je

$$M_{kolesá} = RF_{hnacia} = R(ma_M + F_{odporová}) = q(stupeň)\,M(f_{motora}),$$

kde $F_{odporová} = \rho SCv^2/2$ a otáčky motora f_{motora} vyjadrím z rovnice

$$v = \omega_{kolies} R = \omega_{motora}/q(stupeň)\,R = 2\pi f_{motora}\,R/q(stupeň).$$

Z toho všetkého dostávame:

$$\Rightarrow a_M = \frac{q(stupeň)\,M\left(\dfrac{v\,q(stupeň)}{2\pi R}\right)}{mR} - \frac{\rho SCv^2}{2m}$$

Treba si dať pozor na jednotky – otáčky motora chceme mať v 1/min, preto si napr. rýchlosť premením na metre za minútu (1000 m/min) a polomer kolesa dosadím v metroch.

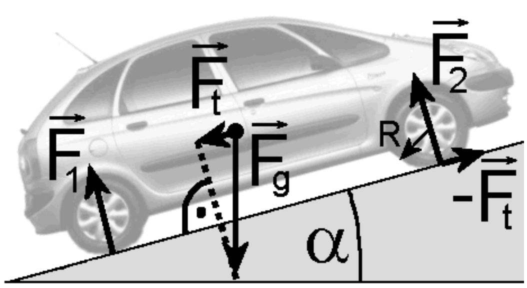
stupeň	$f_{motora} = v\,q(stupeň)/(2\pi R)$	$M(f_{motora})$	a_M	$P(f_{motora})$	a_P
1	6500 ot./min	mimo graf	-	mimo graf	-
2	3550 ot./min	210 Nm	3,0 ms^{-2}	75 kW	2,9 ms^{-2}
3	2200 ot./min	235 Nm	2,0 ms^{-2}	55 kW	2,1 ms^{-2}
4	1550 ot./min	225 Nm	1,3 ms^{-2}	35 kW	1,3 ms^{-2}
5	1250 ot./min	175 Nm	0,8 ms^{-2}	25 kW	0,9 ms^{-2}

Z tabuľky vidíme, že najlepšie zrýchlenie vieme dosiahnuť na stupni 2 a to $a \approx 3$ ms^{-2}. Samozrejme mohli sme to počítať aj z výkonovej krivky, to by platilo

$$P(f_{motora}) = Fs/t = Fv = (ma_P + F_{odporová})v$$

$$\Rightarrow a_P = \frac{P(f_{motora})}{mv} - \frac{\rho SCv^2}{2m}$$

Rozdielne výsledky (viď tabuľka) sú dôsledkom nepresnosti grafu a odčítania hodnôt z neho. Preto aj nemá význam počítať s vyššou presnosťou. Rozdiel, ktorý by vznikol ignoráciou odporovej sily je pri rýchlosti $v = 60$ km/h iba $\Delta a \approx 0{,}1$ ms^{-2}. To je prijateľné a toto zjednodušenie ste mohli urobiť (lebo je to rádovo menej ako výsledné zrýchlenie a porovnateľné s chybou odčítania z grafu).



Ďalej zisťujeme, do akého kopca vieme ešte ísť. Nuž, predpokladajme teda rovnomerný pohyb po naklonenej rovine so sklonom α.

Neriešime žiadne stavanie sa na zadné kolesá ani iné srandičky ohľadne trenia a toho, či by koleso prešmykovalo alebo nie (lebo v zadaní sme explicitne hovorili o možnostiach motora – dalo by sa to riešiť ozubnicou, keby ste veľmi chceli ☺). Zrejme veľmi rýchlo nepôjdeme a teda budeme môcť zanedbať odporovú silu. Hnací moment sily na kolesách potom musí byť presne R-násobok veľkosti tangenciálnej (dotyčnicovej) zložky $\vec{F}_t$ tiažovej sily $\vec{F}_g$, teda

$$M_{koles\acute{a}} = Rmg\sin\alpha = q(stupe\check{n})\,M(f_{motora}) \Rightarrow \sin\alpha = \frac{q(stupe\check{n})\,M(f_{motora})}{Rmg}$$

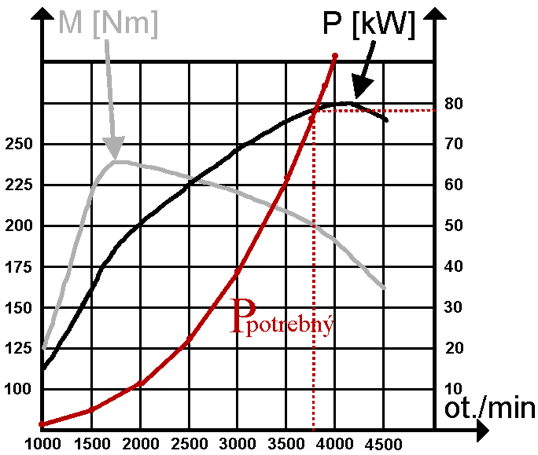
My sa snažíme maximalizovať α, teda aj $\sin\alpha$. Teda aj výraz v čitateli (v menovateli je konštanta). No a čitateľ bude zjavne maximálny pre *stupeň* = 1 a f_{motora} = 1750 ot./min, lebo pri takých otáčkach dosahuje motor maximálny krútiaci moment M_{max} = 240 Nm. Takže potom maximálne $\alpha \approx 42°$, resp. stúpanie $\tan\alpha$ = 90 %. Silný koník, no nie? Ešte sa pozrieme na tú odporovú silu, aby sme mali čisté svedomie. Takže pôjdeme rýchlosťou $v = \frac{2\pi f_{motora}}{q(1)} R \approx 16$ km/h $\Rightarrow$ $F_{odporov\acute{a}} \approx 12$ N. To nás naozaj trápiť nemusí, keď ťažná sila je $F = q(stupe\check{n})\, M_{max} / R \approx 10$ kN.

