

Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Ping-pong

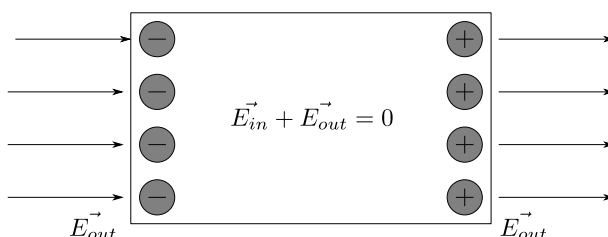
vzorák **Vladko**, opravoval **Vladko**

Začnime najjednoduchším prípadom, a to homogénnym (t. j. rovnakým vo všetkých bodoch priestoru) elektrickým poľom, zobrazeným na prostrednom obrázku. Celý vzorák pojmeme trochu edukatívne a pokúsime sa podrobnejšie vysvetliť, ako sa správajú rôzne látky v elektrickom poli.

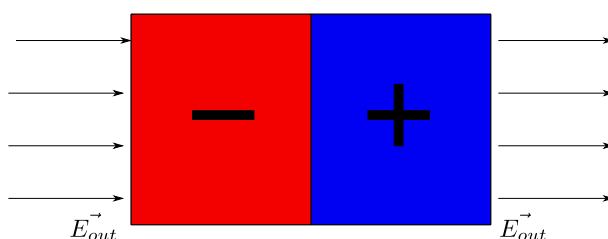
Napríklad kovy. Atómy kovu sú usporiadané v kryštálovej mriežke, kde kmitajú okolo rovnovážnych polôh. Vo valenčnej vrstve majú aspoň jeden neviazaný elektrón, ktorý je schopný sa voľne pohybovať po kryštáli. Vložíme kov do homogénneho elektrického poľa, teda na voľné elektróny bude pôsobiť sila proti smeru šípok na obrázku (keďže majú záporný náboj). To sa bude diať, kým v látke bude nenulová elektrická intenzita. Z toho vyplýva, že sa presunie toľko elektrónov, koľko je potrebných na vytvorenie elektrického poľa rovnakej veľkosti ako má vonkajšie pole. Samotný kov sa nepohybuje.

Teraz si predstavme, že máme objekt, ktorý je pevne rozdelený na dve časti. V jednej prevláda záporný náboj a v druhej kladný. Takýto objekt sa nazýva dipól a po vložení do homogénneho elektrického poľa sa otočí kladnou časťou v smere vektora elektrickej intenzity a zápornou opačne. Samotný dipól sa okrem otočenia do vhodnej polohy nepohybuje.

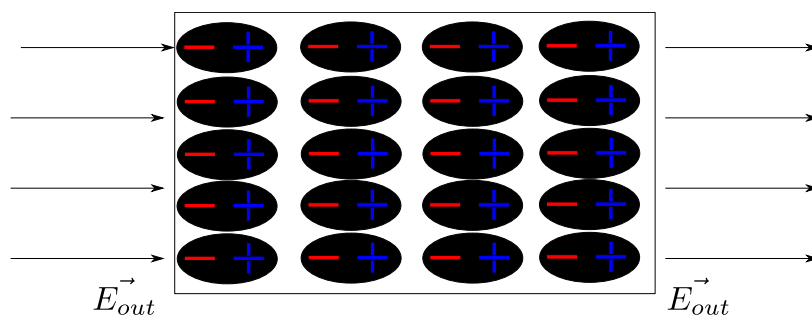
Dielektrikum (t. j. izolant) je zložené z molekúl, ktoré nemajú voľné elektróny a sú malými dipólmi. Väzby v molekulách sú totiž vytvorené ako väzby medzi dvojicami elektrónov a rôzne atómy priťahujú elektrónové páry rôznou silou. „Silnejšie“ atómy sú zápornejšie a „slabšie“ sú kladnejšie. Po vložení dielektrika do homogénneho poľa sa dipóliky v látke natočia tak, ako bolo popísané vyššie. Avšak látka samotná sa neotáča a ani nepohybuje, teda ping-pongová loptička bude jednoducho stáť na mieste.



Obrázok 1: Kovový kryštál v homogénnom elektrickom poli. Náboje sa usporiadajú tak, že vnútri kryštálu je pole nulové.



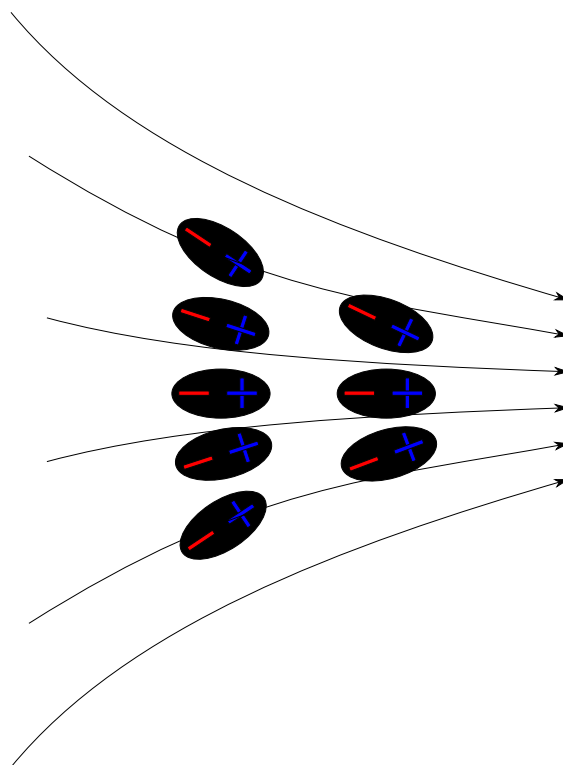
Obrázok 2: Elektrický dipól v homogénnom elektrickom poli sa natočí podľa smeru siločiar.



Obrázok 3: Dielektrikum v homogénnom elektrickom poli si možno predstaviť ako zložené z drobných dipólov, ktoré sa vedľa jednotlivo natáčajú.

Keď sme zvládli homogénne pole, môžeme sa vrhnúť na nehomogénne. Pri kove sa elektróny rozmiestnia po povrchu tak, že vnútri látky je intenzita elektrického poľa rovná nule. Na povrchu sa záporný náboj rozmiestni na jednu stranu, kladný na druhú. To si možno predstaviť ako vytvorenie dvoch nábojov rovnakej veľkosti, ale opačného znamienka, nachádzajúcich sa v rôznych miestach. Keďže elektrické pole je tentokrát nehomogénne (rôzneho smeru, či veľkosti v rôznych miestach), bude na každý náboj pôsobiť iná sila, v dôsledku čoho sa guľa pohne.

V prípade dipólu je situácia analogická. Čiže časť, kde sú čiary na obrázku redšie, bude ťahaná elektrickou silou menej, než časť, kde sú čiary hustejšie. Takže dipól sa bude pohybovať v smere do hustejších čiar – na prvom obrázku doprava a na treťom obrázku doľava. V dielektriku sa každý malý dipól otočí v smere siločiar a bude ťahaný do hustejšieho poľa. Z toho vyplýva, že loptička pri vložení do poľa zobrazeného na prvom obrázku, sa pohybuje doprava a na poslednom obrázku doľava.



Obrázok 4: Dielektrikum v nehomogénnom poli. Jednotlivé dipóly sa natočia v smere siločiar, no na každý jeden pôsobí nenulová sila, v dôsledku nehomogenity v súčte nenulová, teda dielektrikum ako celok sa bude pohybovať.

Predchádzajúca argumentácia je približne niečo, čo sme od vás očakávali. Ale zrejme vám neušlo, že dané zdôvodnenia sú celkom vágne, a aj keď síce kvalitatívne chápeme, čo sa deje, chýbajú nám kvantitatívne argumenty. V nasledujúcej časti skúsime načrtnúť dôslednejší argument. Upozorňujeme, že nasledujúca diskusia, hoci nie je zložitá, je vysoko nad rámec tejto úlohy. Inými slovami, nemusíte sa trápiť, ak neporozumiete všetkému, ale odporúčame prečítať.

Pokročilá argumentácia

Pomôže nám, ak si predstavíme konkrétne nehomogénne pole. Zoberieme to najjednoduchšie, konkrétne pole bodového náboja. Vytvoríme ho tak, že zoberieme bodový náboj a niekam ho prilepíme, aby sa nemohol hýbať. Náš kov je ideálny vodič, pod vplyvom poľa sa náboje v ňom preskupia tak, aby pole vnútri bolo nulové. Samotné naindukované náboje sú v kove iba na povrchu. Takto preskupené náboje ovplyvnia vonkajšie pole. Prečo? Ako iste viete, elektrické a magnetické polia sa správajú lineárne. To znamená, že ak máme pole od viacerých nábojov, výsledné pole je iba súčtom polí od jednotlivých nábojov. Keďže pole od bodového náboja nie je homogénne, toto preskupenie nebude rovnomerné (niekde bude indukovaný náboj na povrchu hustejší, inde redší).

