

Na začiatok si upresníme niekoľko aproximácií, ktoré použijeme. Na začiatok budeme predpokladať, že fotoaparát smeruje na sever. Ďalej, že rovina, v ktorej sa nachádza čip fotoaparátu je kolmá na Zem v mieste vzniku fotky t.j. fotoaparát nie je natočený. Posledná aproximácia vychádza z predpokladu, že fotoaparát nebol veľmi natočený v samotnej rovine, ktorá bola predchýlou spomínaná, správnosť tohto predpokladu asi najlepšie vidno na stožiar na Kráľovej holi, ktorý je paralelný voči hrane fotky v rámci chyby merania. Tieto aproximácie robíme kvôli jednoduchosti, samozrejme existujú metódy aj na nájdenie rotácie fotoaparátu, dostali by sme však nelineárne rovnice, ktorých riešenie by prinieslo relatívne malú pridanú hodnotu, keďže máme veľmi peknú - slušnú fotku :).



Obr. 1: Stožiar je paralelný voči hrane fotky (Ostáva nám len dúfať, že je v smere zvislice aj v skutočnosti :)).

Ďalší predpoklad, ktorý využijeme, je že fotoaparát zobrazuje skutočnosť ako dokonalá tenká šošovka, ktorá príliš nedeformuje obraz - aberácia a podobné chyby. Oprávnenosť tohto predpokladu znovu vyplýva zo samotnej fotky vidíme, že na okrajoch nie je obraz deformovaný, zorný uhol šošovky je malý - nebolo použité rybíe oko, atď.

Teraz sa dostávame k samotnému riešeniu. Na fotke vidíme množstvo kopcov a štítov, ktoré majú dobre definovanú zemepisnú polohu a nadmorskú výšku¹, čo využijeme. Ak si otvoríme elektronickú verziu fotky² zistíme, že bola odofotená fotoaparátom Nikon D70, ktorého čip má rozmery $23,7\text{mm}$ na dĺžku a $15,5\text{mm}$ na výšku resp. 3008 a 2000 pixelov³. Túto informáciu, znovu z princípu nepotrebujeme, vedeli by sme ju vybucháť zo sústavy asi 6 rovníc, no prečo ju nevyužiť, keď ju máme. Takto poznáme "kalibráciu" fotoaparátu, čiže vieme presne povedať aký veľký je obraz Gerlachovského štítu vytváraný šošovkou na povrchu čipu vo fotoaparáte.

Na určovanie polohy zavediem karteziánsku sústavu súradníc s počiatkom na Kráľovej holi a všetky pozície (x, y, z) budem určovať voči nej, keďže takáto sústava súradníc sa nám zíde.

Kopec	x [m]	y [m]	z [m]	Px [m]	Py [m]
Kriváň	-10177	561	31172	0,00918	-0,00183
Krátka	-9233	441	31229	0,00815	-0,00160
Ostrá	-8666	417	31226	0,00734	-0,00165
Furkotský štít	-8210	470	31698	0,00676	-0,00176
Satan	-6291	488	31343	0,00474	-0,00172
Mengusovský štít	-5794	505	33822	0,00392	-0,00181
Žabia veža	-4549	403	32867	0,00249	-0,00166
Rysy	-3771	570	32992	0,00166	-0,00184
Vysoká	-3292	614	32245	0,00124	-0,00189
Gánok	-2615	528	32430	0,00039	-0,00179
Končistá	-1868	604	30546	-0,00037	-0,00183
Batizovský štít	-1157	515	31403	-0,00121	-0,00174
Gerlach	-410	721	31286	-0,00207	-0,00197
Bradavica	1058	543	32058	-0,00383	-0,00180
Ladový štít	3047	694	35041	-0,00587	-0,00201
Slavkovský štít	3267	519	31558	-0,00631	-0,00177
Baranie rohy	4153	593	35509	-0,00698	-0,00192
Pyšný štít	4940	690	35062	-0,00788	-0,00201
Lomnický štít	5333	699	34729	-0,00832	-0,00202
Kežmarský štít	5823	625	35210	-0,00880	-0,00195
Orlová	-3930	-93	734	0,00522	0,00154
Kráľova hoľa	0	0	0	-0,00386	0,00145

Zároveň zobrazím všetky body na fotke stredovo súmerne podľa jej stredy a určím skutočné pozície (Px, Py) (v metroch) všetkých bodov na takto novovzniknutej fotke voči jej stredy. Súradnice kopcov voči Kráľovej holi