Posledné, čo nás zaujímalo, bola maximálna rýchlosť. Celá hnacia sila sa upotrebí na prerážanie vozidla povetrím, takže

$$P(f_{motora}) = F_{odporov\acute{a}} v = \tfrac{1}{2} CS\rho v^3$$

$$\Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{2P(f_{motora})}{CS\rho}} \text{ pri podmienke } v = 2\pi \frac{f_{motora}}{q(stupe\check{n})} R$$

Dostali sme komplikovanú rovnicu s podmienkou. Použijeme malý trik. Vidíme totiž, že vyšší výkon P nám zabezpečí vyššiu maximálnu rýchlosť. Tak skúsime zobrať maximum P_{max} = 80 kW, spočítať príslušnú v_{max}, hoci nevieme (!!!), či na to budeme mať adekvátny prevod, ktorý nám spomalí otáčky motora f_{motora} = 4200 ot./min (pri ktorých sa maximálny výkon dosahuje) tak ako potrebujeme. Ale za pokus to stojí. Pre P_{max} nám vychádza $v_{max} \approx 180$ km/h $\Rightarrow$ (zrejme pôjdem na stupni 5) $\Rightarrow$ f_{motora} = 3800 ot./min. No a pri týchto otáčkach má motor výkon P = 78 kW $\approx P_{max}$, takže tento náš trik vyšiel.



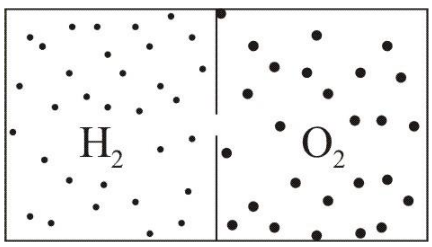
Inak sa to dalo pekne riešiť graficky (Laco Bačo tak urobil). Stačilo do pôvodného grafu pre výkonovú (eventuálne momentovú) krivku zakresliť (kubickú) krivku pre potrebný výkon v závislosti od otáčok. No a priesečník zjavne určuje riešenie.
Hodnotenie: za maximálne zrýchlenie pri šesťdesiatke 2.0b, za maximálne stúpanie 1.5b, za maximálnu rýchlosť 1.5b. A platí: numerická chyba = žiadna chyba.

B–3.5 Dokáže sa natlačiť (opravoval Džony, vzorák Džony & Tomáš)

Termodynamika je celá o priemerných veličinách, preto ak máte pocit, že v tomto príklade je nejaká nejasnosť, hneď si pred všetky slová vo všetkých vetách doplňte „v priemernom prípade“. Tak a ideme na to: Krabica je rozdelená na dve podkrabice, v jednej je uväznené malé množstvo kyslíka, v druhej vodíka. Všetky stavové veličiny plynov (p,V,T,n) sú rovnaké. Do prepážky, ktorá oba plyny oddeľuje, spravíme malú dierku o ploche S. Plyny spolu chemicky nereagujú Rozhodnite:

a) Molekuly ktorého plynu budú prechádzať na druhú stranu častejšie?

b) Ako sa zmení tlak v podkrabiciach po nejakom čase od navŕtania?



13. mája 2007 kontaktoval FKS predseda predstavenstva španielskeho mobilného operátora O_2, pán Mgr. Tlako Objemovič a pohrozil nám žalobou vo veci hanobenia obchodnej značky. V prípade, že nevysvetlíme ako sa môže v jednom odstavci vyskytnúť značka ich firmy a slová „v priemernom prípade“, ktoré, citujem: „...hanobia firmu, lebo O_2 nie je a nikdy nebude v ničom priemerná!“ Nasledujúci text má vysvetliť a objasniť postoj FKS k celej záležitosti.

Tento úvod mal pôvodne odštartovať pútavý a všeobjasňujúci vzorák. Všetko bežalo hladko až do chvíle, kedy sme sa s Janom nad príkladom dôkladnejšie zamysleli a zistili sme, že niektoré časti nášho riešenia nie sú úplne.. skrátka, naša predstava o správnom riešení, vzorák a s ním aj oprava vašich riešení prešli istým vývojom, ktorý nebol chudobný na búchanie si hlavy do steny, vulgarizmy a rozmýšľanie, ako asi napíšeme odstavec, ktorý akurát čítate.