Teraz si predstavme, že kov je v čiernej škatuľke, ktorá samotná svojou prítomnosťou vôbec neovplyvňuje elektrické pole a z fyzikálneho hľadiska nezmení situáciu. Nevedeli by sme, čo je vnútri čiernej škatuľky, iba by sme videli, ako sa zmenilo vonkajšie pole. Na základe nášho pozorovania by sme si mohli tipnúť, čo je v čiernej škatuľke. Bohužiaľ, nevedeli by sme s úplnou určitosťou povedať, čo je vnútri škatuľky. Rovnakú zmenu vonkajšieho poľa totiž spôsobuje dvojica opačných nábojov, ktoré sú od seba trochu vzdialené.

A teraz ide asi najdôležitejšia časť našich úvah. Dvojica nábojov v pevnej vzdialenosti od seba zmení elektrické pole rovnako ako pridaný vodič. Na dvojicu nábojov v nehomogénnom poli pôsobí určité sila a pohybujú sa. Z toho vyplýva, že aj vodič, ktorý by rovnako menil pole, sa musí pohybovať.¹ Keďže naše dva efektívne náboje sú v princípe tým, čo sme pred tým nazývali dipól, môžete si premyslieť, že rovnaký argument zbehne aj pre dielektrikum.

Avšak, neprejde rovnaký argument aj pre homogénne elektrické pole? Neprejde, a dôvod je vskutku poetický a krásny. V našej guľôčke sa zase v princípe vytvorí dipól. Predstavme si, že homogénne pole je vytvorené nejakým súborom nábojov. Pokiaľ chceme spočítať silu, ktorou pôsobia tieto elektróny na guľu, stačí sčítať dokopy všetky sily, ktorými pôsobí dipól na všetky náboje, ktoré vytvárajú elektrické pole (toto je Newtonov zákon akcie a reakcie, teda sila, ktorou pôsobí dipól na elektróny vytvárajúce pole musí byť rovnaká ako sila, ktorou pôsobia tieto elektróny na dipól).

Aký súbor nábojov vytvorí homogénne pole? Prezradíme vám, že je to nekonečná rovina, v ktorej sú rovnomerne spojito rozložené náboje.² Všetky tieto náboje sú znovu prilepené a nemôžu sa pohnúť. Teraz si zoberme kruh v tejto rovine, a spočítame aká veľká sila od bližšieho z dvoch efektívnych nábojov naň pôsobí. Od vzdialenejšieho náboja na taký istý kruh pôsobí menšia sila, avšak môžeme zobrať o niečo väčší kruh, na ktorý bude pôsobiť rovnaká sila od druhého náboja, ako na menší kruh od prvého. Keďže platňa je nekonečná a náboje sú prilepené, nech zoberieme prvý kruh ľubovoľne veľký, vždy nájdeme druhý väčší a celková sila bude v súčte nulová. Preto sa v homogénnom poli kov ani dielektrikum nepohnú.

Ešte pár slov k hodnoteniu. Zaujímalo nás iba pohybová ping-pongová loptička (dielektrika). Pravdaže, ako to dobrým zvykom býva, hodnotila sa hlavne argumentácia a porozumenie problematike.

¹ Ak by vám to predsa len nedalo spať, že či naozaj vieme nájsť také dva náboje, čo menia pole ako vodič, dá sa o tom zistiť viac. Nazýva sa to metóda imaginárnych nábojov. Viac sa dočítate na wikipédii, alebo v kapitole 3.5 tretej edície knihy *Electricity and Magnetism*, Edward M. Purcell. Inak táto knižka je výborný študijný materiálom, odporúčam aj v prípade, ak máte pocit, že vám nie je jasné, o čo sa tu snažíme.

² Kapitola 1.13 vo vyššie spomínanej knihe.

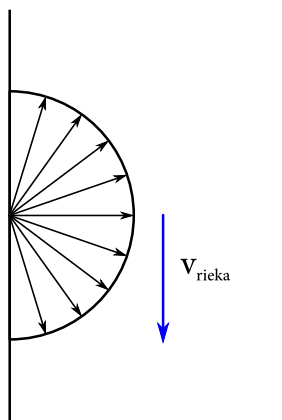
2.2 My, Jara strativší

vzorák **Fero**, opravoval **Fero**

Ako uchopiť tento problém? Ukážeme si dve riešenia, jedno pekné geometrické a druhé matematické a konceptuálnejšie náročnejšie.

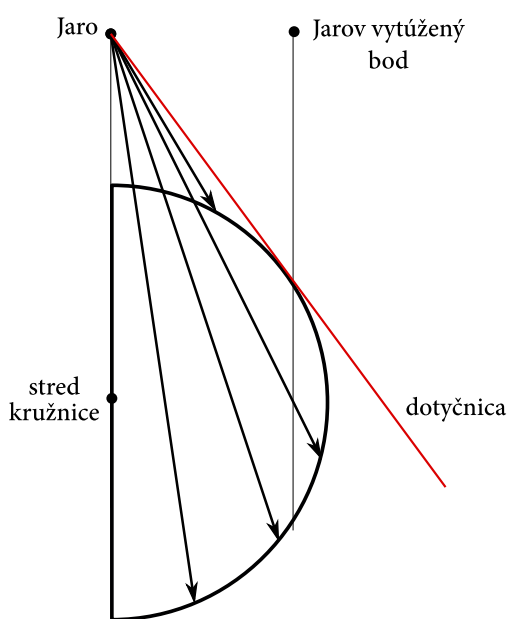
Geometrické riešenie

Celý problém, ktorý je potrebné vyriešiť, je pretransformovať rýchlosť Jara zadanú vzhľadom na rieku do sústavy spojenej so Zemou.



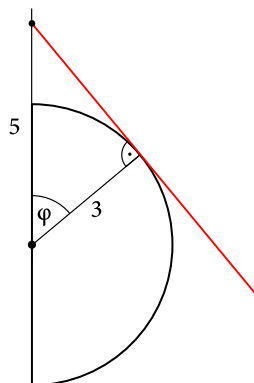
Obrázok 5: Jarova rýchlosť v sústave spojenej s riekou

Jaro sa vzhľadom na vzťažnú sústavu rieky môže vybrať všetkými smermi od 0 po 2π . Konce všetkých možných vektorov jeho rýchlosti tvoria kružnicu. Čo sa stane, ak ku týmto vektorom pripočítame vektor v_r ? Je to ekvivalentné transformácii riečnej vzťažnej sústavy na pohyb vzhľadom na breh. Ku každému z pôvodných Jarových rýchlostných vektorov musíme pripočítať rýchlostný vektor rieky. Ako budú teraz vyzeráť konce všetkých takto posunutých vektorov? Stále budú tvoriť kružnicu, ale jej stred bude posunutý o vektor v_r .



Obrázok 6: Rýchlosť Jara vzhľadom na breh

Z našich nových vektorov musíme vybrať ten, ktorý ukazuje najbližšie k vytúženému bodu na druhom brehu. Nuž a to je dotyčnica k tejto posunutej kružnici.



Obrázok 7: Geometria úlohy

Vidíme, že uhol φ výsledného pohybu vieme určiť ako

$$\varphi = \arccos\left(\frac{3}{5}\right).$$

Pokiaľ pod týmto uhlom prejdeme x -ovú vzdialenosť $L = 0,3$ km, vzdialenosť y určíme ako

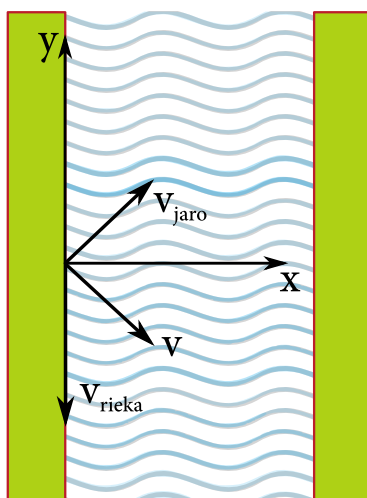
$$h = L \tan\left(\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right).$$

Ak sme si za nulu zvolili bod, kde stojí Jaroslav, platí $y = -h$.

Výsledok je $y = -0,4$ km. Na domácu úlohu si premyslite, prečo stačí uvažovať iba pohyb po úsečkách. Mínus vo výsledku odzrkadľuje fakt, že smer osi y sme zvolili v opačnom smere, ako tečie rieka.

Analytické riešenie

Teraz si ukážeme analytické riešenie, v ktorom pridáme k funkcii vzdialenosti a nájdeme jej minimum pomocou derivácie. Pokiaľ vás predchádzajúca veta vydesila, pokojne preskočte druhú polovicu vzoráku.



