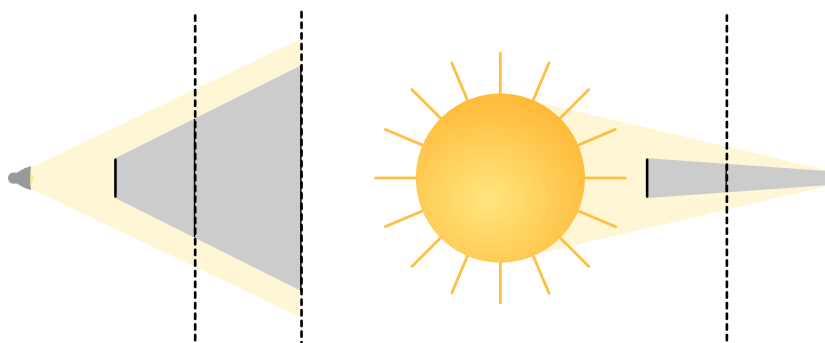


Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Trocha kultúry

vzorák Pa3k, opravoval Pa3k

Dôvod, prečo sa dejú odlišné veci je, že máme dva rozmerovo veľmi odlišné zdroje. V prípade bábkového divadla máme zdroj svetla menší ako predmet, ktorého tieň sledujeme. Z obrázka vidíme, že čím ďalej bude tienidlo, tým väčší bude tieň. V druhom prípade máme ako zdroj svetla Slnko, ktoré je, hoc sa to takto zo Zeme nezdá, masívne väčšie ako hocikáký človek na Zemi. Aj napriek tomu, že je veľmi ďaleko, však bude svietiť tak, že tieň bude menší, keď tienidlo dáme ďalej. Obidva prípady sú len podobnosti trojuholníkov, takže ľahko vidíme, že veľkosť tieňa rastie/klesá lineárne so vzdialenosťou od tienidla. Pre zaujímavosť ešte dodáme, že ak by sme pri bábkovom divadle dali tienidlo veľmi ďaleko, tieň by postupne tiež zmizol kvôli efektom ako difrakcia (ohyb) svetla na prekážke, ktorá priamo vyplýva z Huygensovho princípu.



Obrázok 2.1.1: Rôzne zdroje svetla a tieň

2.2 Neúderné slony

vzorák Luc, opravovala Luc

V prvom rade by som chcela povedať, že pri písaní tohoto vzoráku nebolo ublížené žiadnemu chrobákovi.¹ Keďže chceme, aby z vás vyrástli všeobecne vzdelaní ľudia, dáme si na začiatok biologický úvod a pozrieme sa na stavbu tela chrobákov. Chrobáky patria medzi exoskeletov, to znamená, že nemajú kosti, na ktoré sú následne pripnuté šlachy, tak ako my ľudia. V skutočnosti majú kostrou zvonka obalené celé svoje telo. Zaujímavosťou je, že napríklad taký roháč dokáže zdvihnúť objekt, ktorý má 1141-násobnú² hmotnosť jeho tela.

Porovnajme to s ľuďmi – pri veľmi vysokých výkonoch vedia vrcholoví športovci zdvihnúť v priemere 9-násobnú hmotnosť svojho tela v mŕtvom ťahu a to „len“ na niekoľko sekúnd.³ Ako je teda možné, že najlepší športovci nedokážu len tak z ničoho nič zdvihnúť 5000 kilogramové závažie a prejsť sa s ním po ulici? Je to preto, lebo na to nie sme fyzicky usposobení. Jednou z vecí, ktoré by sa nám museli v tele zmeniť, je prierez kostí, ktorý by sa musel niekoľkonásobne zväčšiť. V tomto bode sa dostávame k fyzike a k nášmu príkladu chrobáka a slona.

¹Dúfam, že ste si tento príklad nepomýlili s experimentálkou.