Nakoľko časti a) a b) sú jednoduchšie a boli spoločné pre obe kategórie, začneme s nimi. Prvým dôležitým krokom je uvedomiť si, čo je to teplota. Táto veličina (meraná v kelvinoch) je úmerná priemernej kinetickej energii jednej molekuly, čiže štvorcu rýchlosti. Pekné.. čo však z toho? Molekula kyslíka je zhruba 16-krát ťažšia ako vodíková pri rovnakej kinetickej energii, to znamená, že sa bude pohybovať 4-krát pomalšie. Toto nám rovno umožňuje odpovedať na otázku, ktoré molekuly budú po otvorení diery prelietavať častejšie. 4-krát rýchlejšie vodíky budú do ľubovoľného miesta vyznačeného na povrchu krabice narážať v priemere 4-krát častejšie a teda častejšie sa aj trafia do diery.

Toto je v súlade s úvahami o tlakoch. Predstavme si, že by v každej polovici nádoby lietala iba jedna molekula a skúmajme, aký veľký tlak táto molekula spôsobí na steny nádoby[1]. Molekula vodíka je 16-krát ľahšia, 4-krát pomalšia, jeden jej náraz teda dodá stene nádoby 4-krát menej hybnosti ($\Delta p = 2mv$). Nakoľko však zrážky nastávajú 4-krát častejšie, táto molekula spôsobí vo vnútri nádoby rovnaký tlak ako molekula kyslíka. Toto súhlasí so zadaním (tlaky ozaj mali byť rovnaké) a stavovou rovnicou plynu (keby sa plyny líšili iba v tlakoch, odporovalo by jej to).

Skombinujme úvahy z predchádzajúcich dvoch odstavcov. Molekuly vodíka prechádzajú na druhú stranu nádoby častejšie, každá molekula však pôsobí na steny tej časti nádoby, v ktorej je akurát uväznená rovnako veľkým tlakom[2]. Po otvorení diery sa na nejaký čas vytvorí vyššia koncentrácia molekúl na kyslíkovej strane a v tejto časti podnádoby bude teda aj väčší tlak. Postupom času sa samozrejme vytvorí rovnováha, v ktorej budú obidva plyny rozptýlené náhodne po celej nádobe.

Pomaly sa rozlúčime s riešiteľmi B-čka a prejdime k výpočtovo najťažšej časti úlohy. Nazvime f frekvenciu nárazov molekúl na plochu S, ($f = M/\Delta t$ t.j. počet nárazov molekúl na plochu S za nejaký čas Δt). Čas, za ktorý v priemernom prípade nastane prvý náraz, bude teda[3] $t = 1/f$. Pri náraze na stenu zmení molekula svoju hybnosť o $2mv$, čím silovo pôsobí na stenu. Za čas Δt dopadne na plochu S M molekúl, čo spôsobí tlak[4]

---

[1] Toto je možno trochu mätúce, uvedomte si však, čo je to tlak. Vezmete množstvo hybnosti, ktorým molekuly zapôsobia na vybraný kus steny a túto hybnosť predelíte časom, za ktorý sa táto hybnosť odovzdala. Z náhodnosti pohybu molekúl je potom jasné, že tlak bude mierne fluktuovať. Keď máme jedinú molekulu v nádobe, tak jediný rozdiel je, že pri jednej molekule budú fluktuácie percentuálne väčšie.

[2] Celý proces je izotermický, teplota plynov sa počas celého procesu nemení (nakoľko nie je nič, čo by molekuly zrýchľovalo alebo spomaľovalo)

[3] Vysvetlenie, prečo platí $t = 1/f$, sme trochu odflákli a toto sa ani neplánuje veľmi zmeniť. Chyby vychádzajúce z neznalosti tohto vzťahu sa preto ani nepokutovali veľkou bodovou zrážkou. Je jasné, že medzi t a f musí existovať nejaký podobný vzťah, nie je však zďaleka jasné, prečo práve takýto. Existuje viacero úvah, ako na to prísť, my tu uvedieme MHS (metódu hrubej sily). Predstavte si, že hádžem hracou kockou, ktorá má pravdepodobnosť padnutia šestky $p = 1/6$. Šanca, že šestka padne na prvý raz je 1/6, na druhý raz 5/6*1/6 na tretí $(5/6)^2 1/6$ atď. Keď zrátam (keď neviem inak, môžem aj numericky, stačí sumovať prvých cca 15 členov) výslednú priemernú dobu čakania na šestku, dostávam práve 6, vo všeobecnosti dostávam $1/p$. Spravte to, je to poučný výpočet. Naša situácia je ako keby veľmi rýchle hádzanie kockou s veľmi malým p, čo nám umožňuje aplikovať „kockatý“ výpočet aj na plyn.