Obrázok 8: Súradnice a rýchlosti

Zavedieme súradnicovú sústavu. Ako to už vo fyzike býva, dobrá voľba súradnicovej sústavy je polovica úspechu. Os y zvolíme tak, aby kladný smer bol orientovaný proti smeru toku rieky.

Potom jej rýchlosť je

$$\vec{v}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ km s}^{-1}.$$

Jaro je schopný plávať rýchlosťou $v_0 = 3 \text{ ms}^{-1}$ vzhľadom na vzťažnú sústavu rieky. Poznáme veľkosť jeho rýchlosti. Pokiaľ pláva pod uhlom φ od brehu, vektor jeho rýchlosti je

$$\vec{v}_J = \begin{bmatrix} v_0 \sin \varphi \\ v_0 \cos \varphi \end{bmatrix},$$

Nulový uhol stotožníme so stavom, kedy obe rýchlosti majú ten istý smer. Výsledná rýchlosť Jara vzhľadom na breh je

$$\vec{v} = \vec{v}_J + \vec{v}_r = \begin{bmatrix} v_0 \sin \varphi \\ v_0 \cos \varphi - 5 \end{bmatrix}.$$

Aby sa Jaro dostal na druhý breh, musí preplávať vzdialenosť $L = 0,3 \text{ km}$ v x -ovom smere. Čas, za ktorý sa tam dostane, je

$$t = \frac{L}{v_x} = \frac{L}{v_0 \sin \varphi}.$$

Zatiaľ sa v y -ovom smere posunie o

$$y = v_y t = L \frac{v_0 \cos \varphi - 5}{v_0 \sin \varphi} = \frac{3 \cos \varphi - 5}{10 \sin \varphi}.$$

Nás zaujíma, akú najmenšiu hodnotu môže y dosiahnuť. Čiže hľadáme minimum funkcie $y(x)$. Buď pomocou Wolfram|Alpha³ si vykreslíme graf a určíme minimum, alebo derivovaním zistíme, že minimum je pri polohe

$$y = -0,4 \text{ km},$$

Využili sme pritom matematickú znalosť, ktorá hovorí, že v bode, kde funkcia dosahuje svoju minimálnu alebo maximálnu hodnotu, je derivácia nulová:

$$\frac{dy(x)}{dx} \stackrel{!}{=} 0,$$

odkiaľ

$$x = 2 \arctan \frac{1}{2}.$$

Takže sme si ukázali názorný algoritmickejší postup. Nemusíte sa trápiť, ak ešte neviete, čo je derivácia. Stačí, ak si zapamätáte, že sa pomocou nej dá nájsť extrém funkcie a že so samotným výpočtom vám dokáže pomôcť počítač.

³<https://www.wolframalpha.com/>

2.3 Fáro, ktoré slúži

vzorák **Simon**, opravoval **Arthur**

Ujasnime si najprv, čo znamenajú niektoré mystické pojmy, ktoré sa vyskytli v zadaní. Napríklad taký výkon. Výkon je rýchlosť, akou je niečo schopné meniť energiu. Či už je to rýchlovarná kanvica, nohy cyklistu, alebo motor v aute, každá z týchto vecí má za úlohu premieňať energiu z jednej formy na druhú a práve rýchlosť, akou je to schopná robiť, sa nazýva výkonom. Povedané rečou istého čudáckeho spolku⁴:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad (1)$$

Odtiaľ vidíme, že jednotka výkonu bude Js^{-1} , t. j. joule za sekundu, ako by sme očakávali. Táto jednotka sa volá Watt a stroj s výkonom 1 Watt je schopný dodať energiu 1 joule za jednu sekundu. V našej úlohe má motor s výkonom $P = 100 \text{ kW}$ urýchliť auto s hmotnosťou $m = 2000 \text{ kg}$ najprv z nuly na rýchlosť $v_1 = 100 \text{ kmh}^{-1}$ a potom z $v_1 = 100 \text{ kmh}^{-1}$ na $v_2 = 200 \text{ kmh}^{-1}$.

Akým zmenám energie to zodpovedá? Keďže auto sa samozrejme pohybuje po ceste, ktorá je vo vákuovom tuneli a má dokonalé kolesá bez valivého odporu, jediná energia, ktorá tu bude hrať úlohu, je kinetická energia auta. Keby auto napríklad aj stúpalo do kopca, museli by sme zarátať aj gravitačnú potenciálnu energiu. Takže chudák motor musí v prvom prípade dodať⁵ autu energiu

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

a v druhom

$$E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

A keď použijeme 1, dostaneme

$$t_1 = \frac{E_1}{P} = \frac{mv_1^2}{2P}$$

a

$$t_2 = \frac{E_2}{P} = \frac{mv_2^2 - mv_1^2}{2P}.$$

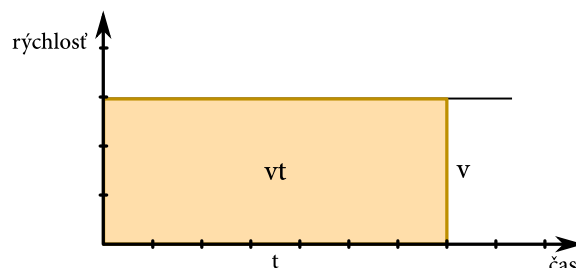
Pozrime sa teraz na čas. Máme za úlohu zistiť, koľko bude trvať autu idúcemu na plný výkon, kým prejde vzdialenosť 1 km. Musíme teda nájsť závislosť prejdenej dráhy na čase. Z prvej časti úlohy vieme závislosť rýchlosti na čase:

$$v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}.$$

Ako z tohoto získame závislosť prejdenej dráhy na čase? Ak by sme mali rýchlosť konštantnú, mohli by sme použiť jednoduchý vzorec $s = vt$. Ale nemáme. Alebo máme? Skúsme si uvedomiť, čo to vlastne vt znamená. Ak by sme mali graf rýchlosti v závislosti od času, konštantná rýchlosť by tam predstavovala len rovnú čiaru, ktorá by neklesala ani nestúpala:

⁴matematicky

⁵premeniť chemickú energiu paliva

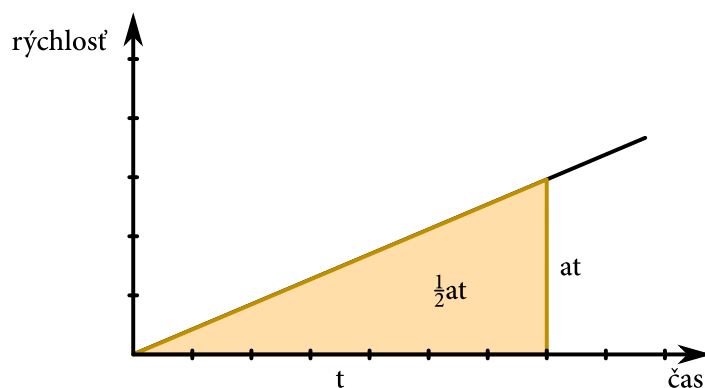


Obrázok 9: Graf pre konštantnú rýchlosť

Vidíme, že vzorec vt tu predstavuje iba plochu obdĺžnika, ktorého jedna strana je v a druhá strana je t . Takže máme zaujímavý výsledok: dráha prejdenej počas pohybu s konštantnou rýchlosťou je rovná ploche ohraničenej grafom rýchlosti v závislosti na čase. Funguje tento princíp aj pre iné prípady? Napríklad rovnomerne zrýchlený pohyb. Vtedy rýchlosť stúpa z časom rovnomerne:

$$v = at.$$

To znamená že grafom rýchlosti bude priamka, ktorej smernica (strmosť) závisí od zrýchlenia. Pozrime sa teda:



Obrázok 10: Graf pre rýchlosť lineárne rastúcu s časom

vidíme, že tentoraz bude plocha pod grafom pravouhlý trojuholník, s jednou stranou t a druhou at . Plocha medzi časom 0 a časom t je teda

$$s = \frac{1}{2}at^2.$$

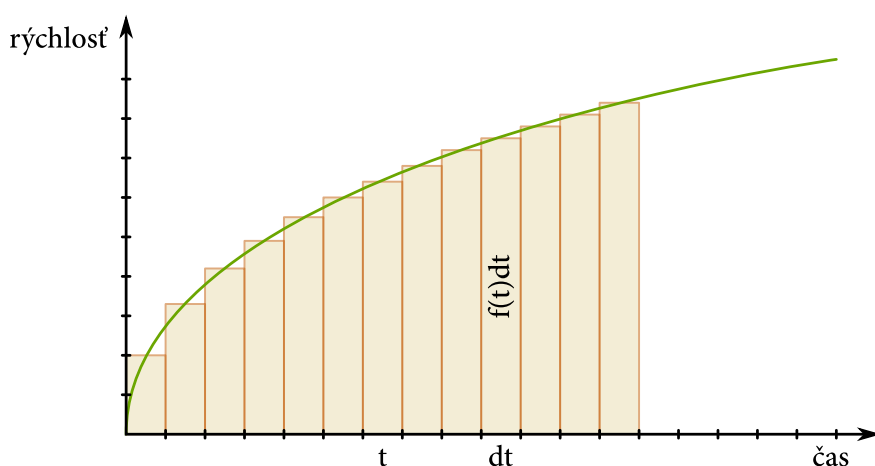
A tu môžete naozaj spoznať dráhu pre rovnomerne zrýchlený pohyb. Zdá sa, že náš objav platí aj pre tento prípad. Prečo by nemal platiť aj pre prípad, že grafom bude napríklad odmocnina? Na zistenie prejdenej dráhy teda stačí nájsť plochu pod grafom funkcie. Ale ako to urobíme, keď funkcia nemá nejaký pekný tvar, ako napríklad priamka? Mohli by sme napríklad graf nakresliť na papier, vystrihnúť a potom odvážiť a z plošnej hustoty papiera by sme určili plochu.

