

Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Rádová úloha

vzorák **Martin**, opravoval **Martin**

Úloha obsahuje sedem konkrétnych objektov resp. javov s hodnotami A a B , ku ktorým treba nájsť objekt, resp. jav s hodnotou C tak, aby platilo, že pomer $A : B$ je približne rovný pomeru $B : C$. Môžeme si teda napísať rovnosť

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C}. \quad (1.1.1)$$

Neznámou je len veličina C . Vyjadríme ju teda z rovnice 1.1.1 ako

$$C = \frac{B^2}{A}. \quad (1.1.2)$$

V časti zadania a) máme ako pomer A k B uvedený pomer hmotnosti mravca k hmotnosti lietadlovej lode. Hmotnosť mravca má hodnotu približne 1 až 5 miligramov. Hmotnosť lietadlovej lode má hodnotu 100 000 t. Hodnota C teda bude

$$C = \frac{(10^8)^2}{10^{-6}} \text{ kg} = 10^{22} \text{ kg}. \quad (1.1.3)$$

Hmotnosť mravca je v niektorých zdrojoch udávaná od 1 do 150 mg. V prípade, že by sme použili tú najväčšiu možnú hmotnosť, C by nám vyšlo rovné $6,67 \cdot 10^{-19}$ kg, takže pre C sú prípustné hodnoty od 10^{19} kg do 10^{22} kg.

Hmotnosť v tomto rozpätí majú napríklad Mesiace, Pluto alebo viaceré ďalšie mesiace či trpasličie planéty.

V časti zadania b) máme ako pomer A k B uvedený pomer 1 mm k vzájomnej vzdialenosti Zeme a Mesiaca. **Stredná vzdialenosť** od stredu Zeme do stredu Mesiaca je 384 399 km. Obdobným spôsobom, ako v časti a) vypočítame hodnotu C . Samozrejme, nesmieme zabudnúť najskôr hodnoty A a B premeniť na rovnaké jednotky. Preto sa C rovná $1,47 \cdot 10^{20}$ m. Rádovo rovnako veľká vzdialenosť je napríklad **priemer našej Galaxie**, zhruba $8,14 \cdot 10^{20}$ m).

V časti zadania c) máme ako pomer A k B uvedený pomer rýchlosti svetla k rýchlosti auta na diaľnici. **Rýchlosť svetla** je 299 792 458 m/s. Rýchlosť auta na diaľnici nech je 110 km/h. Opäť rovnakým spôsobom vypočítame hodnotu C . Tá sa bude rovnať $3,11 \cdot 10^{-6}$ m/s. Napríklad **sasanky** sa pohybujú rýchlosťou asi 1 cm/h, čo je $2,78 \cdot 10^{-6}$ m/s.

V časti zadania d) máme ako pomer A k B uvedený pomer povrchu zemskej súše k povrchu futbalového ihriska. Zemská súša má **rozlohu** $1,489 \cdot 10^8$ km². Futbalové ihrisko má **rozмеры** 105 m × 68 m. Zaberá teda 7140 m². Opäť rovnakým spôsobom vypočítame hodnotu C . Taktiež opäť nesmieme zabudnúť hodnoty A a B premeniť na rovnaké jednotky. Hodnota C bude $3,42 \cdot 10^{-7}$ m². Po vydelení danej hodnoty číslom π a následnom odmocnení dostaneme $3,3 \cdot 10^{-4}$ m, teda zhruba 0,3 mm. Priemer kruhu zaberajúceho plochu C by teda bol 0,6 mm. Takýto priemer má napríklad **zvárací drôt**.

V časti zadania e) máme ako pomer A k B uvedený pomer dĺžky trvania ultrakrátkeho laserového záblesku k jednej sekunde. **Ultrakrátky laserový záblesk** trvá rádovo $1 \cdot 10^{-12}$ s alebo menej. **Najkratší vytvorený laserový záblesk** trval $1 \cdot 10^{-18}$ s. V závislosti od zvoleného A môže mať C hodnoty od 10^{12} s (zhruba 30 000 rokov, napríklad vek najstarších figuratívnych **jaskynných malieb** v Európe) do 10^{18} s ($3,17 \cdot 10^{10}$ rokov, zhruba trojnásobok **súčasného veku vesmíru**).

V časti zadania f) máme ako pomer A k B uvedený pomer hmotnosti zrnka piesku k hmotnosti Zeme. **Zrnko piesku** váži zhruba $4 \cdot 10^{-6}$ kg. Zem má **hmotnosť** $5,97 \cdot 10^{24}$ kg. Hodnota C bude rádovo $8,91 \cdot 10^{54}$ kg. Najbližšie k tomu má **hmotnosť** všetkej obyčajnej hmoty v pozorovateľnom vesmíre, t. j. $1,6 \cdot 10^{53}$ kg.

V časti zadania g) máme ako pomer A k B uvedený pomer jasností Slnka a Mesiaca. Hustota toku žiarenia, značená ako F je veličina, ktorá udáva množstvo energie, ktorá prejde jednotkovou plochou za jednotku času (W/m^2). V tejto časti zadania máme vlastne ako pomer A k B uvažovať pomer hustôt toku žiarenia prichádzajúcich na Zem zo Slnka a Mesiaca. **Zdanlivá magnitúda** je miera jasnosti hviezdy alebo iného astronomického objektu. Zdanlivé magnitúdy astronomických telies, ako je napríklad Slnko a Mesiak, vieme ľahko vyhľadať. Pomer intenzít vyžarovania dvoch objektov môžeme zistiť s pomocou **vzťahu**

$$\frac{F_A}{F_B} = 10^{\frac{m_A - m_B}{-2.5}}, \quad (1.1.4)$$

kde F_A a F_B sú hustoty toku žiarenia telies A a B a m_A a m_B sú ich zdanlivé magnitúdy.