[4] Rozmyslite si, prečo sem dosadzujeme práve strednú rýchlosť molekuly a nie napríklad strednú kvadratickú rýchlosť

$$p = F / S = \frac{\Delta hybnosti}{\Delta t S} = \frac{M 2mv}{\Delta t S} \qquad (1)$$

V našom prípade je situácia o máličko komplikovanejšia, lebo stenu bombardujú dva rôzne plyny, teda *f* = celkový počet nárazov za čas Δt je zrejme súčet počtu nárazov molekúl vodíka (M_{H_2}) a počtu nárazov molekúl kyslíka (M_{O_2})za čas Δt. Keďže v oboch podkrabiciach je tlak *p*, tak rovnica (1) platí osobitne pre vodík a osobitne pre kyslík. Z toho môžeme určiť:

$$M_{H_2} = \frac{pS\Delta t}{2m_{H_2} v_{H_2}} \qquad (2)$$

a pre M_{O_2} analogicky. Teraz je už všetko pripravené na to, aby sme vypočítali čas *t*. Po dosadení vzťahu (2), vyjadrení priemernej rýchlosti molekuly podľa vzťahu zo zadania ($v = \sqrt{2kT / m\pi}$) a pár úpravách dostávame:

$$t = 1 / f = \frac{\Delta t}{M} = \frac{\Delta t}{M_{H_2} + M_{O_2}} = ... = \sqrt{\frac{2kT}{\pi}} \frac{2}{pS} \left(\frac{\sqrt{m_{H_2} m_{O_2}}}{\sqrt{m_{H_2}} + \sqrt{m_{O_2}}} \right)$$

Vážený pán Objemovič, táto úloha je myslená ako pozitívna reklama firmy O_2 pre inteligentných zákazníkov. Z výsledku prvej úlohy vyplýva, že pri dosť veľkom tlaku na náš trh nepotrvá dlho a cez dvere vašej firmy začne prerozdeľovanie zákazníkov. Zrejme (podľa druhej úlohy) cez vaše dvere budú oveľa častejšie lietať zákazníci konkurenčného mobilného operátora pracovne nazvaného H_2, čo vám poskytuje možnosť osloviť ich lákavou ponukou.
Za porozumenie, najlepšie vo forme sponzorského daru, vopred ďakujeme.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

vzorové riešenia 3. série
A – kategória (starší)
22. ročník
letný semester
školský rok 2006/2007

www. **.sk**

FKS, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

A–3.1 Zo života domorodcov (opravovala Evka)

Dvaja rovníkoví Afričania sadli do svojich dvoch, úplne rovnakých, áut a rýchlosťou v sa začali pohybovať presne po rovníku, jeden na východ, druhý na západ. Rozhodnite, ktoré auto je pritláčané na zem väčšou silou a o koľko väčšia táto sila je.

„Ahoj Vab´huni! Pozri, mamička mi kúpila na narodeniny nové auto!“
„Nazdar Zag´huni! Jéééééj! Pekné! Aj mne mamička kúpila nové auto, aha!“
„No toto! A je úplne rovnaké, ako moje! Aj ty máš dnes narodeniny?“
„Áno, Zag´huni. To bude asi tým, že sme dvojičky.“
„Aha. Tak ich poďme vyskúšať!“
„Dobre. Navrhujem, aby sme šli rovnakou rýchlosťou, ako rovný s rovným, rovno po rovníku. Ja na východ a ty na západ.“
„Prečo ty na východ a ja na západ?“
„Aby sa to dobre indexovalo, predsa. A vezmeme si aj vysielačku.“
.....
„Tu Zag´huni, tu Zag´huni, počuješ ma? Idem rovno na západ, proti smeru otáčania Zeme. Čo myslíš, akou silou je tvoje auto pritláčané na zem? Prepínam.“
„Tu Vab´huni, počujem ťa. Ja idem na východ, v smere zemskej rotácie. Gravitačná sila, ktorá na mňa pôsobí je $Fg = \kappa \frac{Mm}{R^2}$. M je hmotnosť Zeme, R polomer Zeme a m moja hmotnosť aj s autom. Potom na mňa pôsobí aerodynamická prítlaková sila. No a keďže Zem rotuje, pôsobí na mňa aj odstredivá sila. Keby som stál na mieste, tak by bola $F_O = \frac{mv_Z^2}{R}$, v_Z je obvodová rýchlosť Zeme na rovníku. Lenže ja si fičím na svojom novom aute rýchlosťou v v smere rotácie, takže moja celková rýchlosť je $v_Z + v$. Čiže na mňa pôsobí sila

$$F_V = \kappa \frac{Mm}{R^2} - \frac{m(v_Z + v)^2}{R}.$$

A aká sila pôsobí na teba? Prepínam.“
„Ja sa pohybujem v protismere rotácie, takže moja celková rýchlosť je $v_Z - v$. Teda na mňa pôsobí sila

$$F_Z = \kappa \frac{Mm}{R^2} - \frac{m(v_Z - v)^2}{R}.$$

Odstredivá sila, ktorá na mňa pôsobí, je menšia, takže ma to pritláča k zemi väčšou silou. Fakt si pripadám nejaký ťažší... Prepínam.“
„Až taký ťažký si pripadať nemusíš. Sila, ktorá nás tlačí k zemi, sa líši od sily, keby sme stáli, len členom $\frac{m(v_Z - v)^2}{R}$. Mňa to práve o túto hodnotu nadľahčuje a teba pritláča. To znamená, že ťa pritláča sila o