My ale vyriešme tento problém bez toho, aby sme sa vôbec museli postaviť od stola! To znamená: naprogramujme ho! Ak ste ešte nikdy neprogramovali, nemusíte sa báť, programovať budeme len v tzv. tabuľkovom procesore. A také programovanie je ľahké, lebo skoro všetko za vás urobí samotný tabuľkový procesor. Tabuľkový procesor je taká vec ako napríklad Excel alebo OpenOffice Calc, kde môžete do tabuliek vkladať svoje hodnoty a potom s nimi nejak po počítať. A čo je pre nás najdôležitejšie, tieto programy vedľa mnoho vecí auto-

matizovať a mnoho vecí si vedia sami domyslieť. Môžeme ich teda využiť na vykonanie ohromného množstva výpočtov vo veľmi krátkom čase.

Tak dosť bolo táranín, poďme už na samotný výpočet. Plochu akého útvaru vieme určiť najjednoduchšie? Predsa obdĺžnika. Tak prečo nerozložiť našu odmocninovú plochu na obdĺžniky? Určite si teraz hovoríte: „Čo je to za hlúpy nápad! Veď odmocninová plocha je oblá! Ako ju chce rozložiť na obdĺžniky?“

No dobre. A čo keď urobíme tie obdĺžniky také úzke, že už skoro ani nebude vidno, že sú to obdĺžniky? Ak rozložíme nejakú plochu na 100 000 obdĺžnikov, môžete sa staviť, že rozdiel medzi ich spoločnou plochou a skutočnou oblou plochou bude zanedbateľný. Ak by ste plochu 100 000 obdĺžnikov chceli počítať ručne, môžete si rovno ustlať na cintoríne. Ale predsa sme spomínali nejaké tie počítače. Nakopnite teda tie turbo mašiny HP-čko Intel Pentium 100 MHz z deväťdesiateho druhého a stále to budete mať 10^{18} -krát rýchlejšie ako s ceruzkou a papierom. Takže, toto je schéma výpočtu:



Obrázok 11: Rozklad na obdĺžniky

Ak budú obdĺžniky naozaj úzke, pokryjú úplne celú plochu. V našom výpočte bude mať každý obdĺžnik šírku 0,001. Výška obdĺžnika, ktorý sa nachádza na časovej súradnici t je $f(t)$ a jeho plocha bude teda $0,001 \cdot f(t)$. A už zostane len plochy všetkých obdĺžnikov sčítať. Postup je jasný, ostáva ho už iba implementovať. Vzhľadom na náročnosť výpočtu, my sme použili tabulkový procesor (Excel), ale je v podstate jedno ako to urobíte.

Teraz prichádza moment, na ktorý by ste nemali po vyriešení úlohy nikdy zabudnúť. A tým je zamyslenie sa. Je 28 sekúnd na jeden kilometer zmysluplná hodnota? Dala by sa dosiahnuť bežným autom, alebo na to treba Formulu 1? Alebo je to slimačie tempo?. To pri rýchlosti ktorá má priebeh odmocniny ťažko posúдите, ale jednu vec môžeme predsa len otestovať.

Ak si predstavíme, že auto malo po celú dobu konštantné zrýchlenie a použijeme vzorec pre rovnomerne zrýchlený pohyb, to, čo dostaneme, bude priemerné zrýchlenie. A keďže priemerné zrýchlenie je také, že auto v skutočnosti zrýchľovalo chvíľku viac a chvíľku menej, tak ak by náhodou už priemerné zrýchlenie bolo nezmyselne vysoké alebo nízke, vedeli by sme, že je zle. Môžete si overiť, že v tomto prípade je priemerné zrýchlenie asi $2,5 \text{ ms}^{-2}$, čo sa zdá byť celkom normálne.

Aby sme uspokojili nenásytnosť zadávateľa úlohy, ostávajú už len grafy. Pre polohu použijeme hodnoty, ktoré sme si numericky vypočítali, pre rýchlosť máme vzorec. Ostáva ešte zrýchlenie – na to použijeme vzorec

$$P = Fv,$$

čo je len základný vzťah pre prácu predelený časom. Keďže $F = ma$ a rýchlosť poznáme, môžeme si vyjadriť

$$a = \sqrt{\frac{P}{2mt}}.$$

Rýchlosť a zrýchlenie máme teda vyjadrené ako funkcie, ktoré si môžeme dať vykresliť a graf polohy urobíme v Exceli. Uf!

Ešte poznámka na záver

To čo sme robili v tabuľkovom procesore, teda sčítavanie plochy pod grafom, sa volá integrovanie. My sme to robili numericky, to znamená vykonaním veľkého množstva jednoduchých výpočtov hrubou silou. Ale dá sa to aj analyticky – to znamená, že na to existuje matematická procedúra, ktorou sa dá plocha pod grafom vypočítať len s použitím rozumu a v priebehu niekoľkých sekúnd. Ako sa to robí sa dozviete, keď prídete študovať sem k nám na Matfyz (alebo keď budete mať šťastie, už na strednej škole :)). Ak už náhodou integrovať viete, určite vyriešite túto úlohu aj tým spôsobom.

Pridávam tu ešte aj kratučký **program** na numerické integrovanie v C++. Určite sa na to pozrite, aj keď neviete programovať. Programovanie je z veľkej časti intuitívna záležitosť. Ak si dobre premyslíte, čo vlastne od počítača chcete, v skutočnosti sa nemusíte na programovanie nič „učiť“, maximálne tak technické záležitosti – kde dať bodkočiarku alebo zloženú zátvorku alebo ako sa volá ten príkaz, atď...

2.4 Vývrtka

vzorák **Matúš**, opravoval **Matúš**

Moment zotrvačnosti

Moment zotrvačnosti telesa je fyzikálna veličina, popisujúca vlastnosti telesa pri otáčavom pohybe. V rovniciach pre otáčavý pohyb je analógiou hmotnosti pre posuvný pohyb. Pre hmotný bod je to $I = mr^2$ kde m je jeho hmotnosť, a r je jeho vzdialenosť od osi otáčania. Pre viac bodov je celkový moment súčet momentov jednotlivých bodov. Pre zložené tuhé teleso, v našom prípade ľudské telo, by sme ho mohli skúsiť zmerať priamo, napríklad odmerať koľko energie potrebujeme na roztočenie okolo jeho osi, my ale zvolíme iný postup.

Fyzikálne kyvadlo

Čo vieme zmerať, a vystupuje tam moment zotrvačnosti? Napríklad periódu fyzikálneho kyvadla. Fyzikálne kyvadlo je tuhé teleso, ktoré pod vplyvom vlastnej tiaže kmitá okolo pevnej osi. Na rozdiel od matematického kyvadla, ktoré je iba hmotným bodom, fyzikálne kyvadlo je reálne hmotné teleso. Hlavný rozdiel v ich popise je, že pri popise fyzikálneho kyvadla uvažujeme jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na príslušný bod závesu. Skúsme si odvodiť vzťah pre periódu.

Vieme, že pre otáčavý pohyb tuhého telesa okolo pevnej osi platí

$$D = I\varepsilon, \quad (2)$$

kde I je moment zotrvačnosti telesa ε je uhlové zrýchlenie a D je moment sily. Toto je analógia Newtonovho zákona sily $F = ma$ pri otáčavom pohybe. Na mierne vychýlené tuhé teleso pôsobí moment sily

$$D = -mgr \sin \varphi, \quad (3)$$

kde r je vzdialenosť ťažiska telesa od osi otáčania, φ je výchylka kyvadla z rovnovážnej polohy a m je hmotnosť telesa. Predpokladáme, že kmity sú malé, teda môžeme použiť priblíženie $\sin \varphi \doteq \varphi$, čo dosadíme do rovnice

3. Celé to dosadíme do rovnice 2 a dostaneme

$$I\varepsilon = -mgr\varphi. \quad (4)$$

Teraz sa treba trochu zamyslieť, a využiť analógiu medzi veličinami pri posuvnom a otáčavom pohybe. Vieme, že pre lineárny pružinový oscilátor platí

$$ma = -kx. \quad (5)$$

Analógiou hmotnosti m je moment zotrvačnosti I , pre zrýchlenie a je to ε a pre výchylku x je to φ . Všetky tieto veličiny z rovnice 5 majú svoje analógie v rovnici 4. Teda výraz $-mgr$ bude analógiou tuhosti pružiny k .