Ak by sme napríklad za m_A dosadili číslo 10 a za m_B číslo 5, pomer F_B k F_A by nám vyšiel rovný 100. Z toho je **možné vidieť**, že ak máme dva objekty A a B a ak objekt B má magnitúdu o 5 väčšiu než objekt A , z objektu B k nám prichádza stokrát menej energie než z objektu A . Zároveň ak by objekt C mal magnitúdu o 5 väčšiu než objekt B , objekt C by bol stokrát menej jasný než objekt B . Z toho je vidieť, že ak pre intenzity vyžarovania objektov A , B , C platí, že $F_A : F_B = F_B : F_C$, pre ich magnitúdy platí: $m_A - m_B = m_B - m_C$. Z rovnice si vyjadríme m_C

$$m_C = 2m_B - m_A. \quad (1.1.5)$$

Zdanlivé magnitúdy Slnka a Mesiaca vieme ľahko vyhľadať. Zdanlivá magnitúda **Slnka** je rovná $-26,74$ a zdanlivá magnitúda **Mesiaca** v splne je rovná $-12,74$. Hodnota C teda bude

$$m_C = 2(-12,74) - (-26,74) = 1,26. \quad (1.1.6)$$

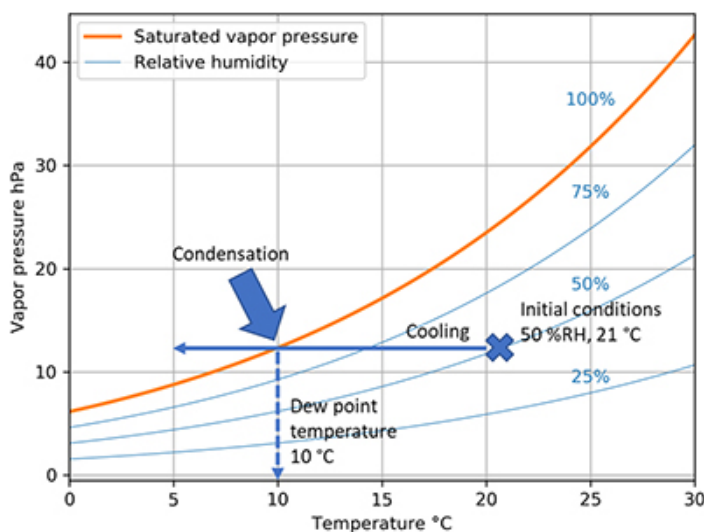
Príkladom objektu C môže byť napríklad hviezda Deneb, ktorá má zdanlivú magnitúdu rovnú 1,25.

1.2 Ranné uvedomenie

vzorák **Matko**, opravovala **KatkaN**

Z bežnej praxe si môžeme všimnúť, že okno sa naozaj zarosí z vnútornej strany a väčšinou na spodku. Vzduch dokáže poňať pri nejakej teplote a tlaku iba určité množstvo vodnej pary. Na to sa používa pojem relatívna vlhkosť vzduchu – pomer aktuálne „rozpustenej“ vodnej pary a maximálneho „rozpustiteľného“ množstva vodnej pary vo vzduchu pri danej teplote a tlaku. Keď vzduch dosiahne 100% relatívnu vlhkosť, už nedokáže prijať ďalšiu vodu a voda začne kondenzovať.

Množstvo vlhkosti, ktorú vzduch dokáže pohltiť ale nie je konštantné. Závisí od teploty nasledovne:



Obrázok 1.2.1: Graf závislosti tlaku nasýtených vodných pár od teploty. Oranžová čiara značí saturáciu vzduchu vodnou parou, teda stopercentnú vlhkosť. Autor obrázka Joni Partanen, vaisala.com.

Preto keď teplý vzduch chladíme, jeho relatívna vlhkosť stúpa, až kým voda nezačne kondenzovať. Túto teplotu nazývame rosný bod.

Preto rosa vznikne vnútri. Máme teplý vzduch s rozumnou relatívnou vlhkosťou, ktorý keď narazí na okno, ochladí sa a kondenzuje tam voda. Preto musí byť vonku dostatočne chladno, aby aj okno bolo dostatočne studené a vzduch sa pri ňom ochladil pod rosný bod.

Ale ani okno nie je všade rovnako teplé. Teplý vzduch má totižto menšiu hustotu, a preto stúpa nahor. Analogicky, studený vzduch klesá k zemi. Môžeme si napríklad všimnúť, že keď otvoríme v zime okno, je nám zima najprv na nohy. Preto aj okno samotné je chladnejšie na spodku, a teda tam skôr dosiahneme rosný bod.

1.3 I am speed

vzorák Matko, opravoval PÉDER

V zadaní sa uvádza, že jediná odporová sila, ktorú berieme do úvahy, je odpor vzduchu. Odpor vzduchu je úmerný druhej mocnine rýchlosti okolitého vzduchu

$$F_o = \frac{1}{2} C \rho S v_r^2,$$

kde ρ je hustota vzduchu, S je plocha prierezu, C je konštanta, ktorá závisí od tvaru telesa a v_r je rýchlosť vzduchu vzhľadom na teleso.

Označme si teraz výkon formuly P . Vieme, že Mözög dosiahol maximálnu rýchlosť, teda už ďalej nezrýchľuje. Jeho kinetická energia sa teda nemení. Preto energia dodaná z motora je rovná energetickým stratám spôsobených odporom vzduchu. Energia, ktorú dodá motor za čas Δt , je $E = P \cdot \Delta t$. Naopak energia, ktorú

formula stratí kvôli odporu vzduchu (teda práca, ktorú vykoná pri rozrážaní vzduchu) za rovnaký čas na dráhe dlhej Δs je $E = F \cdot \Delta s = F \cdot v_f \cdot \Delta t$, kde v_f je rýchlosť formuly voči zemi.

Z tohto si vieme vyjadriť maximálnu rýchlosť v závislosti od výkonu motora ako

$$\begin{aligned} P \cdot \Delta t &= F \cdot v_f \cdot \Delta t, \\ P &= F \cdot v_f = \frac{1}{2} C \rho S v_r^2 \cdot v_f, \\ v_r^2 \cdot v_f &= \frac{2P}{C \rho S}. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Keď Mōzōg šoféruje za bezvetria rýchlosťou v_b , rýchlosť vetra relatívne k nemu je tiež v_b , teda

$$v_b^3 = \frac{2P}{C \rho S}.$$

Ak na dráhe začne fúkať vietor rýchlosťou w , označíme maximálnu rýchlosť formuly u . Potom v_r bude $u + w$, a preto platí

$$(u + w)^2 \cdot u = \frac{2P}{C \rho S} = v_b^3. \quad (1.3.2)$$

Toto je kubická rovnica, ktorá jasne určuje maximálnu rýchlosť pri danej rýchlosti vetra. Jej riešenie nie je nijak pohľadné, môžete si ho pozrieť [tu](#). Ešte rýchla kontrola, či riešenie nie je na prvý pohľad nesprávne – skúsime dosadiť za $w = 0$. Vtedy $u^3 = v_b^3$, teda $u = v_b$, čo sme čakali.

Vidíme, že nám stačí poznať maximálnu rýchlosť za bezvetria a rýchlosť vetra, aby sme vedeli vyjadriť maximálnu rýchlosť. Nepotrebuje teda poznať prierez formuly, jej aerodynamiku, či hustotu vzduchu, dôležité nakoniec je iba to, že výkon je konštantný a odpor je úmerný druhej mocnine rýchlosti.