²<https://www.science.org/content/article/scienceshot-worlds-strongest-insect>

³<https://www.livestrong.com/article/423273-strength-to-weight-ratio-in-powerlifting/>

Náš ideálny chrobák má hmotnosť M (a to nemá každý chrobák!). Ďalej má homogénnu hustotu, čiže ľubovoľný pomer hmotnosti nejakej jeho časti a jej objemu je konštanta $\rho = \frac{M}{V}$, z toho si môžeme vyjadriť hmotnosť ako $M = \rho V$. Povedzme si, že teraz chceme chrobáka zväčšiť, avšak nie hociako. Chceme, aby sa jeho hustota nezmenila. To znamená, že chrobáka musíme zväčšiť vo všetkých smeroch n -násobne. Ak uvážime, že chrobák má výšku, šírku a dĺžku, tak jeho objem sa zväčší n^3 -krát. Čo sa stane s hmotnosťou chrobáka? To vieme hneď povedať z rovnice pre hustotu $M = \rho V n^3$, čo nie je nič prekvapivé. Ak mám 27 rovnakých kociek a postavím z nich jednu veľkú kocku, tak jej hmotnosť bude dvadsaťsedemkrát hmotnosť jednej kocky.

Teraz príde tá zaujímavá časť. Otázkou zostáva, či môžeme chrobáka zväčšovať takýmto spôsobom do nekonečna, alebo v istom momente to už jeho nožičky nezvládnu.⁴ Otázka súvisí s tlakom, ktorý je vyvíjaný na nohy. Vieme, že tlak vyjadruje pomer sily F na plochu S , čiže $p = \frac{F}{S}$.

Označme p_c ako kritický tlak, pri ktorom to už náš homogénny chrobák nezvládne. Sila F je v našom prípade tiažová sila a S je prierez jeho nohy, ktorých má počet k . Tlak meriame tesne pri konci nohy, pretože tam je najväčší. Takže dostávame

$$p = \frac{F_t}{kS} = \frac{Mg}{kS}.$$

Ak teraz chrobáka zväčšíme n násobne, plocha prierezu jeho nohy sa zväčší n^2 -krát a dostávame, že tlak závisí lineárne od n , čiže

$$p = \frac{\rho V n^3}{kS n^2} = \frac{\rho V n}{kS}.$$

Takže je jasné, že pre $n > \frac{kSp_c}{\rho V}$ to už chudák chrobák neprežije.

Skúsme sa zamyslieť nad tým, ako by sa musel meniť prierez, čiže hrúbka chrobákových nôh, aby sa mu nič nestalo pri zväčšovaní. Na to, aby sa nám n vykrátilo vo vzorci pre tlak, potrebujeme aby S celkovo rástlo ako n^3 . Z toho vyplýva, že naše nové n bude rovné $n^{3/2}$.⁵ Napríklad ak chceme, aby telo chrobáka narástlo 3-krát v každom smere ($n = 3$), hrúbka nôh sa musí zväčšiť v každom smere $3^{3/2} = 3\sqrt{3}$ -krát, čo je viac ako pôvodných 3-krát.

Okrem hrúbky nôh chrobáka by sa dala meniť aj ich pevnosť. Tak by sa zdalo, že by sme mohli posunúť hodnotu kritického tlaku. Avšak vo väčšine prípadov pevnejší znamená ťažší a to môže robiť problém. Pri zväčšení pevnosti by sa zväčšila aj hmotnosť a teda by sa mohlo stať, že hodnota p_c by bola v skutočnosti nižšia. Z toho sa dá vydedukovať, že chrobáky majú veľmi pevný exoskelet vzhľadom na ich telesnú hmotnosť a to je jeden z dôvodov, prečo sa im nič nestane keď spadú z veľkej výšky. Samozrejme je tu ešte veľa biologických ale, no to už necháme na vás.

2.3 Otáznik v otázke

vzorák Kubo, opravoval Kubo

K tejto úlohe sa dalo pristupovať mnohými spôsobmi. Prvé, čo možno vidieť je, že niektorými vetvami nebude tiecť vôbec žiaden prúd. Týmto a prekresľovaním schémy som začal i ja – rýchlo som však došiel na to, že sa nikam nedostanem. Bolo preto treba vytiahnuť silnú zbraň, ktorej sme sa možno chceli vyhnúť.

⁴Viem, veľmi kruté.

⁵ $n_0^3 = n^2$, kde n_0 je naše pôvodné n z toho dostávame $n = n_0^{3/2}$

Prv, než budeme čokoľvek rozoberať bližšie, pomenujme si uzly obvodu písmenkami – potom napríklad U_{GL} je napätie medzi bodmi G a L, a je jasné, že napríklad $U_{GL} = U_z$. No a obdobne I_{GL} bude prúd medzi týmito bodmi – ak je kladný, prúd tečie v smere GL, ak je záporný, prúd tečie naopak.