Teraz už s ďalším využitím analógie dostávame rovnicu pre periódu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}}, \quad (6)$$

z čoho už vieme ľahko vyjadriť moment zotrvačnosti ako

$$I = \frac{mgr}{4\pi^2} T^2.$$

S využitím Steinerovej vety potom dostávame moment zotrvačnosti okolo rovnobežnej osi prechádzajúcej ťažiskom

$$I = \frac{mgr}{4\pi^2} T^2 - mr^2. \quad (7)$$

Postup merania

Teraz už máme dobrý spôsob, ako odmerať moment zotrvačnosti ľudského tela vzhľadom na os kolmú na našu rovinu kmitania, prechádzajúcu ťažiskom. Budeme potrebovať pevný bod, napríklad strom, hrazdu alebo niečo podobné. Na pevný bod zavesíme lano. Takisto budeme potrebovať stopky, meracie pásmo a asistenta pri meraní.

Pri prvom spôsobe je to jednoduché. Najskôr zavesíme lano na pevný bod. Potom asistent odmeria vzdialenosť a medzi závesom a naším ťažiskom, keď visíme na lane. Požiadame asistenta, nech nás vychýli a pustí, zatiaľ čo spustí stopky. Asistent odmeria päť periód. Počas merania nesmieme meniť rozloženie svojej hmotnosti. Inými slovami, nesmieme hýbať žiadnou časťou tela. Spravíme aspoň desať meraní.

Analýza nameraných dát

Namerané hodnoty dosadíme do vzťahu 7. Vypočítame priemery $\bar{T}$ a $\bar{I}$. Potom určíme štandardnú odchýlku

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n}}.$$

kde $\bar{x}$ je priemerná hodnota meranej veličiny a x_i sú jednotlivé namerané veličiny. n je počet meraní. Teda napríklad pre periódu

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{T} - T_i)^2}{10}}.$$

Rovnako počítame pre moment zotrvačnosti. Zo štandardnej odchýlky a priemeru určíme relatívnu odchýlku

$$\eta_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \cdot 100 \, \%.$$

Samozrejme, že odchýlky nemusíme rátať ručne, môžeme použiť napríklad Excel, alebo pre fajnšmekrov pythonovskú knižnicu Numpy.

Meranie

Naše vstupné hodnoty boli:

$$m = 65,0 \pm 0,1 \, \text{kg}$$

$$a = 1,0 \pm 0,5 \, \text{m}$$

$$g = 9,81 \, \text{ms}^{-2}$$

Namerané hodnoty:

Meranie	Periódá / s	Moment zotrvačnosti / kgm^2
1.	11,08	14,316
2.	11,10	14,603
3.	11,05	13,887
4.	11,31	17,643
5.	10,98	12,891
6.	11,07	14,173
7.	11,03	13,602
8.	10,99	13,033
9.	11,10	14,603
10.	11,04	13,745

Priemerná periódá: $\bar{T} = 11.075 \pm 0.0875 \, \text{s}$

Priemerný moment zotrvačnosti: $\bar{I} = 14.2496 \pm 1.26131 \, \text{kgm}^2$

Relatívna chyba merania: $\eta_I = 8,85 \, \%$

2.5 Veža na C4

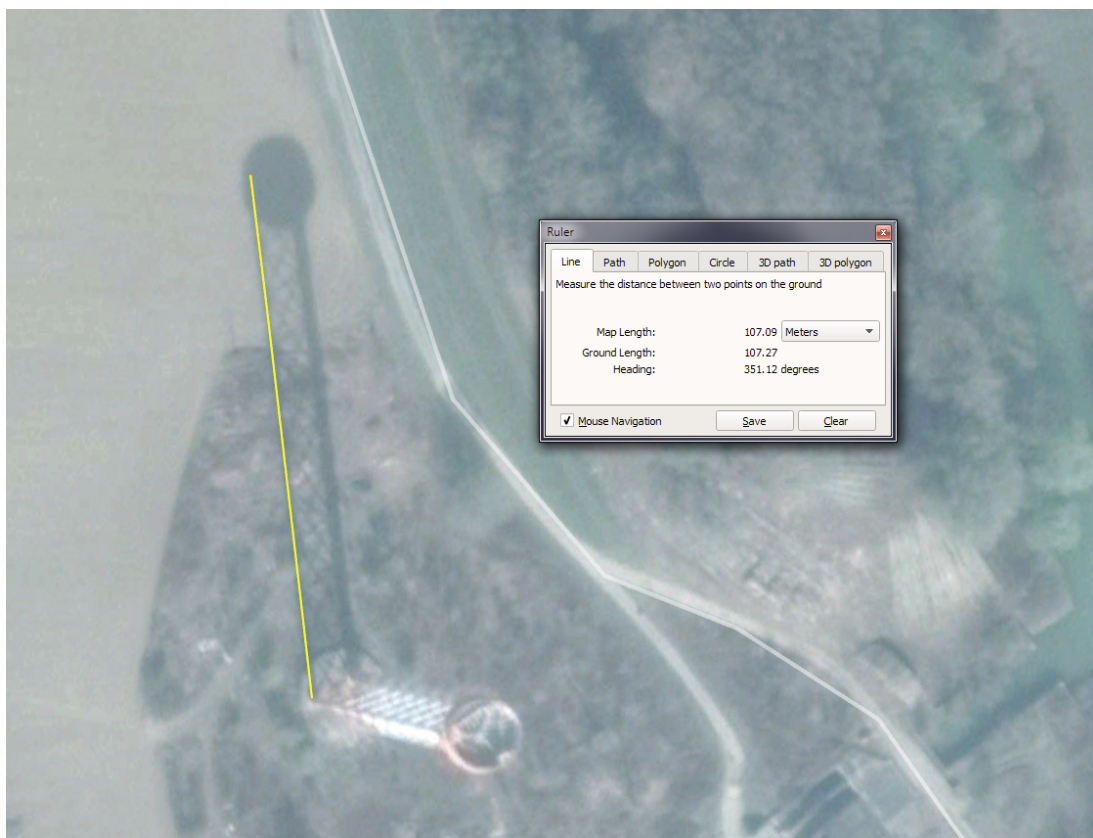
vzorák Kvík

Aj keď sme sa v skutočnosti k veži aj s Jarom prešli, vzorové riešenie bude predpokladať, že ste takéto šťastie v živote nemali a museli ste sa s úlohou potrápiť čisto s použitím kombinácie počítača a [mozgového myslenia](#). Na plný počet sa ale samozrejme kvalifikovali aj riešenia založené na meraniach v teréne.

Na vyriešenie úlohy použijeme dva voľne dostupné programy: *Google Earth Pro* a *Stellarium*. V *Google Earth* nájdeme patričné súradnice a presvedčíme sa, či sa tam veža ešte stále nachádza a nie je náhodou práve prikrýta mrakmi. Najnovšie snímky, žiaľ, nie sú práve najvhodnejšie, pretože tieň je krátky a veža odfotená príliš zboku. Preto použijeme staršie snímky z marca 2014.

Ponajprv odmeriame dĺžku tieňa veže. *Google Earth* na to má vhodný nástroj – treba však dať pozor, aby sme správne určili začiatok a koniec tieňa. Veža nie je jednorozmerná palička, takže je dôležité, aby sme merali dĺžku tieňa niektorej jej zvislej súčasti, napríklad jedného piliera, prípadne jej osi. Počiatok „pravítka“ teda

myšou pripevníme k päte piliera, a koniec do miest, kde tieň piliera končí. Dĺžka tieňa nám tu vyjde približne 107 m.



Obrázok 12: Meriame dĺžku tieňa

Táto dĺžka sa však ešte výške veže nerovná. Aby ju sme mohli určiť podľa dĺžky tieňa, potrebujeme poznať uhlovú výšku Slnka nad obzorom v čase vytvorenia snímky. Na to by sa nám hodilo poznať presný čas. Nikto nám ho síce nepovie, ale opäť nám pomôže *Google Earth*.