1.4 Statický pokrok

vzorák MatusH, opravoval MatusH

Keďže sa celý žeriav nehýbe, musí platiť rovnosť síl a momentov síl. Ak by sme si v celej sústave odmysleli lano, je jasné, že pri päte žeriavu bude pôsobiť moment

$$M_p = mgd + 2l^2 \lambda g. \quad (1.4.1)$$

To, že sa žeriav nezrúti, ale ostane stáť je preto, že zem pôsobí silou T na lano a táto sila má moment vzhľadom na päť žeriavu. Preto pre rovnosť momentov dostávame

$$T \cos(180^\circ - \varphi) s = -Ts \cos \varphi = mgd + 2l^2 \lambda g \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{mgd + 2l^2 \lambda g}{s \cos \varphi}. \quad (1.4.2)$$

Nulovým momentom musí pôsobiť zo zadania aj rameno v kĺbe žeriavu. Inými slovami, moment síl na rameno musí byť nulový vzhľadom na kĺb. Teda musí platiť

$$mgd + 2l^2 \lambda g = Tl \sin(\alpha) \Rightarrow \sin(\alpha) = -\frac{s \cos \varphi}{l}, \quad (1.4.3)$$

kde α je uhol medzi ramenom a lanom.

Ostáva nám vyjadriť $\sin(\alpha)$ pomocou s a φ aj z geometrie žeriavu. Keďže $\sin$ je protiľahlá deleno prepona, bude najšikovnejšie si ho vyjadriť ako pomer dvoch strán trojuholníka. To vieme urobiť z trojuholníka, ktorého prepona je tvorená lanom medzi hlavným a vedľajším ramenom. Dĺžku protiľahlej strany získame ako $s \sin \varphi$ a preponu z kosínusovej vety. Dostávame teda

$$\sin(\alpha) = \frac{s \sin \varphi}{\sqrt{l^2 + s^2 - 2ls \cos \varphi}}, \quad (1.4.4)$$

čo po dosadení do rovnice 1.4.3, osamostatnení odmocniny a umocnení dáva

$$l^2 \tan^2 \varphi = l^2 + s^2 - 2ls \cos \varphi. \quad (1.4.5)$$

Riešením kvadratickej rovnice pre s dostávame

$$\begin{aligned} s &= \frac{2l \cos \varphi \pm \sqrt{4l^2 \cos^2 \varphi + 4l^2 (\tan^2 \varphi - 1)}}{2} = l \left(\cos \varphi \pm \sqrt{\frac{\cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} \right) \\ &= l \left(\cos \varphi \pm \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 1) + \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} \right) = l \left(\cos \varphi \pm \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi (-\sin^2 \varphi) + \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} \right) \\ &= l \left(\cos \varphi \pm \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \right) = l \left(\frac{\cos^2 \varphi \pm \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \right) \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Z toho dostávame dve možné riešenia pre s a to

$$s = \frac{l}{\cos \varphi} \quad \text{resp.} \quad s = l \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}. \quad (1.4.7)$$

Vieme, že máme očakávať uhly z intervalu 90° až 180° , lebo lano musí byť na opačnej strane nohy ako hlavné rameno. V tomto intervale je prvý výraz vždy záporný, a teda ho môžeme vylúčiť ako nefyzikálne riešenie.

Zaujímavé pozorovanie je, že má zmysel uvažovať len uhly z intervalu 90° až 135° . Pre väčšie uhly klesne s pod 0. Pre krátkosť vzoráku dôvody tohto faktu necháme na vaše premyslenie.

1.5 Fúkanie speedrun

vzorák Adam, opravoval Adam

Jaro pripojil bombičku na ventil a v okamihu nafúkal koleso. Keďže tento dej trval len veľmi krátko, môžeme predpokladať, že medzi plynom a okolím za ten okamih nestihlo dôjsť k tepelnej výmene – a teda môžeme

„nafúknutie kolesa“ považovať za adiabatický dej. Adiabatický dej popisuje rovnica

$$pV^\kappa = \text{konšt.}, \quad (1.5.1)$$

kde κ je Poissonova konštanta. Hodnotu konštanty na pravej strane vieme určiť z podmienok na začiatku, kedy bol tlak plynu p_0 a objem plynu V_0 , preto

$$p_0 V_0^\kappa = \text{konšt.}$$

Z rovnice 1.5.1 tým pádom máme

$$pV^\kappa = p_0 V_0^\kappa. \quad (1.5.2)$$

Je síce pekné, že poznáme rovnicu, podľa ktorej sa bude správať plyn, rovnica nám však nič nehovorí o teplote, ktorú by mal mať plyn na konci! V plyne však medzi objemom, tlakom a teplotou existuje vzťah, ktorý im nedovoľuje nadobúdať ľubovoľné hodnoty. Ten vzťah nazývame stavová rovnica ideálneho plynu (a my náš plyn samozrejme budeme považovať za ideálny, Jaro by si do bombičky len tak hocijaký plyn nevzal) a hovorí nám, že

$$pV = NkT, \quad (1.5.3)$$

kde N je počet častíc plynu a k je Boltzmannova konštanta. Teraz si v rovnici adiabaty umelo vyrobíme súčin pV a dosadíme zaň z rovnice 1.5.3, čiže

$$pV^\kappa = pV V^{\kappa-1} = NkT V^{\kappa-1},$$

a teda

$$NkT V^{\kappa-1} = p_0 V_0^\kappa.$$

Čiže pre výslednú teplotu plynu platí

$$T = \frac{p_0 V_0^\kappa}{Nk V^{\kappa-1}},$$

kde

- p_0 je tlak plynu na začiatku deja (čiže ešte keď bol celý v bombičke),
- V_0 je objem plynu na začiatku deja (keď bol celý v bombičke),
- V je objem plynu na konci deja (čiže keď vypĺňal objem kolesa a bombičky),
- N je počet častíc a
- k je Boltzmannova konštanta (ktorej hodnota je $1,38 \cdot 10^{23}$).

Ak poznáme molárnu hmotnosť oxidu uhličitého $M_m = 44,01 \text{ g/mol}$, potom počet mólov oxidu uhličitého je $n = \frac{16 \text{ g}}{44,01 \text{ g/mol}} = 0,364 \text{ mol}$ a jeden mól obsahuje $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ častíc, čiže počet častíc oxidu uhličitého v bombičke je $N = 0,364 \text{ mol} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} / \text{mol} = 2,192 \cdot 10^{23}$ častíc.