$$\Delta F = F_Z - F_V = -\frac{m(v_Z - v)^2}{R} + \frac{m(v_Z + v)^2}{R} = \frac{m}{R}\left(-v_Z^2 + 2v_Z v - v^2 + v_Z^2 + 2v_Z v + v^2\right) = 4\frac{m v_Z v}{R}$$

väčšia, ako mňa. Ak ideme obaja stovkou a vážime aj s autom takých 500 kg, tak sa to činí len asi 4 N. Tvoja tiaž je o 2 N väčšia a moja o 2 N menšia. To už tá aerodynamika spôsobuje väčšie výchylky... Prepínam.“
„Aha, tak to bude tými belochmi, čo sme mali na obed...“
„To je možné. Tvrdili, že musia zachrániť nejakú rovníkovú voš, tak možno boli trochu natvrdlí. Každý vie, že vši žijú v Arktíde...“

A–3.2 Mäso (vzorák Tomáš, opravovala Bea)

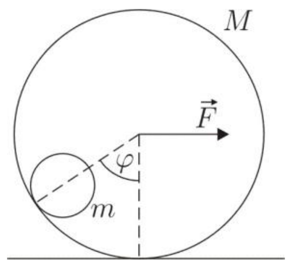
Keď vyberieme mäso z mrazničky, je zmrznuté. Pri rozmŕzaní je možné postupovať viacerými spôsobmi. Je však zaujímavé, že keď mäso zabalíme do prakticky hocijakej kožušiny, rozmrzne skôr, ako keď ho dáme do umývadla pod tečúcu vodu s teplotou 10°C. Vysvetlite, ako je to možné.

Svet je zlý. Každý len hrabe, každý len tlačí, každý má pokrivený charakter. Tomu ver. Komu veriť v tomto prehnitom svete? Sebe a len sebe a ani sebe nie, lebo však čo človek vie, otázku si položím, len to čo sa detská myseľ učenlivá pozorovaním okolia naučila, odpoviem si sám. Prirodzený skepticizmus týmito úvahami vzniknutý si pesimistické povahy zvyknú vybíjať spravidla vytím na mesiac.

Keď vidím podobné, pochybne znejúce zadanie, je presne čas na trochu paranoje vzniknutej v zmysle predchádzajúceho odstavca. Ak je to tak, prečo zvieratá majú kožušinu ako vynikajúci tepelný izolant? A prečo gazdinky rozmŕzajú mäso pod tečúcou vodou? Kto si navyše spravil experiment, tomu už muselo byť úplne jasné, že svet funguje presne naopak než sa píše v zadaní. Tento omyl samozrejme nevznikol náhodou, vaším cieľom bolo odhaliť evidentnú blbosť v zadaní a napriek istej dôveryhodnosti, ktorú zadania disponujú (aspoň by mali) stáť si za svojím názorom.

Nakoniec však treba priznať, že zadanie nebolo naformulované práve najšťastnejšie. Nakoľko voda, ktorá obtekala mäso nebola dosť teplá, môže sa dostatočne veľký flák mäsa (Samo Hapák spočítal, že je potreba, aby jeho najmenší rozmer bol asi 30 centimetrov) môže naozaj správať tak, ako v zadaní. Nakoľko sa skôr radím ku konzumentom < 1cm hrubých rezňov než 30 centimetrov hrubých mamutích stehien, pri formulácii príkladu mi niečo podobné ani nenapadlo. Tým pádom, keby som napísal úvahu o zlom zadaní v štýle druhého odstavca tohto vzoráku a zabudol na mamutie stehná, dopadol by som práve tak ako veľa z vás, teda stratil pol boda. Úvahy o veľkých mäsách získavali plný počet, ostatné (zlé) úvahy boli ohodnotené podľa toho ako veľmi ste museli znásilňovať fyziku tak, aby ste vysvetlili nevysvetliteľné.

A–3.3 Peťovo súvalčie (opravoval Juro)



Majme dva duté valce tak, ako na obrázku. Vonkajší začneme ťahať silou F. Polomery valcov sú R a r. Počkáme, kým nastane ustálený stav, t.j. uhol φ sa prestane meniť. Určite:

a) Zrýchlenie celej sústavy

b) Uhol φ.

Trenie je dostatočne veľké na to, aby nič neprešmykovalo.

Názov príkladu neveštil nič dobré. Po prečítaní zadania si každý isto predstavil dlhočizný výpočet, po chrbte prešli zimomriavky, čelo zalial pot. Našťastie však zdanie klame a trochu sa na úvod zamyslieť bolo viac ako prospešné. Ale nepredbiehajme.