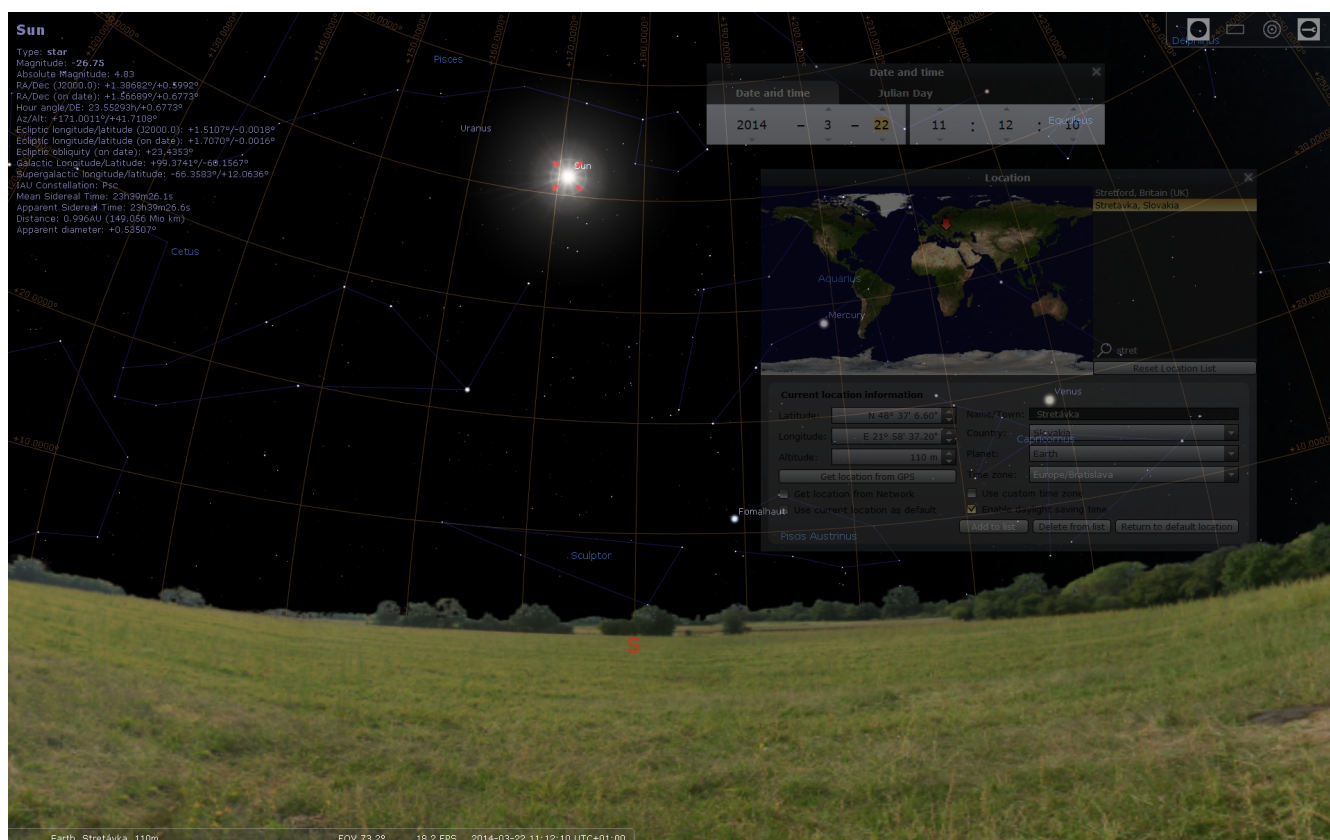
Ako sa Zem krúti, Slnko opisuje po oblohe zhruba kruhovú dráhu. Polohu ľubovoľného nebeského telesa, teda aj Slnka, môžeme popísať vo sférickej súradnicovej sústave. Súradnice tu tvorí orientovaný uhol θ , meraný po kolmici od nejakej referenčnej roviny, potom orientovaný uhol φ v tejto rovine, meraný od nejakého určeného význačného smeru, a napokon vzdialenosť r .

Nám sa bude hodiť takzvaná *topocentrická* sústava, v ktorej je referenčnou rovinou miestny horizont a význačným smerom sever. Uhlovú vzdialenosť od horizontu, vrátane znamienka (kladné hore), budeme nazývať *výškou nad obzorom*. Uhlovú vzdialenosť od severu, meranú v smere hodinových ručičiek, zas nazveme *azimutom*. Vzdialenosť Slnka nás zaujímať nemusí a ani nebude.

Ďalej si uvedomíme, že v našich zemepisných šírkach azimut Slnka vždy rastie⁶. Preto vieme povedať, že počas jedného dňa je medzi časom a slnečným azimutom jednoznačný, prostý vzťah. *Google Earth* prezradí, že dátum zhotovenia snímky je 22. marec 2014. Azimut Slnka poznáme, pretože musí byť presne opačný, ako je smer tieňa veže. Pri meraní nám program rovno povedal, že smer tieňa na zemskom povrchu je asi 351° . Azimut Slnka teda musí byť 171° . Otázku, ktorá nás zaujíma, môžeme teraz preformulovať takto: v akej výške nad obzorom bolo Slnko dňa 22. marca 2014 na mieste veže v momente, keď jeho azimut bol 171° ?

⁶Zamyslite sa, kde a kedy toto tvrdenie neplatí.

Na toto použijeme *Stellarium*⁷. Miesto pozorovateľa nastavíme na súradnice zo zadania. Nadmorská výška nie je podstatná, pre poriadok však môžeme zadať hodnotu, ktorú ukáže *Google Earth* (110 m).



Obrázok 13: Obrazovka v *Stellarium*. Nastavili sme správnu polohu aj čas.

Následne nastavíme dátum na 22. 03. 2014. Azimutom Slnka priamo hýbať nevieme, môžeme ale meniť čas. Na oblohe nájdeme Slnko a sledujeme jeho azimut. Pomocou kláves j a l sa poposúvame v čase až do okamihu, keď je azimut približne rovný 171°.

Toto nastane o 11:12. Ostáva nám zaznamenať si okamžitú výšku Slnka nad horizontom, čo je 41,7°. No a zvyšok je už iba jednoduchá geometria. Dĺžka tieňa je $l = \frac{h}{\tan \varphi}$, a teda výška veže h je rovná $l \tan \varphi$. Po dosadení hodnôt získavame výsledok

$$h = 107 \text{ m} \cdot \tan 41,7^\circ \doteq 95,3 \text{ m}.$$

Nakoniec môžeme skúsiť overiť náš postup s inou snímkou, napríklad zo dňa 8. marca 2012. Dĺžka tieňa je tu 130 m a jeho azimut 354,5°. Slnko dosiahlo opačný azimut, teda 174,5°, o 11:25 a jeho výška nad obzorom bola v tomto okamihu 36,6°. Po dosadení nám tentokrát vyjde, že výška veže je

$$h = 130 \text{ m} \cdot \tan 36,6^\circ \doteq 96,5 \text{ m}.$$

Skutočná výška veže je približne 97 metrov. Vidíme teda, že naša metóda je v rámci možností nášho merania veľmi presná.

⁷Samozrejme, dá sa to aj priamo spočítať, ale nie je to úplne jednoduché.

2.6 Tak určiteee!

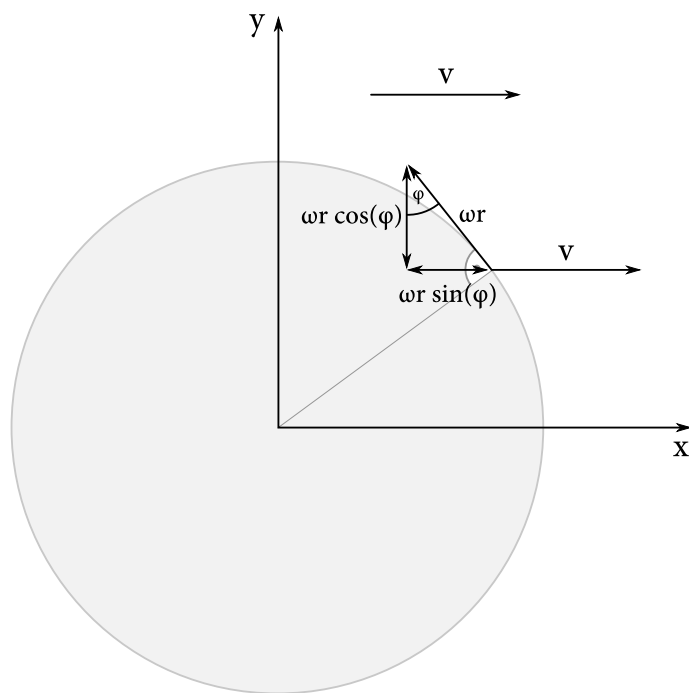
vzorák MaťoB, opravoval MaťoB

Na to, aby sme zistili, či puk zastane skôr alebo neskôr, keď je roztočený sa musíme pozrieť na to, čo sa deje s trecou silou v oboch prípadoch. Nebudeme otáľať a bez zbytočných kecov sa pustíme smelo do riešenia.