Predpokladáme, že Jaro šliape už tak dlho, že stihlo dojsť ku všetkým tepelným výmenám s okolím, a teda teplota bombičky a jej obsahu je rovnaká, ako teplota okolia. Vonku mohlo byť vtedy $15^\circ\text{C} = 288,15 \text{ K}$. Ak poznáme teplotu plynu na začiatku deja, spolu s jeho tlakom na začiatku deja, potom veľkosť jeho objemu

na začiatku vyrátame zo stavovej rovnice

$$V_0 = \frac{NkT_0}{p_0} \doteq 0,000\,109\text{ m}^3.$$

Na konci deja bude plyn rovnomerne vyplňať objem kolesa spolu s objemom bombičky, čiže objem na konci deja je $V = V_0 + V_{\text{duše}}$. Jaro má kolesá s priemerom 26 palcov a šírku ráfika môžeme odhadnúť na 5 cm. Objem duše je potom približne objem valca, ktorý sme zohli do kruhu tak, aby sa jeho konce vzájomne dotkli, ktorého polomer podstavy je 2,5 cm a výška $2\pi \cdot 13$ palcov, pričom 13 palcov je približne 33 cm. Počítame

$$V_{\text{duše}} = \pi(2,5\text{ cm})^2 \cdot 2\pi \cdot 33\text{ cm} \doteq 0,004\text{ m}^3,$$

čiže

$$V = V_0 + V_{\text{duše}} = 0,000\,109\text{ m}^3 + 0,004\text{ m}^3.$$

Hodnota Poissonovej konštanty pre oxid uhličitý pri teplote okolo 20 °C je približne 1,30. Po dosadení všetkých hodnôt nám teplota plynu na konci nafukovania vyjde

$$T = \frac{p_0 V_0^\kappa}{Nk V^{\kappa-1}} = 97\text{ K}.$$

To je približne −186 °C, čo je naozaj málo. Z rovnice 1.5.3 vidíme, že objem plynu závisí od jeho teploty a tlaku ako $V \sim \frac{T}{p}$. Plyn z bombičky sa teda rozopol kvôli tomu, že sa znížil jeho tlak, ale pokles teploty mal na objem opačný efekt. Vypočítajme preto, či plyn z bombičky dokáže vôbec vyplniť celý objem $V = V_0 + V_{\text{duše}}$. Z rovnice 1.5.2 vypočítame tlak v duši

$$p = p_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^\kappa \doteq 64\text{ kPa}.$$

Vidíme, že tlak v duši je menší ako atmosférický $p_a \doteq 100\text{ kPa}$. Preto sa duša nenafúkne na objem $V = V_0 + V_{\text{duše}}$, ale na taký objem, aby tlak v nej bol rovný atmosférickému. Ak by v nej bol menší tlak, tlaková sila od atmosféry na povrch duše by bola väčšia ako tlaková sila od plynu v duši, a teda duša by sa stláčala. Preto, aby sme odpovedali na otázku zo zadania, musíme vypočítať teplotu plynu po adiabatickom rozpínaní na tlak p_a . Ak označíme V_a , T_a , objem, resp. teplotu plynu po tomto rozpnutí, pracujeme s rovnicou adiabatického deja a stavovej rovnice v tvare

$$p_0 V_0^\kappa = p_a V_a^\kappa \quad \text{a} \quad p_a V_a = NkT_a.$$

Opäť si v rovnici adiabaty vyrobíme súčin $p_a V_a$, aby sme zaň dosadili zo stavovej rovnice, teda

$$\begin{aligned} p_0 V_0^\kappa &= p_a V_a^\kappa \\ p_0 V_0^\kappa p_a^{\kappa-1} &= (p_a V_a)^\kappa \\ p_0 V_0^\kappa p_a^{\kappa-1} &= (NkT_a)^\kappa \\ T_a &= \frac{(p_0 V_0^\kappa p_a^{\kappa-1})^{\frac{1}{\kappa}}}{Nk} \doteq 105\text{ K}, \end{aligned}$$

čo je odpoveď, ktorú sme hľadali.

Aj teraz nám vyšla veľmi nízka teplota. Ak by sme sa dotkli kolesa, ruka by nám ale určite nezamrzla. Aj keď je vyprázdnenie bombičky veľmi rýchle, predsa len počas neho dochádza k tepelnej výmene a zohrievaniu plynu. Navyše, ak sa dotkneme kolesa, dotýkame sa gumy, ktorú plyn síce zvnútra ochladí, ale preto ju aj okolie začne zohrievať. Okrem toho, Jaro zo svojich skúseností vie, že jedna bombička postačuje iba na dofúknutie mäkkého kolesa, nie nafúknutie úplne prázdnej duše, a teda plyn z bombičky sa zmieša s plynom v duši. V praxi si teda nami vypočítanú teplotu rukami nedokážeme ohmatať.

1.6 Je to malý krok pre ľudstvo, ale veľký krok pre FKS

vzorák Rony, opravoval Tomáš

K problému pristúpime postupne, a teda kvalitatívne si rozoberieme, čo sa udeje. Ako je povedané v zadaní, úlomky rakety sa rozleteli do všetkých smerov. Tie, čo leteli priamo od Zeme, tesne unikli a nikdy sa už nevrátili, pričom slovo „tesne“ chcelo naznačiť, že mali práve toľko energie, aby sa im toto podarilo a ani o kúsok viac.

Samozrejme, kusky, ktoré vyleteli smerom priamo na Zem, sa po priamke na Zem aj dostali. Otázne je, čo urobili kusky, ktoré vyleteli pod nejakým netriviálnym uhlom α voči spojnici rakety so Zemou. Pri-pomeňme si, že všetky kusky vyleteli rovnakou počiatočnou rýchlosťou v_0 . Keďže kúsok letiaci priamo preč „tesne“ unikol, každý kúsok letel po parabolickej trajektórii.¹ Táto znalosť je síce príjemná a zrejme by sa dala dotiahnuť aj do kompletného riešenia, existuje však aj jednoduchší prístup.

V momente výbuchu rakety je celková energia každého úlomku

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{d}. \quad (1.6.1)$$

Podľa zákona zachovania energie sa energia každého úlomku v čase nemení. Pozrime sa teda na úlomky, ktoré „tesne“ unikli. To sú tie, ktoré prišli do nekonečna ($1/r = 0$) a na to museli využiť všetku svoju kinetickú energiu ($v = 0$). Preto mali tieto úlomky celkovú energiu $E = 0$. No keďže všetky úlomky majú rovnakú celkovú energiu, tak pre každý platí, že

$$0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{d}. \quad (1.6.2)$$

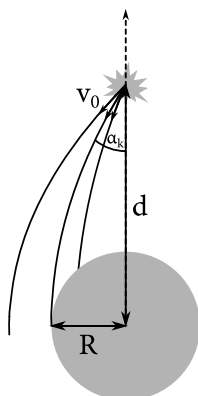
Vyjadrením v_0 rovno zistíme, že $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{d}}$.

Ako druhý použijeme zákon zachovania momentu hybnosti. Gravitačná sila smeruje do stredu Zeme, takže moment sily vzhľadom na tento stred musí byť nulový. Preto

$$|L| = |m\mathbf{v} \times \mathbf{r}| = mv_0d|\sin \alpha|, \quad (1.6.3)$$

kde „ $\times$ “ značí vektorový súčin. Vtedy platí $|\mathbf{v} \times \mathbf{r}| = |\mathbf{v}||\mathbf{r}||\sin \theta|$, kde $\theta \in (0^\circ, 180^\circ)$ je uhol medzi vektormi $\mathbf{v}$ a $\mathbf{r}$, pričom $\mathbf{r}$ smeruje zo stredu Zeme do úlomku.