Kirchhoffove zákony

Ide o dve jednoduché tvrdenia: Prvé hovorí, že z každého uzla musí vytekať toľko elektrického prúdu, koľko doň vteká. Napríklad pre bod J bude tento zákon vyzeráť ako $I_{IJ} + I_{FJ} + I_{KJ} + I_{LJ} = 0$. Pripomeňme, ak je napríklad I_{KJ} kladné, prúd tečie smerom do J , ak záporné, prúd tečie smerom z J .

Druhé tvrdenie popisuje napätia na spotrebičoch a zdrojoch v slučke: koľko napätia je na zdrojoch, toľko úbytku musí byť na spotrebičoch. Napríklad pre slučku $CGHEFC$ bude platiť $U_{CG} + U_{GH} + U_{HE} + U_{EF} + U_{FC} = 0$ – ak je zdroj v smere našej slučky, počítame mu kladné napätie; ak je zdroj proti smeru slučky, jeho napätie berieme ako záporné.

No a tieto dva zákony sú previazané ešte zákonom Ohmovým – napríklad bude platiť $I_{HI} = \frac{U_{HI}}{R_{HI}}$.

Nepekne riešenie

Ak si vypíšeme všetky Kirchhoffove rovnice pre všetky slučky a uzly, dostaneme niečo ako n rovníc o n neznámych, ktoré vieme riešiť. Zámerne som vynechal povzbudivé slovíčko „ľahko“ – zdravá miera sebalásky mi zabránila to riešiť takto, no odhadol by som hodnotu $n \approx 15$ a to na riešenie vôbec nevyzerá príjemne, takýto postup by som sa nebál nazvať fyzikálnym bruteforcom.

Príjemnejšie riešenie

Hneď vidno, že ak nájdeme slučku ako napríklad $IEFJ$, teda takú, ktorá má len jeden rezistor s neznámym napäťovým úbytkom, Kirchhoffov zákon pre slučku bude vcelku príjemný. Napríklad pre slučku $IEFJ$ hneď vidno, že napäťový úbytok na rezistore bude $U_{EF} = U_z$.

Ak prv vypočítame napäťový úbytok na rezistore CF pomocou slučky $CGLJFC$, zistíme, že tento bude $3U_z$. Potom sa stačí pozrieť na slučku $CFJKDC$ – súčet zdrojových napätí je tu nulový a tak súčty spádov napätia na rezistoroch musia byť nulové a preto na otáznikovom rezistore toto bude $-3U_z$. (Veľkosťou rovnako, ako na CF , len prúd tečie opačne.) No a veľkosť prúdu teda bude $\|I\| = \left\| \frac{U}{R} \right\| = \frac{3U_z}{R}$.

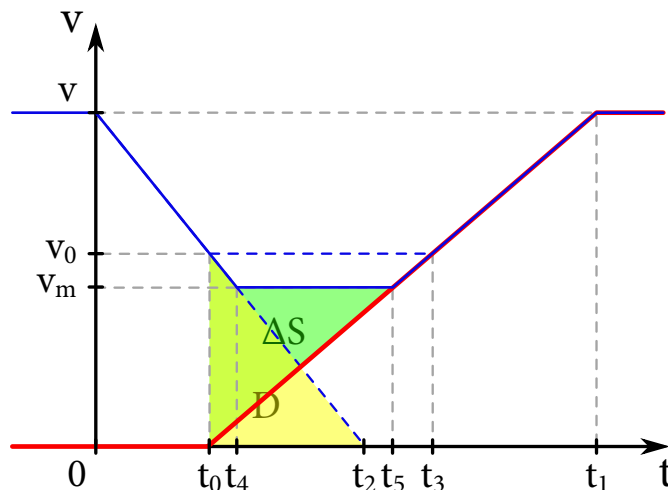
WOW riešenie

Vezmime si slučku $CGLJKDC$. Napäťový úbytok na všetkých spotrebičoch spolu musí byť rovnaký ako súčet napätí zdrojov v smere tejto slučky, teda spolu $3U_z$. Lenže všetky spotrebiče sú len náš rezistor s otáznikom, teda spád napätia na ňom je $3U_z$ a z Ohmovho zákona vieme hneď dopočítať prúd $\frac{3U_z}{R}$.