Prvú vec, ktorú si musíme uvedomiť, je to, že keďže sa puk nedotýka podložky len v jednom bode, ale celou svojou plochou, tiaž puku sa rovnomerne rozkladá na celú styčnú plochu. To ale znamená, že trecia sila nepôsobí iba v jednom bode, ale môžeme hovoriť o akomsi „trecom šmykovom napätí“. Čo tým chcel autor vzoráku povedať? Predstavme si, že celá styčná plocha puku je S a pozrime sa na maličkú plôšku veľkú ΔS , potom trecia sila pôsobiaca v tomto bode je veľká $mgf\frac{\Delta S}{S}$ a má smer proti smeru rýchlosti, ktorou sa pohybuje maličká plôška ΔS .

Ak puk nerotuje, každý bod puku sa pohybuje rovnakým smerom a v každom bode má trecia sila rovnaký smer. Akonáhle však puk začne rotovať, tak rýchlosť rôznych bodov na puku bude smerovať rôznym smerom, čo nám dáva nádej na to, že celková trecia sila pôsobiaca proti smeru posuvného pohybu bude menšia ako v prípade keď puk nerotuje. Skúsme si toto tvrdenie teraz dokázať. Pre jednoduchosť sa pozrime miesto puku tvaru kruhu iba na obruč tvaru kružnice, ktorá sa pohybuje po drsnej podložke. Naše zistenia už potom ľahko zovšeobecníme na celý puk.

Označme si rýchlosť posuvného pohybu v a uhlovú rýchlosť obruče ω . Pozrime sa teraz na vektor rýchlosti bodu, ktorý v súradnicovej sústave zvierá s osou x uhol φ .



Obrázok 14: Vektor rýchlosti na kružnici s polomerom r

Posuvná rýchlosť v tomto bode je

$$\vec{v}_p = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix},$$

a obvodová rýchlosť rotačného pohybu

$$\vec{v}_r = \begin{bmatrix} -\omega r \sin(\alpha) \\ \omega r \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

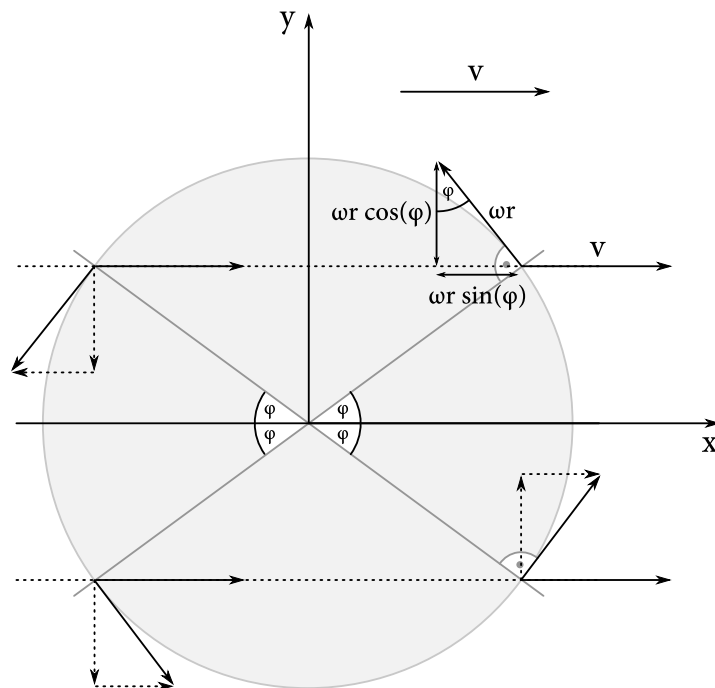
Celkový vektor rýchlosti v danom bode je potom daný vektorom

$$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_r = \begin{bmatrix} v - \omega r \sin(\alpha) \\ \omega r \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Tretia sila potom pôsobí proti smeru tohto vektora, čiže v opačnom smere ako jednotkový vektor daný vektorom celkovej rýchlosti v danom bode $\vec{n} = \vec{v}/|\vec{v}|$.

Príspevok trecej sily od kúska kružnice nachádzajúcej sa pod uhlom φ je teda

$$\vec{\Delta F}_t = -fmg \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \vec{n} = -fmg \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \frac{(v - \omega r \sin \alpha, \omega r \cos \alpha)}{v^2 + \omega^2 r^2 - 2v\omega r \sin \alpha}.$$



Obrázok 15: Príspevky do trecej sily od všetkých štyroch kúskov

Už sme skoro na konci, teraz si len musíme uvedomiť, že na kružnici sú presne štyri rôzne body, ktoré v absolútnej hodnote rovnakú veľkosť sínusu resp. kosínusu uhla. Ide o uhly φ , $\pi - \varphi$, $\pi + \varphi$ a $-\varphi = 2\pi - \varphi$ (túto množinu uhlov si označme ako M). Po krátkom zamyslení prideme na to, že keď pre každú hodnotu φ z intervalu $(0, \pi/2)$ vektorovo spočítame príspevky trecej sily prichádzajúce od týchto štyroch uhlov, tak získame vektor, ktorý má nenulovú len x-ovú komponentu t.j. v proti smeru posuvného pohybu.

$$\sum_{\alpha \in M} \vec{\Delta F}_t = -fmg \frac{4\Delta\varphi}{2\pi} \frac{(v, 0)}{v^2 + \omega^2 r^2 - 2v\omega r \sin \alpha}.$$

Môžeme si všimnúť, že ľubovoľne malá nenulová ω potom spôsobí, že súčet príspevkov od týchto štyroch bodov na kružnici je menší, ako keby kružnica nerotovala (kvôli členom v menovateli). To potom spôsobí, že aj súčet cez všetky možné uhly od φ dopadne tak, že celková trecia sila je menšia pre $\omega \neq 0$. Napokon si len rozmyslime, že polomer kružnice tu nehrá žiadnu dôležitú úlohu, ak je $\omega \neq 0$, tak je jedno aký je polomer, výsledná trecia sila je vždy menšia ako v prípade ak by kružnica nerotovala. Výsledok možno preto jednoducho zovšeobecniť na prípad veľa koncentrických kružníc, čiže kruh.

Ak by chcel niekto spočítať celkovú treciu silu pôsobiacu na puk, dopracuje sa k tomuto integrálu, ktorý žiaľ sa nedá už vyjadriť pomocou funkcií, ktoré Vás stredoškolákov alebo nás vysokoškolákov učia v škole (hoc uznajte, s eliptickými integrálmi sa človek nestretáva každý deň, aj keď...). Preto vyriešiť úlohu, akú dráhu puk presne prejde, kým zastane, nie je úloha, ktorá sa dá vyriešiť len pomocou pera a papiera (analyticky). Ak sa však niekto na to dal, napr. numericky, mohol získať oproti štandardným 9 bodom ešte tri bonusové navyše, čiže celkovo získať 12 bodov za túto úlohu!⁸

Pre fajnsmekrov teda sľúbený vzorček nakoniec,

$$F_t = -\frac{fmg}{\pi R^2} \int_0^R dr \int_0^{2\varphi} d\varphi \frac{(v - \omega r \sin \alpha, \omega r \cos \alpha)}{v^2 + \omega^2 r^2 - 2v\omega r \sin \alpha}.$$

2.7 Fajnsmeker

vzorák Adam, opravoval Adam

Prostriedky a obmedenia udávané zadaním nám toho neumožňujú robiť veľa. S vodami napríklad nemusíme nič robiť, čo nám dáva prvý odhad $T_{\max} = 0^\circ\text{C}$. Tento postup však nevyčerpal veľkodušnosť zadania, ktoré nám dovoľuje dať obe vody do tepelne vodivého kontaktu. Ako nás asi učili, teplota je taká vec, že keď k sebe priložím dve veci, ktoré ju majú rovnakú, nič zaujímavé sa neudeje. Ak ju však majú rôznu, po istom čakaní ju už rôznu mať nebudú. Vieme tiež, že ak sú k sebe prikladané veci z rovnakej látky, čo naše vody prakticky sú, túto novú, kompromisnú teplotu zistíme ako množstvom vážený priemer pôvodných teplôt. Viacej nám ani netreba.

Priložme teda vody k sebe. Použitím pred chvíľou osviežených vedomostí dospejeme k tomu, že takto pre destilovanú vodu dosiahneme $T_{\max} = 50^\circ\text{C}$. Toto zlepšenie je výrazné, nám však stále ostáva posledné eso v rukáve: tento úkon nemusíme robiť so všetkou vodou naraz.

Pre jednoduchosť si teraz označme teplotu 100°C ako $T = 1$ a množstvo vody 1 kg ako množstvo veľkosti 1. Skúsme si destilovanú vodu (ďalej „voda“) rozdeliť na dve polovice, ktoré budeme postupne prikladať k sieťovej vode (ďalej „zásobník“).

