

FKS úloha A1

Prvá a veľmi dôležitá vec je, že koľko je na Zemi listov. Poďme pekne postupnými odhadmi (takými rádovými):

- hmotnosť priemerného jesenného (teda suchého) listu je asi 1 g
- na jednom strome je takýchto listov priemerne 10 000 (kuknem – vidím :D)
- ak zohľadníme polárne oblasti, púšte, polia a iné nelesnaté zóny, odhadnime, že v priemere rastú na ploche 50 m² asi 2 stromy
- plocha súše je 30% zemského povrchu (polomer Zeme je 6378 km)

Ták. Tieto veci stačí iba prenásobiť, a dostaneme hmotnosť všetkých listov na Zemi:

$$M = 10^{-3} \text{ kg} \cdot 10^4 \cdot \frac{2}{50 \text{ m}^2} \cdot 0,3 \cdot 4 \pi (6,378 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \approx 6 \cdot 10^{13} \text{ kg}$$

Pričom nezávislý zdroj (answers.wiki.com) nám tvrdí (s použitím našich prvých 2 odhadov), že hmotnosť je 5 . 10¹³ kg. Náš odhad teda nebol až tak veľmi od veci.

Ďalší skok k úspechu je porátanie si momentu zotrvačnosti takých listov. Keďže listy sú po Zemi rozmiestnené nehomogénne, je to dosť dosť dosť ťažké. Model sme si preto zjednodušili, a preto uvažujeme, že listy sú rovnomerne rozprestrené do tenkej guľovej šupky, ktorá pokrýva celú Zem.

Spočítať moment zotrvačnosti takej šupky nie je zložité. Nakrájame si ju na maličké obruče s polomerom, ktorý sa mení a s maličkou hrúbkou dx. Výsledok je:

$$I = \frac{2}{3} m R^2$$

Hm, neviem, či je pre tento príklad dôležitý postup toho momentu, keby niečo, odpíšem na mail :-)

No ale teraz konečne prídme k zmene rotácie. Dôležitý zákon zachovania je v tomto prípade zákon zachovania momentu hybnosti L. Keďže na Zem pri padaní listov nepôsobí žiadny vonkajší moment sily, moment hybnosti musí byť stále rovnaký.

Pred opadnutím a po opadnutí musí platiť teda, že

$$\begin{aligned} L_{pred} &= L_{po} \\ I_{pred} \omega_{pred} &= I_{po} \omega_{po} \end{aligned} \quad \text{OK}$$

Takže so zmenou momentu zotrvačnosti sa zmení aj uhlová rýchlosť otáčania, čiže aj perióda!
Vidíme, že

$$\frac{I_{pred}}{I_{po}} = \frac{\omega_{po}}{\omega_{pred}} = \frac{\frac{2\pi}{T_{po}}}{\frac{2\pi}{T_{pred}}}$$

$$\frac{I_{pred}}{I_{po}} = \frac{T_{pred}}{T_{po}}$$

Stačí nám poznať iba pomer :-) Moment zotrvačnosti je taký, že s ním môžeme robiť superpozície – tj. celkový moment zotrvačnosti Zeme sa dá napísať ako súčet momentu zeme bez listov a momentu listov samotných. Rozdiel momentu lístia pred a po spadnutí je akurát v R – zmenší sa v priemere (keďže stromy máme veľmi rôzne olistené, nič iné ako rádivý priemer nám nepomôže) o 10 metrov. Navyše, wikipédia udáva moment zotrvačnosti Zeme samotnej (v ktorej je síce započítaný aj moment listov PRED) ako $I_{Zem} = 8,04 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2$: poznáme teda už všetko, čo poznať chceme, a môžeme počítať:

$$\frac{I_{pred}}{I_{po}} = \frac{I_{Zem}}{I_{Zem} - I_{L_{pred}} + I_{L_{po}}} = \frac{I_{Zem}}{I_{Zem} - \frac{2}{3} M (R_{pred}^2 - R_{po}^2)} = \frac{I_{Zem}}{I_{Zem} - \frac{2}{3} M ((R_{Zem} + 10 \text{ m})^2 - R_{Zem}^2)}$$

Po dosadení všetkých možných aj nemožných hodnôt dostávame, že pomer momentov, a teda aj periód je:

$$\frac{T_{pred}}{T_{po}} \approx 1.00000000000000006 = 1 + 6 \cdot 10^{-17}$$

Znamená to, že perióda sa o malinkatú trošku **zníži**. Číslo za jednotkou je však také malé, že rozdiel v rotácii o 1 sekundu by nastal za asi 550 miliónov rokov. To je však nereálne, pretože na jar sa zasa všetok materiál zo Zeme vynesie zasa do výšky, kde sa vytvárajú nové listy, takže moment zotrvačnosti sa vráti zasa do pôvodného stavu, rovnako ako doba rotácie Zeme. Môžeme konštatovať teda, že na jeseň sa nemusíme báť, pretože tento efekt je absolútne zanedbateľný :-)

Moment zotrvačnosti Zeme mas odhadnutý dobre, hmotnosť listov mas tiež odhadnutú dobre, ale výsledok sa napriek tomu lísi o par rádov, čo nie je az tak zanedbateľne. Možno model s tenkou supkou okolo celeho zemskeho povrchu nie je az tak dobrý, vo vzoraku je to ako prsteneček na 45 rovnobežke. Alebo si spravil chybu vo výpočtoch