¹Až na tie, ktoré sa pohybovali po spojnici. Takým parabolám nadávame *zdegenerované*.



Obrázok 1.6.1: Úlomky rakety na parabolických dráhach

Počas svojho letu sa niekedy úlomok dostane k Zemi najbližšie, povedzme do vzdialenosti r_m od stredu. Nás zaujíma, či $r_m < R$ a úlomok narazí do Zeme; alebo či $r_m > R$ a úlomok uletí.² V tomto bode bude samozrejme vektor rýchlosti $\mathbf{v}$ kolmý na $\mathbf{r}$, inak by sa úlomok od stredu vzdaloval alebo k nemu približoval, a teda by nemohol byť najbližšie. Z toho nám vyjde, že v tomto bode

$$v_m r_m = v_0 d |\sin \alpha|. \quad (1.6.4)$$

Dosadením do zákona zachovania energie

$$\frac{1}{2} m v_m^2 = G \frac{M m}{r_m} \quad (1.6.5)$$

za v_m a vyjadrením r_m dostaneme

$$r_m = \frac{v_0^2 d^2 \sin^2 \alpha}{2GM} = d \sin^2 \alpha. \quad (1.6.6)$$

Inými slovami, pre hraničný prípad $\alpha = \alpha_h$, kedy $r_m = R$ a úlomok sa tesne dotkne Zeme, platí

$$\sin \alpha_h = \sqrt{\frac{R}{d}}. \quad (1.6.7)$$

Teraz už nám stačí vypočítať priestorový uhol Ω pripadajúci tomuto planárnemu. Ak si to nepamätáme, po troche googlenia zistíme, že táto závislosť je

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha_h). \quad (1.6.8)$$

Celý priestorový uhol je 4π , a tak na Zem dopadne podiel p úlomkov

$$p = \frac{\Omega}{4\pi} = \frac{1 - \sqrt{1 - R/d}}{2}. \quad (1.6.9)$$

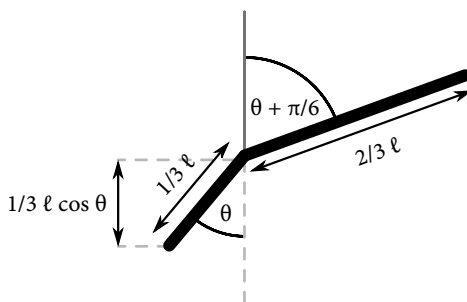
²Čo sa presne stane keď $r_m = R$, sme žiaľ ešte nezistili.

1.7 Dekoračné kmity

vzorák Dvojka, opravoval Tomáš

Veľkým trikom v tomto zadaní je voľba hodnoty M , ktorá nám veľmi uľahčí život. Musíme sa prehrabať hĺbkou hnusnej algebry? Áno! Ale mohlo to byť horšie.

Začneme tým, že sa spýtame, aké stupne voľnosti má tento systém. Ako sa telo vtáka hýbe hore-dolu, krídla sa nakláňajú okolo dvoch bodov upevnenia späťým pohybom. Máme tu teda jeden voľný parameter – ten si prezieravo zvolíme ako uhol naklonenia krídla. Konkrétne sme si uhlom θ označili, ktorý zviaza spodná časť krídla so zvislicou – pomyselným predĺžením upevňovacieho lanka, ktoré je vždy rovnobežné s gravitačným zrýchlením:



Obrázok 1.7.1: Jarov kmitajúci vták

Potom uhol, ktorý s hornou časťou zvislice zviaza dlhšia časť krídla, je $\theta + \frac{\pi}{6}$. Napokon výška najspodnejšieho bodu krídla, na ktorú je priviazané spodné lanko, sa s naším parametrom mení ako $\frac{1}{3}l \cos \theta$. Tu vstupuje prvá aproximácia: samozrejme, ako sa krídlo otáča, spodné lanko sa tiež trochu vychýľuje zo zvislého smeru, čo trochu ovplyvňuje výšku vtáčieho tela – avšak my, inžinieri, povieme len, že spodné lanko je dostatočne dlhé na to, aby sme toto mohli zanedbať. A napokon uhlovú rýchlosť krídla označíme ako ω .

Aký je teda náš modus operandi? Nuž, vieme, že vták má nejakú stabilnú polohu zodpovedajúcu uhlu θ_0 , okolo ktorého kmitá ako harmonický oscilátor; nájdeme teda potenciálnu a kinetickú energiu ako funkcie výchylky a uhlovej rýchlosti – $U(\theta)$, $T(\theta, \omega)$ – a potom povieme, že v blízkosti stabilnej polohy je vták iba taký efektívny harmonický oscilátor s efektívnou tuhosťou k_f a efektívnou hmotnosťou m_f . Jeho energie si teda vieme zapísať ako

$$U(\theta \approx \theta_0) = U_0 + \frac{1}{2}k_f(\theta - \theta_0)^2 \quad (1.7.1)$$

$$T(\theta \approx \theta_0, \omega) = \frac{1}{2}m_f\omega^2.$$

Toto položíme rovné nájdeným energiám v blízkosti stabilnej polohy a nájdeme k_f a m_f . Potom klasicky pre harmonický oscilátor vieme, že perióda kmitu je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_f}{k_f}}. \quad (1.7.2)$$

Začneme s potenciálnou energiou. Jedna spodná časť krídla má potenciálnu energiu $U_1(\theta)$, ktorá sa rovná zvislej zložke polohy ťažiska krát hmotnosť časti krídla krát g . Pre tyč dĺžky A otáčajúcej sa okolo konca je zvislá zložka polohy ťažiska jednoducho $-\frac{1}{2}A \cos \theta$ (keďže ťažisko je v polovici) – u nás je dĺžka $\frac{1}{3}l$. Teda

$U_1(\theta) = -\frac{1}{6}mgl \cos \theta$. Podobne je potenciálna energia jednej hornej časti krídla rovná $U_2(\theta) = \frac{2}{3}mgl \cos(\theta + \frac{\pi}{6})$, keďže má dĺžku $\frac{2}{3}l$ a hmotnosť $2m$. Pozor na znamienka: keď našej parametrizácii θ rastie, U_1 musí rásť a U_2 (pre kladné θ) musí klesať.