Prvé priloženie vyústi v polovici vody a zásobníku teploty $\frac{2}{3}$. Po priložení zvyšnej polovice, tá spolu so zásobníkom dosiahne teplotu $\frac{4}{9}$. Spojením polovic vody získame 1 vody teploty $\frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{9}}{2} = \frac{5}{9}$. To je znovu zlepšenie oproti predchádzajúcemu výsledku. Môžete si vyskúšať, že pri delení na tretiny vedie tento algoritmus znova k lepšiemu výsledku. Podobne pri štvrtinách, pätinách, ..., n -tinách. Pozrime sa, aká bude výsledná teplota pre všeobecné delenie. Vezmime prvý kúsok veľkosti $\frac{1}{n}$. Priložením k zásobníku ho dostaneme (spolu so zásobníkom) na teplotu $\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$. Toto rad za radom spravíme so všetkými n n -tinami.

Teplota každého kúska po priložení bude vyzeráť takto:

$$\frac{\text{pôvodná teplota kúska} \cdot \text{veľkosť kúska} + \text{aktuálna teplota zásobníka} \cdot \text{veľkosť zásobníka}}{\text{veľkosť kúska a zásobníka dokopy}}.$$

Stačí si uvedomiť, že každým takým priložením klesne teplota zásobníka $\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$ -krát, a teda sme schopní žiadanú výslednú teplotu vody zapísať ako

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^k.$$

⁸Viac ako to dopočítať do konca možno zistiť napr. v Phys. Rev. Lett. 90, 248302, ktorý Vám s radosťou sprístupnia vedúci alebo napríklad istí riešitelia, ktorí miesto vlastnej hlavy radi používajú Google :P O týchto entitách medzi riešiteľmi však na týchto miestach radšej pomlčíme, aby autor vzoráku predišiel prípadným úrazom...

Aj nepozorným okom sa dá v žiadanom súčte vypočítavať súčet geometrického radu. Pre ten, ako možno vieme platiť

$$q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = q \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

čo v našom prípade znamená, že

$$T_n = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \frac{1 - \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n}}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Možno je čitateľovi známe, možno nie, že výraz $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sa pri rastúcom n , blíži (zdola) k číslu e . Z tejto vedomosti vieme nahliadnuť, že zvyšovaním počtu kúsok vody sa vieme na hocako blízko priblížiť (zdola) k hodnote

$$T = 1 - \frac{1}{e},$$

čo je síce znova viac, než sme mali predtým, avšak teplota povedzme 0,64 sa takýmto algoritmom dosiahnuť nedá.

Spomenieme si, že svoj výsledok sme práve zlepšili rozkúskovaním vody. Jediná vec, ktorú nám teraz ostáva vyskúšať, je rozkúskovať aj zásobník. Na začiatok rozdelíme vodu i zásobník na polovice. Postupne priložme polovicu vody k obom poloviciam zásobníka. Takto ju ohrejeme na $\frac{3}{4}$, pričom nám zostali polovice zásobníka s teplotami $\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{4}$. Teraz už s touto polovicou vody nevieme robiť nič, čo by zvýšilo jej teplotu.

Sústredíme svoju pozornosť na ešte nevyužitú polovicu vody. Nastáva dilema: ku ktorej polovici zásobníka ju priložiť ako prvej? Uvedomme si, že teplota polovice vody po priložení je polovica *niečoho*. Chceme čo najvyššiu teplotu, teda chceme čo najväčšie *niečo*. Zároveň aj *niečo* je súčtom *voľačoho* a polovice *dačoho*.

Spracovaním tohoto kúska textu sa možno dopracovať k záveru, že chceme polovicu vody priložiť k teplejšej časti zásobníka ako poslednej, aby vo pri jej teplote vo výsledku stála $\frac{1}{2}$ v čo najmenšej mocnine. Vykonáme teda príkladania v takomto rozumnom poradí a dostaneme sa k výslednej teplote celej vody $\frac{5}{8}$. To je síce menej ako $1 - \frac{1}{e}$, avšak je to povážlivo blízko a vyžaduje to oveľa menej krokov.

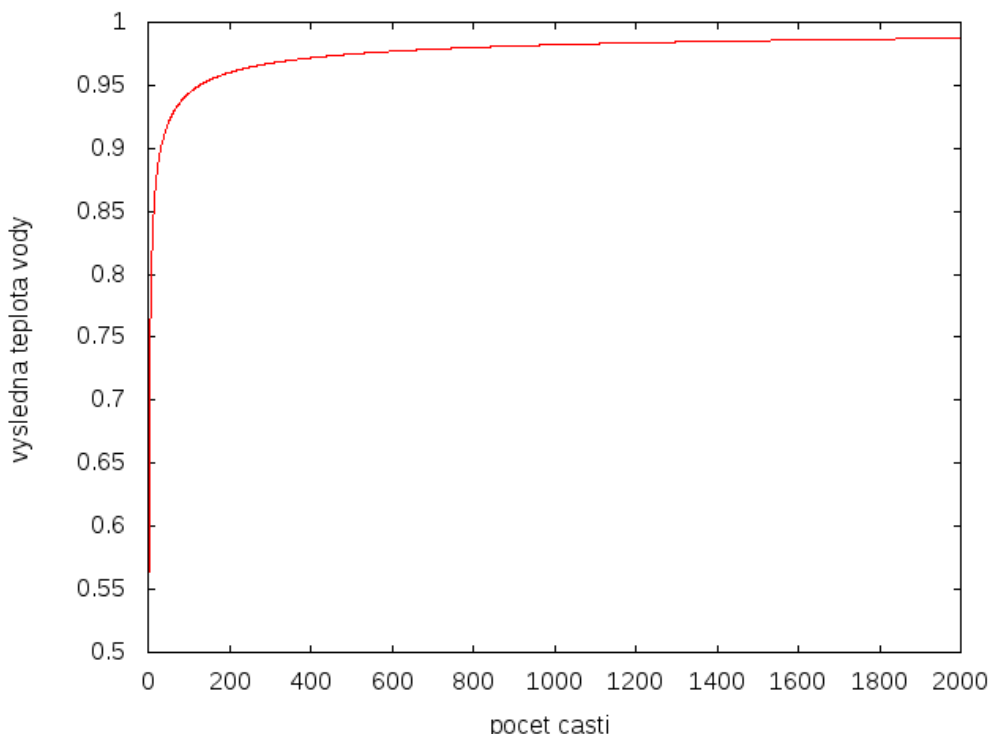
Ak si však čitateľ skúsi aplikovať tento algoritmus pri delení vody i zásobníka na $n = 3$ častí, zistí, že hocako veľké delenie len vody bez delenia zásobníka sa môže schovať. Vyvstáva otázka, na akú teplotu vieme ohriať vodu ak použijeme náš svetoborný algoritmus na všeobecné n . Pre istotu si ho ešte jasne napíšme:

1. Rozdelíme vodu i zásobník na n rovnakých častí.
2. Vezmeme jednu časť vody a postupne ju priložme ku všetkým kúskom zásobníka.
3. Opakujeme rad za radom so zvyšnými časťami vody, pričom pri kúskoch zásobníkov postupujeme od tých s nižšou teplotou k tým s vyššou.
4. Zlejeme všetky kúsky vody dokopy.

Ekvivalentne:

1. Rozdelíme vodu i zásobník na n rovnakých častí.
2. Vezmeme jednu časť zásobníka a postupne k nej priložme všetky kúsky vody.
3. Opakujeme rad za radom so zvyšnými časťami zásobníka.
4. Zlejeme všetky kúsky vody dokopy.

Ako na podnose sa nám ponúka napísať program, ktorý by nám týmto algoritmom vyprodukoval výslednú teplotu vody. Sklamúc ozajstných labužníkov sa touto cestou po autorovom súkromnom okúsení analytického prístupu i vydáme. Spíšeme, skompilujeme, spustíme, vykreslíme, vidíme:



Obrázok 16: *Miešanie vody*

Tušíme, že zvyšovaním n sa možno s teplotou destilovanej vody dostať hocako blízko ku $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, v čom sa dá nado všetku spoločensky štandardnú pochybnosť presvedčiť výpočtom výslednej teploty pre nejaké veľké n .

V lepšom výsledku sme ani nemohli dúfať, čo nás odbremeňuje od povinnosti dokázania, alebo aspoň naznačenia neprekonateľnosti nášho výsledku. Podstata výsledku nás však stavia do neľahkej situácie, na otázku zo zadania totiž nejestvuje odpoveď. Keďže s hocako veľkým, ale predsa konečným počtom kúskov sa vieme dostať hocako blízko, ale predsa nie úplne ku $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, musíme puristicky odpovedať:

Najvyššia teplota, na ktorú vie Duško ohriať 1 kg destilovanej vody, neexistuje.

Napokon nedá nám nespomenúť, že podobné zariadenia pracujúce ale s plynmi napr. vo forme dvoch do seba vložených rúr, v ktorých prúdi plyn alebo kvapalina proti sebe, sa naozaj používajú v praxi na rekuperáciu tepla.