2.4 Red light, green light

vzorák Jaro, opravovala Nina

Označme si počiatočnú rýchlosť Kvíkovho auta ako aj rýchlosť oboch áut po ukončení zrýchľovania v , zrýchlenie áut a , ich spomalenie d a čas, kedy naskočí zelená, meraný od začatia brzdenia t_0 . Poďme sa najskôr zamyslieť nad tým, ako museli vyzeráť priebehy rýchlostí jednotlivých áut, a zakreslime si ich do grafu.



Obrázok 2.4.1: Graf závislosti rýchlosti áut od času

Začnime autom stojacim na križovatke. To má až do času t_0 nulovú rýchlosť, potom do času

$$t_1 = t_0 + \frac{v}{a} \quad (2.4.1)$$

rovnomerne zrýchľuje a následne sa pohybuje konštantnou rýchlosťou v .

Kvíkovo auto sa pohybuje do času $t = 0$ rýchlosťou v , kedy začne brzdiť so spomalením d . V čase t_0 naskočí zelená. Vtedy má rýchlosť $v_0 = v - dt_0$. Ak by Kvík brzdiť neprestal, zastal by v čase

$$t_2 = \frac{v}{d}. \quad (2.4.2)$$

Zo zadania vieme, že by zastal tesne za autom stojacom na križovatke, keby sa to už skôr nepohlo. To ale znamená, že dráha, ktorú by prešiel pri brzdení medzi časmi t_0 a t_2 zodpovedá vzdialenosti, v ktorej boli autá od seba v momente, keď naskočila zelená. Tú ale vieme vypočítavať jednoducho, pretože dráha zodpovedá ploche pod grafom, teda

$$D = \frac{1}{2}(t_2 - t_0)v_0 = \frac{(v - dt_0)^2}{2d}.$$

Zamyslime sa, ako sa ďalej mohla vyvíjať rýchlosť Kvíkovho auta. Na základe niekoľkých jednoduchých úvah dostaneme pár obmedzení:

- Kvík musí spomaliť aspoň na takú rýchlosť, aby v každom momente bol za autom idúcim pred ním.
- Najvyššia bezpečná rýchlosť, na ktorú musí spomaliť, zrejme zodpovedá situácii, keď po opätovnom zrýchlení oboch áut na maximálnu povolenú rýchlosť bude tesne za ním.
- Keď je Kvíkova rýchlosť vyššia ako rýchlosť druhého auta, Kvík toto auto dobieha, keď je menšia, druhé auto sa od Kvíka vzdaluje, keď je rovnaká, vzájomná vzdialenosť áut sa nemení. Z toho vyplýva, že v optimálnom scenári v zmysle predchádzajúceho bodu nesmie Kvík dosiahnuť maximálnu rýchlosť neskôr ako druhé auto. Ak by sa tak stalo, znamenalo by to, že v nejakom časovom úseku pred dosiahnutím ustáleného stavu by sa druhé auto pohybovalo rýchlejšie, ale keďže optimálny scenár zodpovedá situácii, keď sú autá tesne za sebou, Kvík by už narazil do auta pred sebou.

- Kvík môže zrýchľovať s ľubovoľným zrýchlením, nie však väčším ako a . Podobne môže spomaľovať s ľubovoľným spomalením, nanajvýš však rovným d . Ak však nebude zrýchľovať/spomaľovať s maximálnymi zrýchlením/spomalením, bude mu rovnaká zmena rýchlosti trvať dlhšie a prejde pri tom väčšiu dráhu, takže bude vo výsledku musieť spomaliť na menšiu rýchlosť, čiže sa mu to neoplatí.
- Ak nájdeme nejaký vyhovujúci časový priebeh rýchlosti Kvíkoveho auta a chceli by sme ho optimalizovať tým, že niekde zvýšime rýchlosť, na inom mieste ju musíme zase znížiť. Z toho vyplýva, že optimálny priebeh je rovnomerný pohyb, pretože konštantnú rýchlosť už takto nevieme ďalej optimalizovať.