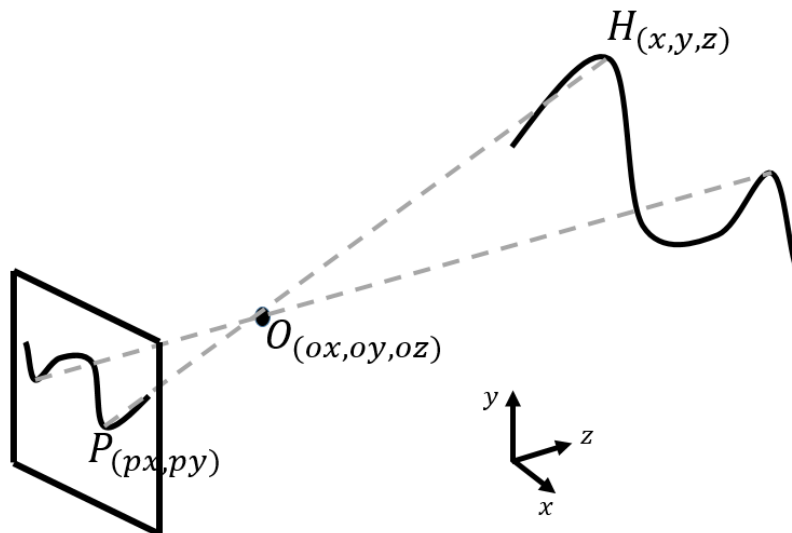
¹Napríklad http://sk.wikipedia.org/wiki/Gerlachovský_štít

²http://fks.sk/~andrej/panorama_velka.jpg

³http://en.wikipedia.org/wiki/Nikon_DX_format

sme schopný určiť rádovo na metre, horšie je to pri súradniciach obrazu, tam sa dopúšťam pomerne veľkých relatívnych chýb - rádovo percentá. Pri výpočte som predpokladal, že na fotke vieme odmerať súradnice bodov s presnosťou ± 4 pixely, v oboch smeroch, keďže niektoré kopce sú celkom "roztiahnuté". Zároveň som asi tri kopce vynechal, keďže som nevedel rýchlo nájsť pre nich GPS súradnice resp. nadmorskú výšku a bol som lenivý ich hľadať a nevedel som nájsť vrchol kopca "Bartková".

Po trochu analytickej geometrie a zamyslenia sa: sme teraz schopný zistiť pozíciu (O_x, O_y) kamery voči



Kráľovej holi, ak zoberieme skutočné pozície kopcov a pozície obrazov na čipe pre "Tubovoľné dva" kopce (Musíme si dať pozor na kopce, ktoré sú relatívne blízko pri sebe = veľká relatívna odchýlka). Na celú situáciu sa budeme pozerat v rovine xy .

Z analytickej geometrie máme v 2D priestore priesečník dvoch priamok, ktoré sú určené bodmi (x_1, y_1) a (x_2, y_2) resp. (x_3, y_3) a (x_4, y_4) - súradnice skutočných kopcov a ich obrazov na čipe, ten musí byť zároveň aj pozíciou kamery resp. stredu šošovky, čo vyplýva z toho, ako sa správajú lúče prechádzajúce stredom spojky:

$$\left(\frac{(x_1 y_2 - y_1 x_2)(x_3 - x_4) - (x_1 - x_2)(x_3 y_4 - y_3 x_4)}{(x_1 - x_2)(y_3 - y_4) - (y_1 - y_2)(x_3 - x_4)}, \frac{(x_1 y_2 - y_1 x_2)(y_3 - y_4) - (y_1 - y_2)(x_3 y_4 - y_3 x_4)}{(x_1 - x_2)(y_3 - y_4) - (y_1 - y_2)(x_3 - x_4)} \right) = (O_x, O_y)$$