Teraz ešte pozrieme na potenciálnu energiu tela vtáka $U_3(\theta)$. Tu už máme aproximáciu pre zvislú zložku polohy ťažiska, takže ju vynásobíme hmotnosťou a gravitačným zrýchlením a dostaneme $U_3(\theta) = -\frac{1}{3}Mgl \cos \theta$. Keď to dáme dokopy, vidíme, že celková potenciálna energia je rovná

$$U(\theta) = 2[U_1(\theta) + U_2(\theta)] + U_3(\theta) = \left[\frac{4}{3}m \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{1}{3}M + \frac{1}{3}m\right) \cos \theta \right] l g. \quad (1.7.3)$$

Teraz dosadíme hodnotu $M = (4\sqrt{3} - 1)m$, použijeme súčtový vzorec pre kosínus, vyčíslime sínus a kosínus konštanty a získame

$$U(\theta) = -\frac{2}{3}mgl(\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta). \quad (1.7.4)$$

Teraz nájdeme stabilnú polohu θ_0 . Toto sa dá nájsť položením celkového momentu sily rovnému nule, ale pre prípravu na to, čo príde neskôr, na to pôjdeme inak (samozrejme, s rovnakým výsledkom). Vieme, že stabilná poloha je v minime potenciálnej energie – a keď je nejaká funkcia v danom bode v minime, do prvého rádu sa v okolí toho bodu nemení. Teda v stabilnej polohe musí pre θ_0 platiť, že pre malú výchylku $d\theta$ máme $U(\theta_0 + d\theta) \approx U(\theta_0)$, ak využijeme aproximácie do prvého rádu (teda $\sin d\theta \approx d\theta$, $\cos d\theta \approx 1$). Počítame:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}mgl(\sqrt{3} \cos \theta_0 + \sin \theta_0) &= -\frac{2}{3}mgl(\sqrt{3} \cos(\theta_0 + d\theta) + \sin(\theta_0 + d\theta)) \\ \sqrt{3} \cos \theta_0 + \sin \theta_0 &= \sqrt{3} \cos \theta_0 \cos d\theta - \sqrt{3} \sin \theta_0 \sin d\theta + \sin \theta_0 \cos d\theta + \cos \theta_0 \sin d\theta \\ 0 &= (\cos \theta_0 - \sqrt{3} \sin \theta_0) d\theta \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

$$\frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} = \tan \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{6}$$

Máme už potenciálnu energiu aj stabilnú polohu, nuž je čas nájsť kinetickú energiu. Tu musíme zapojiť vedomosť o momente zotrvačnosti tenkej tyče dĺžky A a hmotnosti μ : keď rotuje okolo konca, je to $I = \frac{1}{3}\mu A^2$. Pri uhlovej rýchlosti ω je potom kinetická energia tyče rovná $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{6}\mu A^2\omega^2$. Takýmito tyčami sú napríklad časti krídel: spodná časť má kinetickú energiu $T_1(\theta, \omega) = \frac{1}{54}ml^2\omega^2$ a vrchná časť $T_2(\theta, \omega) = \frac{8}{54}ml^2\omega^2$. Rýchlosť tela vtáka je rovná zvislej zložke rýchlosti koncového bodu spodnej časti krídla: to je jeho dĺžka krát uhlová rýchlosť krát $\sin \theta$ (aby to bola len zvislá zložka). Kinetická energia je potom štvorec tejto rýchlosti krát $\frac{1}{2}M$; dokopy to dá

$$T_3(\theta, \omega) = \frac{1}{18}M \sin^2 \theta l^2 \omega^2. \quad (1.7.6)$$

Dokopy je to v okolí stabilného bodu

$$T(\theta \approx \theta_0, \omega) = 2(T_1 + T_2) + T_3 = \frac{1}{3}ml^2\omega^2 + \frac{4\sqrt{3}-1}{18}ml^2\sin^2\theta_0\omega^2 = \left(\frac{23}{72} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right)ml^2\omega^2. \quad (1.7.7)$$

Rovno vidíme, že v okolí stabilného bodu je efektívna hmotnosť rovná

$$m_f = \left(\frac{23}{36} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right)ml^2. \quad (1.7.8)$$

Aby sme našli efektívnu tuhosť, musíme si vyjadriť potenciálnu energiu ako funkciu výchylky $d\theta$ – čiže presne to, čo už sme raz robili, len tentokrát využijeme aproximácie druhého rádu (teda $\sin d\theta \approx d\theta$, $\cos d\theta \approx 1 - \frac{1}{2}d\theta^2$). Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} U(\theta_0 + d\theta) &= -\frac{2}{3}mgl(\sqrt{3}\cos\theta_0\cos d\theta - \sqrt{3}\sin\theta_0\sin d\theta + \sin\theta_0\cos d\theta + \cos\theta_0\sin d\theta) \\ &= -\frac{2}{3}mgl\left(\sqrt{3}\cos\theta_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_0 d\theta^2 - \sqrt{3}\sin\theta_0 d\theta + \sin\theta_0 - \frac{1}{2}\sin\theta_0 d\theta^2 + \cos\theta_0 d\theta\right) \\ &= U(\theta_0) + (\sqrt{3}\sin\theta_0 - \cos\theta_0)\frac{2}{3}mgl d\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_0 + \frac{1}{2}\sin\theta_0\right)\frac{2}{3}mgl d\theta^2 \\ &= U(\theta_0) + \frac{2}{3}mgl d\theta^2. \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

Lineárny člen podľa očakávania v blízkosti stabilnej polohy zmizne a z kvadratického člena usúdime, že $k_f = \frac{4}{3}mgl$. A teda

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3\left(\frac{23}{72} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right)l}{2g}}. \quad (1.7.10)$$

1.8 Rýchlostný podpaľáč

vzorák Anna Oleárová, opravovala KatkaM

Ako vzorové uvádzame veľmi pekné riešenie od Anny Oleárovej.

Aparatúra

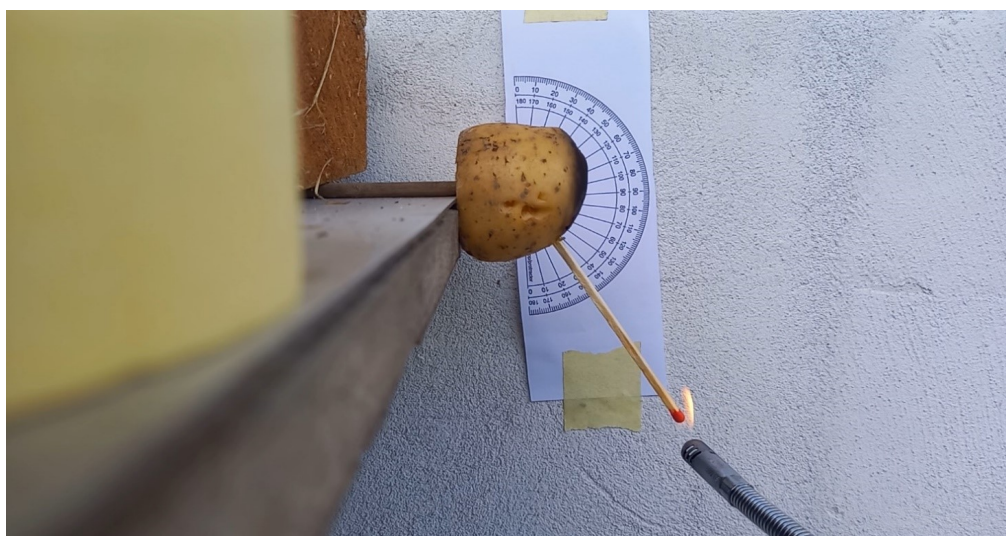
1. dlhé zápalky
2. zapaľovač
3. uhlomer
4. zemiak
5. stabilne uchytený telefón