Najskôr v stručnosti popíšme neekologické výpočty, ktoré síce viedli k správnemu výsledku, ale iba ak ste sa nepomýlili a za cenu mnohých šedivých vlasov a tatranských smrekov. Napíšeme všetky sily, ktoré pôsobia na veľký a malý valec. Nezabudneme na trecie sily, reakcie, zotrvačné sily ak rátame v neinerciálnej sústave a napíšeme pre každý smer a valec $F = m.a$ a $M = I.\varepsilon$. Aby ste si užili estetickú hodnotu, tu sú rovnice, ku ktorým došiel Tomáš Bzdušek

$$Ma = F - T_1 + T_2 \cos\varphi - N_2 \sin\varphi \qquad ma = N_2 \sin\varphi - T_2 \cos\varphi$$

$$Mg + T_2 \sin\varphi + N_2 \cos\varphi = N_1 \qquad mg = N_2 \cos\varphi + T_2 \sin\varphi$$

$$\frac{a}{R} = \frac{(T_1 - T_2)R}{I_1} \qquad \frac{a}{r} = \frac{T_2 r}{I_2}$$

Z nich to všetko po dostatočnej námahe vypadne. Vrelo odporúčam si to skúsiť porátať. Tým, ktorý tak už spravili, vrelo odporúčam na tomto mieste prestať čítať, začať si spytovať svedomie a skúsiť sa zamyslieť, ako sa to dalo oveľa ľahšie. Takto:

Veľké písmená budú označovať veličiny spojené s veľkým valcom, malé písmená s malým. V prvom rade si uvedomíme, že ustálený stav nemôže závisieť od toho, ako na úvod uložíme valce. Takže je jedno, či dostatočne dlho počkáme, až kým sa valce dohodnú na nejakej výslednej polohe, alebo či ich hneď do tejto polohy uložíme. Zrýchlenie bude potom také isté. V druhom rade si uvedomíme, že ak sa valec pohybuje bez prešmykovania, má rovnakú otáčavú aj posuvnú kinetickú energiu. Pre dutý valec totiž $I = M R^2$, takže pre energiu otáčavého pohybu platí $E_O = 1/2\, M R^2 \omega^2 = 1/2\, M v^2$, pretože ak valec neprešmykuje, pre jeho uhlovú a posuvnú rýchlosť musí platiť $v = \omega R$. Pri roztáčaní sa teda valec efektívne správa, ako keby mal dvojnásobnú hmotnosť. Pekné je, že tento výsledok platí aj pre malý, aj pre veľký valec. (Ak sa veľký valec hýbe rýchlosťou v, aj malý má celkovú energiu ako keby sa hýbal rýchlosťou v) Preto pre zrýchlenie sústavy[1] bude platiť $a = \frac{F}{2(M+m)}$.

Ostáva zistiť uhol φ. Pozrime sa na malý valec zo sústavy spojenej s veľkým valcom. V tejto sústave musí výsledná sila pôsobiť kolmo do plášťa veľkého valca. Inak by sa vzhľadom naň malý valec rozpohyboval a to nie je ustálený stav. Na malý valec pôsobí trecia, tiažová, zotrvačná sila a reakcia od veľkého valca. Z obrázku vidíme, že matematicky naša podmienka znamená

[1] Samozrejme to isté by sme dostali využitím zákona zachovania energie a porovnaním práce, ktorú sila vykonala a energie, ktorú tým valce získali. Presnejšie

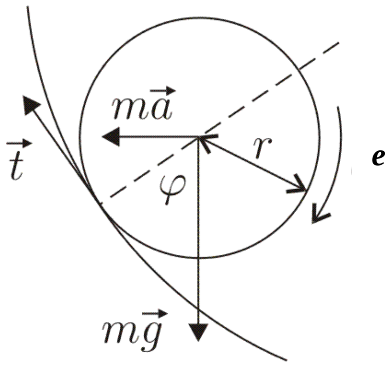
$$E = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}i\omega^2 = (M+m)v^2 \overset{ZZE}{=} Fs$$

Pri rovnomerne zrýchlenom pohybe platí $v = \sqrt{2as}$, z čoho už výsledok ľahko vypadne.

$$mg\sin\varphi = t + ma\cos\varphi$$

Reakcia potom vykompenzuje výslednú silu. Stačí už len zistiť treciu silu t. Je to jediná sila, ktorá roztáča malý valec, preto platí $tr = mr^2\varepsilon$. Na to, aby valce neprešmykovali, musia mať ich dotykové body rovnaké rýchlosti a rovnaké zrýchlenia.

