

Hrátky s toroidmy

Prvá vec, ktorú je treba urobiť je nepodľahnúť panike. Keby Kamila videla vo vesmíre obrovské lietajúce kačice tak by sa táto úloha riešila tak isto.

Intenzita gravitačného poľa¹ sa počíta veľmi podobne ako intenzita elektrického. Pre jeden bod² poznáme vzorce:

$$E_g = \kappa \frac{m}{r^2} = \kappa \rho_m \frac{V}{r^2} \qquad E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \rho_e \frac{V}{r^2}$$

Obidva vzorce obsahujú konštantu násobenú výrazom $\frac{V}{r^2}$. Pre telesá iné ako body dostaneme intenzitu poľa tak, že spočítame účinky všetkých bodov daného telesa:

$$E = k \int_V \frac{1}{r^2} dV$$

Celá táto úloha je však len problémom škálovania. Všetky rozmery sú dvakrát väčšie, teda všetky plochy budú zväčšené 2²-krát a všetky objemy 2³-krát, atď.

Geometrické vlastnosti sa pri škálovaní zachovávajú. Druhá situácia *vyzerá* tak isto ako prvá, keby sme sa na ňu pozerali 2-krát zblízka. Preto platí, že vzdialenosť každého bodu toru od lode je v druhej situácii 2-krát väčšia.

Okrem vzdialeností sa však mení ešte jedna veličina - objem toru. Objem sa zosemnásobí. Toto si môžeme predstaviť tak, že každý bod má osemnásobne väčší objem, a môžeme celú druhú situáciu zapísať myšlienkovu správne a veľmi neexaktne ako:

$$E = k \int_V \frac{1}{(2r)^2} 8dV = 2k \int_V \frac{1}{r^2} dV$$

Keďže integrál sa nachádza v oboch vzorcoch na výpočet celkových intenzít, nebudem s ním nič robiť a jednoducho si vyjadríme jeho hodnotu z danej intenzity gravitačného poľa:

$$E_g = \kappa \rho_m \int_V \frac{1}{r^2} dV \qquad E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} \rho_e 2 \int_V \frac{1}{r^2} dV$$

Na záver si vyjadríme intenzitu elektrického poľa z intenzity gravitačného:

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} \rho_e 2 \frac{E_g}{\kappa \rho_m} \quad \text{Ok, nemam co dodat. 9 bodov, Mišo}$$

V mojom riešení som integrály použil pre názornosť toho, že pracujeme s telesami a nie s bodmi a tiež preto, že ak by sme si integrál vypočítali, skutočne by sme dostali jeho dvojasobnú hodnotu pre škálovanie celej situácie dvojkou. Ak by som použil sumy, tak by bolo použitie $8\Delta V$ úplne najviac v poriadku...

¹ak nám stačí Newtonova teória

²alebo iné guľovo symetrické telesá, alebo ak sa spoliehame na centrálnosť sily