Zároveň platí, keďže stred čipu je len posunutý v z -smere o ohniskovú vzdialenosť oproti stredu šošovky - miesta fotoaparátu, pričom rovina šošovky a rovina čipu sú paralelné roviny (Nepredpokladáme, že používame astronomické ďalekohľady, na tvorbu fotografií, takže ohnisková vzdialenosť $\ll 1$ m, a preto je stred šošovky zároveň pozíciou celého fotoaparátu):

$$x_1 = P x_1 + O x$$

$$x_3 = P x_2 + O x$$

$$y_1 = P y_1 + O y$$

$$y_3 = P y_3 + O y$$

Vložením vzťahov do rovnosti so súradnicami priesečníka, získame dve rovnice o dvoch neznámych, ktoré keď "pohodlne" vyriešime získame vzťahy pre jeho súradnice v závislosti od skutočných polôh a obrazov kopcov na čipe. Práve preto sme robili všetky tie predpoklady a zistili si údaje z metadát fotky, aby rovnice mali vždy len 2 neznáme. Tie môžeme riešiť pre všetkých $\binom{22}{2} = 221$ kombinácií výberu dvojice kopcov, čo sa dá urobiť trápny for-cyclom v hocikakom programovacom jazyku, len si musíme dať pozor, aby sme nevybrali do dvojprvkovej podmnožiny ten istý kopec dvakrát.

$$O_x = \frac{P x_3 P y_1 x_2 - P x_1 P y_3 x_4 - P x_1 P x_3 y_2 + P x_1 P x_3 y_4}{P x_3 P y_1 - P x_1 P y_3}$$

$$O_y = \frac{P y_1 P y_3 x_2 - P y_1 P y_3 x_4 - P x_1 P y_3 y_2 + P x_3 P y_1 y_4}{P x_3 P y_1 - P x_1 P y_3}$$

Po spracovaní 221 kombinácií, odstránení outlierov - pár kombinácií, kde sú kopce blízko pri sebe a kombinácií, odstránení dvojíc, kde celková relatívna chyba (Všimnime si, kolkokrát vystupujú vo vzťahoch pozície kopcov

na obraze !) prevýšila 15% pre x-ovú súradnicu, 30% pre y-ovú súradnicu, vypočítaní smerodajnej odchýlky a priemeru pre 118 bodov, ktoré zostali dostávame:

$$Ox \approx -2280 \pm 560m$$

$$Oy \approx 1080 \pm 285m$$

Ostáva nám už len určiť Oz , to vieme určiť na základe veľkosti kopcov na čipe - vzdialenosť kopca od stredu čipu a skutočnej vzdialenosti kopca od čipu v rovine xy (Podobnosť trojuholníkov pri zobrazovaní predmetu spojkou):

$$\frac{\sqrt{(x - Ox)^2 + (y - Oy)^2}}{\sqrt{(Px)^2 + (Py)^2}} = \frac{z - Oz}{f}$$

kde f je ohnisková vzdialenosť objektívu - $70mm$, čo znovu vieme z fotky (metainformácie v súbore). Čo pre počítaní pre 22 kopcov, odstránení pár outlierov a vypočítaní smerodajnej odchýlky:

$$Oz \approx -25500 \pm 5000m$$

Všetky súradnice sú uvádzané vzhľadom na Kráľovú hoľu, po prepočítaní na zemepisnú dĺžku, šírku a nadmorskú výšku:

$$Zem.šírka = 48^{\circ}39'15''S \pm 2'35''$$

$$Zem.dĺžka = 20^{\circ}6'28''V \pm 14''$$

$$Nadm.výška = 3010 \pm 285m$$

Ak by sme orezali viac outlierov, tak by sme sa dopracovali k lepšiemu výsledku, ak by sme chceli určiť polohu ešte presnejšie potrebovali by sme viac referenčných bodov, avšak musíme si uvedomiť, že každý je zafaržený aj relatívnou odchýlkou, preto by bohato stačilo zväčšiť rozlíšenie pri zachovaní plochy čipu. Našiel som, že dnes by novší model od rovnakej firmy s štvornásobným rozlíšením, zmenšil relatívnu odchýlku na polovicu pri meraní pozície jedného kopca, čo znamená asi 20-násobne menšiu relatívnu odchýlku pri meraní pozície x a y - rádovo desiatky metrov, pri z - rádovo stovky metrov. Vidíme, že zvyšovanie rozlíšenia má pomerne veľký vplyv, musíme si však uvedomiť, že to nemôžeme pri zachovávaní plochy čipu nemôžeme robiť donekonečna, keďže sme limitovaný vlnovou dĺžkou svetla.

Možno však, a je to dosť pravdepodobné, existuje aj lepší postup ako ten môj s menšou chybou.

Na záver pohľad z daného miesta, ktorý je v peknej zhode s fotografiou, škoda, že má Google Earth také nízke rozlíšenie :(.