Pre ε zároveň vieme, že musí spôsobovať akurát také obvodové zrýchlenie malého valca, aby stačil veľkému valcu, ktorý, ako sme už zistili sa rozbieha s obvodovým zrýchlením a. Preto $\varepsilon r = a$ a teda $t = ma$. Po dosadení dostávame rovnicu pre φ, ktorú možno teraz riešiť dvojako. Alebo si cos vyjadriť pomocou sin a dostať kvadratickú rovnicu, alebo pomocou vzorcov pre dvojnásobné uhly zistiť, že to netreba. Dostávame potom hľadaný výsledok

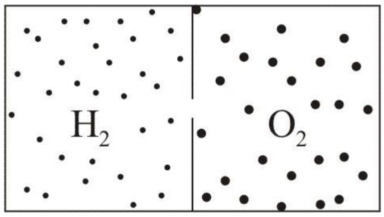


$$\frac{a}{g} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \tan\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \varphi = 2\arctan\left(\frac{F}{2g(m+M)}\right)$$

K vašim riešeniam asi iba toľko, že ste často a radi zabúdali na treciu silu pri hľadaní uhla φ. Tak sa majte krásne, užívajte život a tešte sa na sústredenie. Lebo neviem či som to už vravel, ale ...

A–3.4 Dokáže sa natlačiť (opravoval Džony, vzorák Džony & Tomáš)

Termodynamika je celá o priemerných veličinách, preto ak máte pocit, že v tomto príklade je nejaká nejasnosť, hneď si pred všetky slová vo všetkých vetách doplňte „v priemernom prípade“. Tak a ideme na to: Krabica je rozdelená na dve podkrabice, v jednej je uväznené malé množstvo kyslíka, v druhej vodíka. Všetky stavové veličiny plynov (p,V,T,n) sú rovnaké. Do prepážky, ktorá oba plyny oddeľuje, spravíme malú dierku o ploche S. Plyny spolu chemicky nereagujú. Rozhodnite:



a) *Ako dlho potrvá prvej molekule, kým prejde na opačnú polovicu?*
b) *Molekuly ktorého plynu budú prechádzať na druhú stranu častejšie?*
c) *Ako sa zmení tlak v podkrabiciach po nejakom čase od navŕtania?*

Môžte využiť, že priemerná hodnota $|v_x|$ *je* $\sqrt{\dfrac{2kT}{m.\pi}}$ *(m je hmotnosť molekuly, T teplota, v je rýchlosť molekuly,* v_x *jej x-vá zložka pre ľubovoľne zvolenú os x)*

13. mája 2007 kontaktoval FKS predseda predstavenstva španielskeho mobilného operátora O_2, pán Mgr. Tlako Objemovič a pohrozil nám žalobou vo veci hanobenia obchodnej značky. V prípade, že nevysvetlíme ako sa môže v jednom odstavci vyskytnúť značka ich firmy a slová „v priemernom prípade“, ktoré, citujem: „...hanobia firmu, lebo O_2 nie je a nikdy nebude v ničom priemerná!“ Nasledujúci text má vysvetliť a objasniť postoj FKS k celej záležitosti.

Tento poetický úvod mal pôvodne odštartovať pútavý a všeobjasňujúci vzorák. Všetko bežalo hladko až do chvíle, kedy sme sa s Janom nad príkladom trochu dôkladnejšie zamysleli a zistili sme, že niektoré časti nášho riešenia nie sú úplne.. skrátka, naša predstava o správnom riešení, vzorák a s ním aj oprava vašich riešení prešli istým vývojom, ktorý nebol chudobný na búchanie si hlavy do steny, vulgarizmy a rozmýšľanie, ako asi napíšeme odstavec, ktorý akurát čítate.

Nakoľko časti b) a c) sú jednoduchšie a boli spoločné pre obe kategórie, začneme s nimi. Prvým dôležitým krokom je uvedomiť si, čo je to teplota. Táto veličina (meraná v Kelvinoch) je úmerná priemernej kinetickej energii jednej molekuly, čiže štvorcu rýchlosti. Pekné.. čo však z toho? Molekula kyslíka je zhruba 16-krát ťažšia ako vodíková pri rovnakej kinetickej energii, to znamená, že sa bude pohybovať 4-krát pomalšie. Toto nám rovno umožňuje odpovedať na otázku, ktoré molekuly budú po otvorení diery prelietavať častejšie. 4-krát rýchlejšie vodíky budú do ľubovoľného miesta vyznačeného na povrchu krabice narážať v priemere 4-krát častejšie a teda častejšie sa aj trafia do diery.

Toto je v súlade s úvahami o tlakoch. Predstavme si, že by v každej polovici nádoby lietala iba jedna molekula a skúmajme, aký veľký tlak táto molekula spôsobí na steny nádoby[2]. Molekula vodíka je 16-krát ľahšia, 4-krát pomalšia, jeden jej náraz teda dodá stene nádoby 4-krát menej hybnosti ($\Delta p = 2mv$). Nakoľko však zrážky nastávajú 4-krát častejšie, táto molekula spôsobí vo vnútri nádoby rovnaký tlak ako molekula kyslíka. Toto súhlasí so zadaním (tlaky ozaj mali byť rovnaké) a stavovou rovnicou plynu (keby sa plyny líšili iba v tlakoch, odporovalo by jej to).

Skombinujme úvahy z predchádzajúcich dvoch odstavcov. Molekuly vodíka prechádzajú na druhú stranu nádoby častejšie, každá molekula však pôsobí na steny tej časti nádoby, v ktorej je akurát uväznená rovnako veľkým tlakom[3]. Po otvorení diery sa na nejaký čas vytvorí vyššia koncentrácia molekúl na kyslíkovej strane a v tejto časti podnádoby bude teda aj väčší tlak. Postupom času sa samozrejme vytvorí rovnováha, v ktorej budú obidva plyny rozptýlené náhodne po celej nádobe.