Obrázok 1.8.1: Aparatúra

Metodológia experimentov

1. Na stenu som prilepila uhlomer, pred ten som na stôl položila zemiak tak, aby bol v strede uhlomera. Podľa toho som nastavila aj telefón s kamerou. Hodnotu 0° som si určila v smere kolmo nahor. (Na fotkách s kladnými hodnotami bol síce uhlomer otočený o 90° , pri spracúvaní údajov boli hodnoty ale upravené a počítané správne, podľa mnou určenej vertikálnej osi.)
2. Do zemiaka som zapichla dlhú zápalku vždy do hĺbky okolo 5 mm. Keď nastali uhly väčšie ako 90° , zemiak som napichla na palicu, ktorú som uistila drevom, aby sa nehýbala. Zemiak vytŕčal zo stola, a preto bolo možné zapichnúť zápalku aj v týchto uhloch.
3. Vždy som zápalku zapálila zapalovačom.
4. Pokusy som robila s rozstupmi po 10° a vždy trikrát, čo robí dokopy 57 videí.



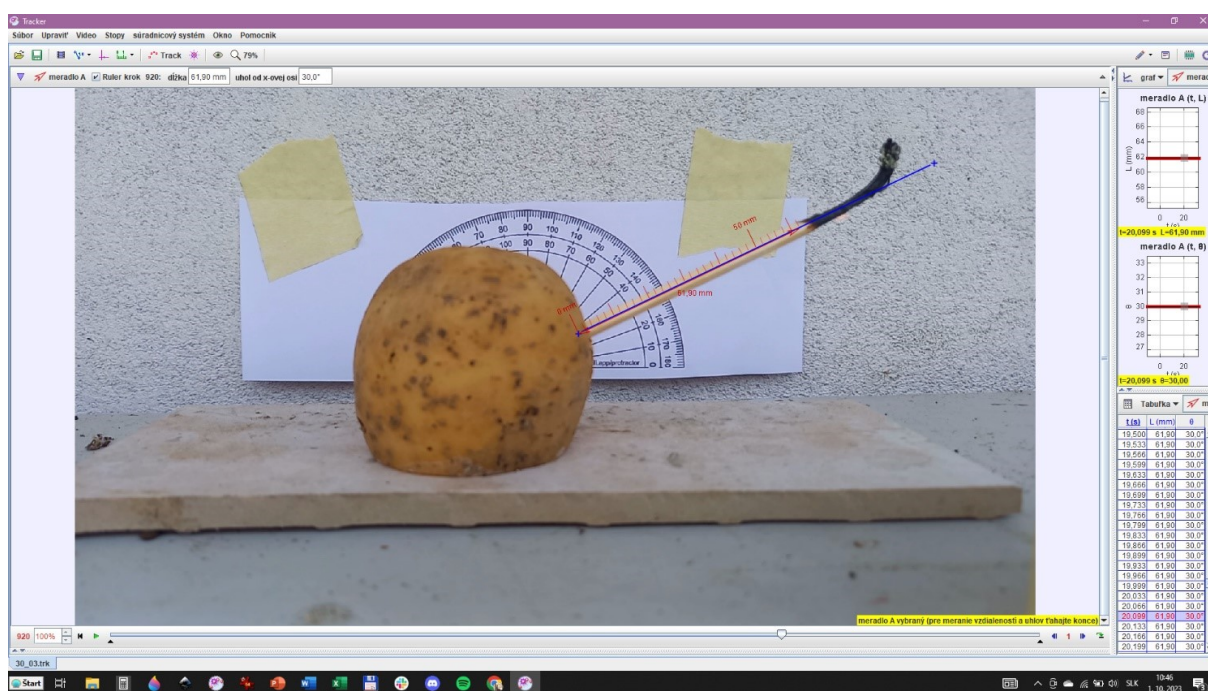
Obrázok 1.8.2: Aparatúra

Metodológia spracúvania údajov

1. Videá som spracúvala v programe *Tracker*.
2. Ako referenčnú škálu som použila zápalku. Zápalka bola zapichnutá 5 mm v zemiaku, jej hlavička má cca 10 mm na dĺžku, a celá zápalka má dĺžku $100 \text{ mm} \pm 2 \text{ mm}$ (hodnoty podľa balenia).
3. Čas horenia som určovala od momentu, kedy prestane horieť iba hlavička a chytí sa aj samotná drevená časť zápalky, nakoľko hlavička horí pri všetkých uhloch rýchlosťou s minimálnym rozdielom, lebo celá vzplanie naraz. Kebyže do času započítam aj horenie hlavičky, čas by bol mierne dlhší, ale u všetkých uhlov rovnako. Prišlo mi preto také objektívnejšie dávať hodnoty už ustáleného plameňa.
4. Čo sa týka dĺžky, nemerala som priamo zošúverenú spálenú časť, ale od 85 mm (= 100 mm celej dĺžky – 5 mm zo zapichnutia – 10 mm z hlavičky) som odčítala dĺžku nespálenej zápalky v mm.
5. Potom som vypočítala rýchlosť nasledovným vzorcom:

$$\text{rýchlosť horenia}[\text{mm/s}] = \frac{\text{dĺžka spálenej zápalky}[\text{mm}]}{\text{čas horenia}[\text{s}]}$$