S týmito poučeniami sa môžeme vrátiť k popisovaniu Kvíkovej rýchlosti. Vieme, že v čase t_0 má rýchlosť v_0 . Ak by v_0 mala byť najmenšia rýchlosť, ktorú počas svojho pohybu dosiahne, teda aby nemusel ešte viac spomaliť, prešiel by aspoň dráhu, ktorá zodpovedá rovnomernému pohybu rýchlosťou v_0 až do času

$$t_3 = t_0 + \frac{v_0}{a} = t_0 + \frac{v - dt_0}{a}, \quad (2.4.3)$$

v ktorom sa jeho rýchlosť vyrovná s rýchlosťou druhého auta. Aby to bolo možné, nesmie byť táto dráha v porovnaní s dráhou druhého auta za rovnaký čas dlhšia o viac než D . Rozdiel dráh je rovný rozdielu plôch pod grafmi, teda

$$\begin{aligned} D &\stackrel{!}{\geq} \frac{1}{2}(t_3 - t_0)v_0, \\ \frac{(v - dt_0)^2}{2d} &\geq \frac{(v - dt_0)^2}{2a} \\ a &\leq d, \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

čo zjavne neplatí. To znamená, že Kvík musí spomaliť ešte na nižšiu rýchlosť než v_0 .

Poučení z našich úvah vieme, že Kvík musí spomaľovať s maximálnym spomalením d až na minimálnu rýchlosť – označme ju v_m – potom sa pohybovať rovnomerným pohybom a nakoniec rovnomerne zrýchľovať so zrýchlením a , takže teraz už vieme dokončiť graf rýchlosti Kvíkoveho auta. Do času

$$t_4 = \frac{v - v_m}{d} \quad (2.4.5)$$

spomaľuje na rýchlosť v_m , potom sa pohybuje touto rýchlosťou až do času

$$t_5 = t_1 - \frac{v - v_m}{a} = t_0 + \frac{v_m}{a}, \quad (2.4.6)$$

kedy sa rýchlosti oboch áut vyrovnajú a autá budú tesne za sebou. Následne obe autá spolu zrýchľujú so zrýchlením a , až dosiahnu maximálnu rýchlosť v v čase t_1 .

Teraz nám už zostáva len určiť rýchlosť v_m . Tú dostaneme z podmienky, že v čase t_5 budú autá tesne za sebou. Aby sa tak stalo, musí Kvík medzi časmi t_0 a t_5 prejsť práve o D väčšiu dráhu. Ako sme už raz hovorili, rozdiel dráh je rovný rozdielu plôch pod grafmi, čiže

$$\Delta s = \frac{1}{2}(v_0 - v_m)(t_4 - t_0) + \frac{1}{2}v_m(t_5 - t_0) = \frac{(v - v_m - dt_0)^2}{2d} + \frac{v_m^2}{2a}. \quad (2.4.7)$$

Dostávame teda podmienku

$$\begin{aligned}
 D &= \Delta s, \\
 \frac{(v - dt_0)^2}{2d} &= \frac{(v - v_m - dt_0)^2}{2d} + \frac{v_m^2}{2a}, \\
 \frac{(v - dt_0)^2}{2d} &= \frac{(v - dt_0)^2}{2d} - \frac{(v - dt_0)v_m}{d} + \frac{v_m^2}{2d} + \frac{v_m^2}{2a}, \\
 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d} \right) v_m^2 &= \frac{(v - dt_0)v_m}{d} \\
 v_m &= \frac{2(v - dt_0)}{1 + \frac{d}{a}}.
 \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Konečne sme našli hľadanú rýchlosť. Pre hodnoty zo zadania $v_m = 10 \text{ m/s} = 36 \text{ km/h}$.