Pomaly sa rozlúčime s riešiteľmi B-čka a prejdime k výpočtovo najťažšej časti úlohy. Nazvime f frekvenciu nárazov molekúl na plochu S, ($f = M/\Delta t$ t.j. počet nárazov molekúl na plochu S za nejaký čas Δt). Čas, za ktorý v priemernom prípade nastane prvý náraz, bude teda[4] $t = 1/f$. Pri náraze na stenu zmení molekula svoju hybnosť o $2mv$, čím silovo pôsobí na stenu. Za čas Δt dopadne na plochu S M molekúl, čo spôsobí tlak[5]

$$p = F / S = \frac{\Delta hybnosti}{\Delta t S} = \frac{M 2mv}{\Delta t S} \qquad (1)$$

V našom prípade je situácia o máličko komplikovanejšia, lebo stenu bombardujú dva rôzne plyny, teda f = celkový počet nárazov za čas Δt je zrejme súčet počtu nárazov molekúl vodíka

[2] Toto je možno trochu mätúce, uvedomte si však, čo je to tlak. Vezmete množstvo hybnosti, ktorým molekuly zapôsobia na vybraný kus steny a túto hybnosť predelíte časom, za ktorý sa táto hybnosť odovzdala. Z náhodnosti pohybu molekúl je potom jasné, že tlak bude mierne fluktuovať. Keď máme jedinú molekulu v nádobe, tak jediný rozdiel je, že pri jednej molekule budú fluktuácie percentuálne väčšie.

[3] Celý proces je izotermický, teplota plynov sa počas celého procesu nemení (nakoľko nie je nič, čo by molekuly zrýchľovalo alebo spomaľovalo)

[4] Vysvetlenie, prečo platí $t = 1/f$, sme trochu odflákli a toto sa ani neplánuje veľmi zmeniť. Chyby vychádzajúce z neznalosti tohto vzťahu sa preto ani nepokutovali veľkou bodovou zrážkou. Je jasné, že medzi t a f musí existovať nejaký podobný vzťah, nie je však zďaleka jasné, prečo práve takýto. Existuje viacero úvah, ako na to prísť, my tu uvedieme MHS (metódu hrubej sily). Predstavte si, že hádžem hracou kockou, ktorá má pravdepodobnosť padnutia šestky $p = 1/6$. Šanca, že šestka padne na prvý raz je 1/6, na druhý raz 5/6*1/6 na tretí $(5/6)^2 1/6$ atď. Keď zrátam (keď neviem inak, môžem aj numericky, stačí sumovať prvých cca 15 členov) výslednú priemernú dobu čakania na šestku, dostávam práve 6, vo všeobecnosti dostávam $1/p$. Spravte to, je to poučný výpočet. Naša situácia je ako keby veľmi rýchle hádzanie kockou s veľmi malým p, čo nám umožňuje aplikovať „kockatý“ výpočet aj na plyn.

[5] Rozmyslite si, prečo sem dosadzujeme práve strednú rýchlosť molekuly a nie napríklad strednú kvadratickú rýchlosť

(M_{H_2}) a počtu nárazov molekúl kyslíka (M_{O_2})za čas Δt. Keďže v oboch podkrabiciach je tlak p, tak rovnica (1) platí osobitne pre vodík a osobitne pre kyslík. Z toho môžeme určiť:

$$M_{H_2} = \frac{pS\Delta t}{2m_{H_2}v_{H_2}} \tag{2}$$

a pre M_{O_2} analogicky. Teraz je už všetko pripravené na to, aby sme vypočítali čas t. Po dosadení vzťahu (2), vyjadrení priemernej rýchlosti molekuly podľa vzťahu zo zadania ($v = \sqrt{2kT/m\pi}$) a pár úpravách dostávame:

$$t = 1/f = \frac{\Delta t}{M} = \frac{\Delta t}{M_{H_2} + M_{O_2}} = \ldots = \sqrt{\frac{2kT}{\pi}}\frac{2}{pS}\left(\frac{\sqrt{m_{H_2}m_{O_2}}}{\sqrt{m_{H_2}} + \sqrt{m_{O_2}}}\right)$$

Vážený pán Objemovič, táto úloha je myslená ako pozitívna reklama firmy O_2 pre inteligentných zákazníkov. Z výsledku prvej úlohy vyplýva, že pri dosť veľkom tlaku na náš trh nepotrvá dlho a cez dvere vašej firmy začne prerozdeľovanie zákazníkov. Zrejme (podľa druhej úlohy) cez vaše dvere budú oveľa častejšie lietať zákazníci konkurenčného mobilného operátora pracovne nazvaného H_2, čo vám poskytuje možnosť osloviť ich lákavou ponukou. Za porozumenie, najlepšie vo forme sponzorského daru, vopred ďakujeme.