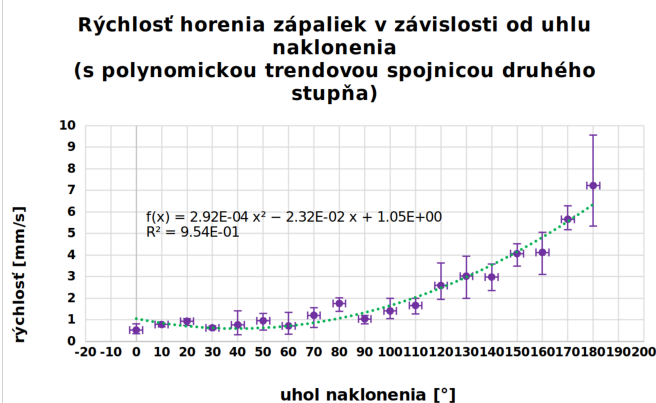
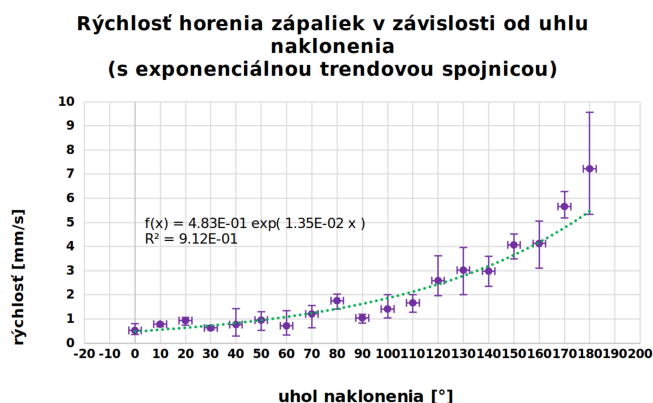
6. Rýchlosti z troch meraní som spriemerovala. Chybové úsečky y -ovej osi (teda nepresnosti pri rýchlosti) sú tvorené rozdielom medzi najvyššou a najnižšou rýchlosťou z troch meraní a spriemerovanej rýchlosti. Chybové úsečky x -ovej osi (teda nepresnosti pri uhloch) som si sama určila na $2,5^\circ$ alebo $\frac{\pi}{72} \text{ rad} = 0,0436 \text{ rad}$.



Obrázok 1.8.3: Aparatúra

Keď som skúsila merania fitnúť polynomiálnym trendom druhého stupňa, rovnica spoľahlivosti bola 0,954. Táto hodnota nie je úplne 1, ale to je odôvodniteľné odchýlkami v meraní (popísané nižšie). Pekne sedel aj fit exponenciálny s rovnicou spoľahlivosti o hodnote 0,912. Fitujeme len polovicu možných uhlov, lebo druhá

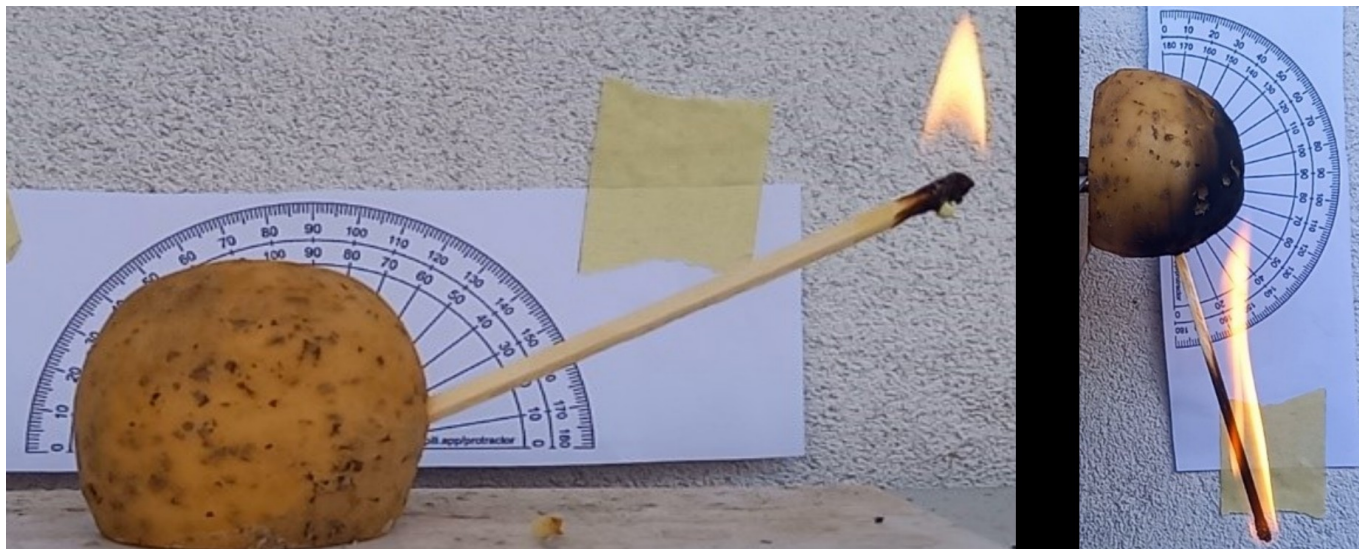
polovica je symetrická. Je to v podstate to isté, akoby som kameru otočila voči zemiaku so zápalkou opačne a horela by stále v rovnakých hodnotách. Je to osovo súmerné.³



Obrázok 1.8.4: Namerané hodnoty vynesené do grafov.

Kvalitatívne vysvetlenie

Tento trend má celkom dobré kvalitatívne vysvetlenie. Keďže plameň stúpa nahor, je pochopiteľné, že keď sa nachádzame v uhloch väčších ako 90° (kedy je nad hlavičkou smerom nahor zvyšok zápalky – drevená časť), tak sa plameň chytí o drevo nad horiacou hlavičkou. Z tohto dôvodu aj všeobecne horeli zápalky v týchto uhloch dlhšiu vzdialenosť. Častokrát zhorela aj celá zápalka, čo sa pri uhloch menších ako 90° nestávalo skoro vôbec.



Obrázok 1.8.5: Rozdiel horenia zápalky pri rôznych uhloch

³Je dôležité podotknúť, že v tomto prípade ani jedna z fitovaných funkcií nie je podložená žiadnou teóriou. Z toho dôvodu fitované funkcie nemôžeme považovať za fyzikálne relevantné závislosti, ale iba prostriedok na odhadnutie hodnôt medzi meranými bodmi. Táto skutočnosť je viditeľná aj na zásadnej odchylke funkcií a reálnych hodnôt na koncoch grafov. Fitované funkcie majú preto skôr význam, aby sme si uvedomili, že pravdepodobne nepôjde o žiadnu jednoduchú závislosť.

Analýza chýb merania

Dôvodov, prečo výsledky sú nie úplne presné, môže byť viacero:

1. zápalka zapichnutá pod nepresným uhlom ($\pm 2,5^\circ$)
2. zápalka zapichnutá do nepresnej hĺbky (cca 5 mm)
3. neidentické zápalky
4. nedostatočné množstvo opakovaní experimentov
5. nepresne nalepený uhlomer
6. efekty prúdenia vzduchu v lokalite točenia
7. nepresné určenie začiatku horenia drevenej časti zápalky

Všetkým týmto chybám som sa snažila vyhnúť viacnásobnou kontrolou, či sa nevyskytli. Samozrejme je ale možné a isté, že nejaké sa predsa len vyskytli a ovplyvnili výsledky.