Mário Lipovský, IV.B, Gymnázium Jura Hronca, Novohradská 3, 821 09 Bratislava

Kaskáda

Ako bolo odporúčané v zadaní, riešenie tejto úlohy som simuloval v exceli. V 25-ich stĺpcoch máme výšky hladín v nádobách. V každom čase do nádob z jednej strany vteká a z druhej strany vyteká voda. Keďže úlohu riešime pomocou malých prírastkov, nový stav vždy vypočítame z predošlého. $h_i(t) = h_i(t-\Delta t) - odtekajuca_{z\ i}(t-\Delta t) + pritekajuca_{z\ i-1}(t-\Delta t)$

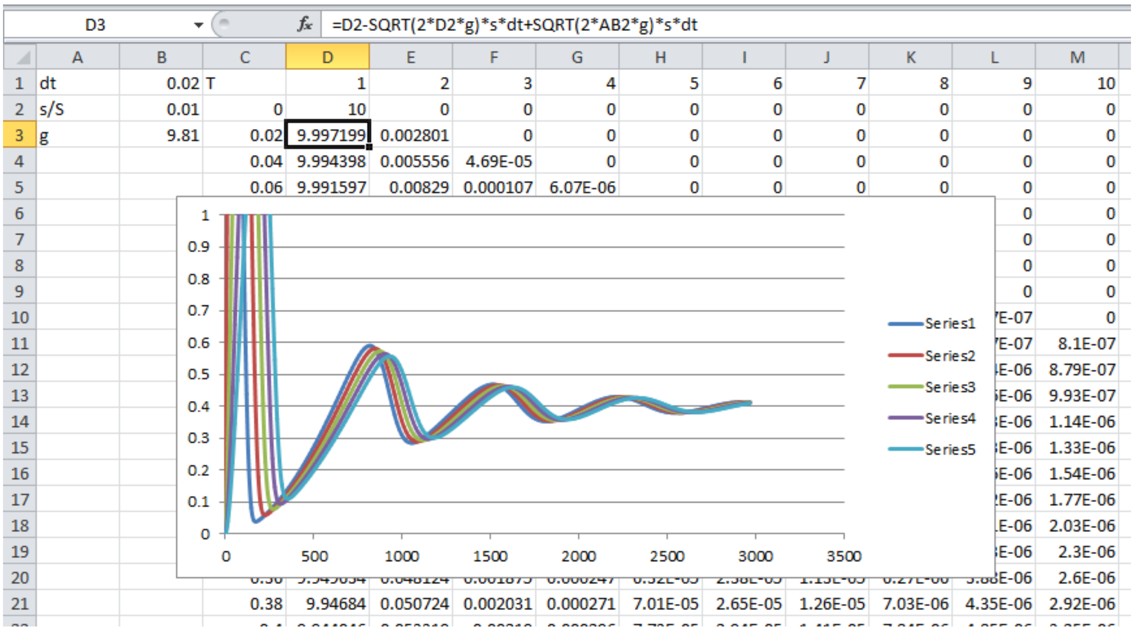
Rýchlosť vody vytekajúcej z nádoby vieme určiť známym vzťahom odvodeným zo zákona zachovania mechanickej energie, $v = \sqrt{2hg}$. Keďže poznáme obsah podstavy valcovej nádoby, S, vieme objem vody prevádzať na výšku hladiny, a vďaka ploche otvoru, s, vieme určiť prietok v čase. Objem vytekajúcej vody za Δt vieme zapísať ako $V_{odtekajuca} = \sqrt{2hg} \cdot s \cdot \Delta t$.

Celkovo teda zmenu stavu v nádobe i[1] zapíšeme takto:

$$h_i(t) = h_i(t-\Delta t) - \frac{s}{S}\sqrt{2gh_i(t-\Delta t)} \cdot \Delta t + \frac{s}{S}\sqrt{2gh_{i-1}(t-\Delta t)} \cdot \Delta t$$

Kvôli tomu, že sa vždy pozeráme na predošlý stav, sa nám v prvých krokoch voda rozlieva postupne[2] ale tiež nám vďaka tomu z nádoby odtečie také množstvo vody, ako pritečie[3]

Výsledky simulácie


D3 =D2-SQRT(2*D2*g)*s*dt+SQRT(2*AB2*g)*s*dt

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	dt	0.02	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	s/S	0.01	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	g	9.81	0.02	9.997199	0.002801	0	0	0	0	0	0	0	0
4			0.04	9.994398	0.005556	4.69E-05	0	0	0	0	0	0	0
5			0.06	9.991597	0.00829	0.000107	6.07E-06	0	0	0	0	0	0
6												0	0
7												0	0
8												0	0
9												0	0
10													0
11													8.1E-07
12													8.79E-07
13													9.93E-07
14													1.14E-06
15													1.33E-06
16													1.54E-06
17													1.77E-06
18													2.03E-06
19													2.3E-06
20													2.6E-06
21			0.38	9.94684	0.050724	0.002031	0.000271	7.01E-05	2.65E-05	1.26E-05	7.03E-06	4.35E-06	2.92E-06

Na obrázku vidno časť dát, ktoré majú celkovo asi 150000 riadkov a graf h[m] od t[s], ktorý ukazuje výšku hladiny vody v prvých piatich nádobách. Kvôli nerovnomernému rozmiestneniu vody z niektorých nádob voda vyteká rýchlejšie ako doteká, a naopak, teda sa maximum hladiny postupne presúva medzi nádobami a výška hladiny v nádobách osciluje. Rozdiely v hladinách sa však snažia zmenšovať - dosiahnuť energeticky najvýhodnejší stav a tak po dostatočne dlhom čase sa hladiny všetkých nádob ústália na hodnote $10/25 = 0.4$m. Okamžitým prečerpávaním sme totiž vytvorili situáciu, ako keby boli všetky nádoby na rovnakej úrovni, sú si teda rovnocenné. Časov, kedy nastalo $h_5 = 0,45$m je 6:

Δt=0.02 s	63,42 s	285,3 s	775,06 s	1034,34 s	1557,92 s	1685,86 s
Δt=1 s	64 s	284 s	775 s	1035 s	1553 s	1692 s

Časy s rôznymi Δt uvádzam ako dôkaz presnosti už pri $\Delta t = 1$s.

[1]do prvej nádoby vteká voda z poslednej, teda keď sa pozeráme na 1. nádobu a potrebujeme hodnotu $i-1$, odkazujeme sa na poslednú

[2]V prvom kroku je voda v 2 nádobách, v druhom v troch, atď.

[3]Ak by sme totiž brali hodnoty z terajšieho stavu nádoby $i-1$, z tejto nádoby by už bola odtečná voda a pri výpočte pritekajúcej vody do i by sme už počítali s nižšou hladinou h_{i-1}