2.5 Reálne cvičenie

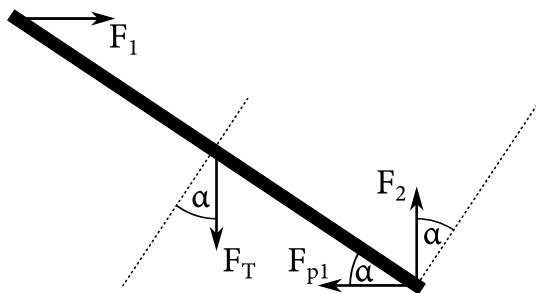
vzorák **Matúš**, opravoval **Matúš**

Ako prvé si vieme všimnúť, že celá situácia bude symetrická podľa spojnice spodného a horného kĺbu. Respektíve na pravú dolnú tyč budú pôsobiť symetricky rovnaké sily ako na ľavú dolnú tyč a rovnako to bude pre horné tyče. Preto ak zistíme, ako sa delia sily na pravej strane, rovnako sa budú deliť aj na ľavej. Ako druhé vieme, že súčet všetkých síl, ktoré pôsobia na tyč musí byť 0, inak by mali tyče podľa druhého Newtonovho zákona zrýchlenie a nebola by to ustálená situácia. Z ustálenej situácie vieme takisto určiť, že súčty momentov síl pôsobiacich na jednotlivé tyče musia byť 0, inak by pomôcka mala uhlové zrýchlenie a rotovala by.

Ak uvažujeme cvičiacu pomôcku ako uzavretú sústavu, zvonku pôsobí tiažová sila a normálová sila od podložky. Keďže sústava nezrýchľuje, aj ich súčet musí byť 0. Tiažová sila pôsobí na každú z tyčí rovnako, keďže majú rovnakú hmotnosť. Normálová sila od podložky sa však symetricky rozdelí medzi dolné dve tyče.

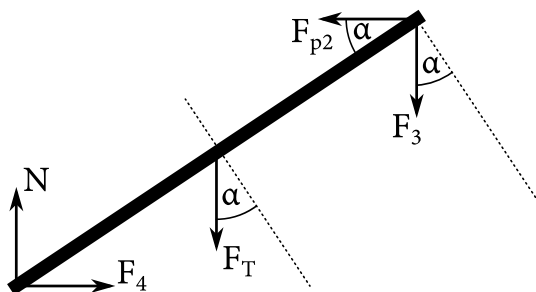
Okrem vonkajších síl tam sú aj vnútorné, ktorých celkový súčet musí byť 0, keďže ide o vnútorné sily. V prvom rade je tam sila od pružinky. Tá v pravom a ľavom kĺbe pôsobí silou rovnakej veľkosti opačného smeru. Tento smer je kolmý na vertikálnu os pomôcky a smeruje k nej. Okrem sily od pružinky sú tam ešte sily, akými na seba pôsobia tyče navzájom. Na tyč pôsobí v každom kĺbe sila kolmá na os uhla, ktorý zvierajú tyče v danom kĺbe, smerujúca od tejto osi. (To, že je kolmá na os uhla vieme z toho, že sila opačného smeru a rovnakej veľkosti musí pôsobiť na druhú tyč a nemá prečo na ňu pôsobiť pod iným uhlom ako na prvú.)

S týmito znalosťami si vieme nakresliť všetky sily, ktoré pôsobia na pravú hornú tyč



Obrázok 2.5.1: Sily pôsobiace na hornú tyč

a na pravú dolnú tyč:



Obrázok 2.5.2: Sily pôsobiace na dolnú tyč

Vidíme, že sila F_2 musí mať veľkosť mg . Vieme to z toho, že spolu s tiažovou je jediná, ktorá pôsobí na hornú tyč vo vertikálnom smere, a teda $F_2 = mg$.

Súčet momentov síl musí byť nulový vzhľadom na hociktorý bod – ak by to neplatilo, tyč by sa zrýchľujúco otáčala okolo daného bodu, lenže my vieme, že sa neotáča. Zvoľme si osi otáčania horný kĺb sústavy, a potom pre druhú rovnicu spodný kĺb. Vtedy z momentov síl musí platiť

$$F_2 \cos(\alpha)l = mg \cos(\alpha) \frac{l}{2} + F_{p1} \sin(\alpha)l,$$

$$mg \cos(\alpha) \frac{l}{2} + F_3 \cos(\alpha)l = F_{p2} \sin(\alpha)l.$$

Ostáva už len vyjadriť F_{p1} a F_{p2} a dať ich do pomeru:

$$F_{p1} = \cot(\alpha) \left(F_2 - \frac{mg}{2} \right) = \frac{1}{2} \cot(\alpha) mg,$$

$$F_{p2} = \cot(\alpha) \left(F_3 + \frac{mg}{2} \right) = \frac{3}{2} \cot(\alpha) mg,$$

$$\frac{F_{p2}}{F_{p1}} = \frac{\frac{3}{2} \cot(\alpha) mg}{\frac{1}{2} \cot(\alpha) mg} = 3,$$

respektíve

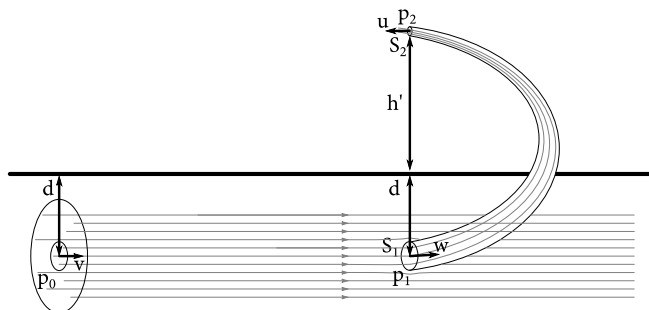
$$\frac{F_{p1}}{F_{p2}} = \frac{\frac{1}{2} \cot(\alpha) mg}{\frac{3}{2} \cot(\alpha) mg} = \frac{1}{3}.$$

2.6 Unterwassermann

vzorák Jaro, opravoval Jaro

Nebudeme chodiť okolo horúcej kaše a poďme Patrikovi pomôcť. S fyzikou. Vysvetľovať mu príslovia nemá zmysel. Každý predsa vie, že to má byť „ N -krát meraj a raz vyhodnoť chyby merania“.

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že keď ťaháme trubicu rýchlosťou v , voda do nej vteká práve touto rýchlosťou a výtokovú rýchlosť u na opačnom konci jednoducho dopočítame z rovnice kontinuity $S_1 v = S_2 u$. Je to však naozaj tak? Predstavme si, že trubica je veľmi vysoká. Len ťažko by sme verili, že by voda vytekala z trubice rýchlosťou $u = \frac{S_1}{S_2} v$ bez ohľadu na výšku trubice.



Obrázok 2.6.1: Vtekajúce a obtekajúce prúdnice

Vtip je v tom, že nech sa to akokoľvek zdá byť neintuitívne, voda do trubice vteká rýchlosťou $w \leq v$ vzhľadom na trubicu a vyteká z nej rýchlosťou $u = \frac{S_1}{S_2} w$, taktiež vzhľadom na trubicu. Musí totiž platiť aj Bernoulliho rovnica písaná vo vzťažnej sústave spojenej s trubicou

$$\frac{1}{2} \rho w^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho u^2 + h \rho g + p_2,$$

kde p_1 je tlak v mieste dolného otvoru trubice a p_2 tlak v mieste horného otvoru. Tlak p_2 je rovný atmosférickému tlaku p_{atm} , tlak p_1 je náročné určiť priamo vzhľadom na komplikované procesy v mieste vstupu vody do trubice. Čo však vieme urobiť, je písať Bernoulliho rovnicu v mieste skôr po prúdnici, ešte ďaleko pred vstupom vody do trubice. Tam sa voda pohybuje rýchlosťou v^6 pri tlaku $p_0 = p_{\text{atm}} + d \rho g$. Potom

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p_{\text{atm}} + d \rho g = \frac{1}{2} \rho u^2 + h \rho g + p_{\text{atm}}.$$

Odtiaľ

$$u = \sqrt{v^2 - 2h'g}, \text{ kde } h' = h - d.$$

Následne z rovnice kontinuity rýchlosť vody na vstupe do trubice vzhľadom na ňu je

$$w = \frac{S_2}{S_1} \sqrt{v^2 - 2h'g}.$$

⁶ stále vo vzťažnej sústave spojenej s trubicou

Keď už vieme, akou rýchlosťou voda cez trubicu prúdi, nič nám nebráni dopočítať hľadanú silu. Za čas δt vtečie do trubice a vytečie z nej voda s hmotnosťou $\delta m = \rho S_1 w \delta t$. Počas pobytu vody v trubici sa zmení jej rýchlosť o $u + w$, takže jej musíme udeliť impulz⁷

$$\delta I = \delta m(u + w) = \rho S_2 \left(1 + \frac{S_2}{S_1}\right) (v^2 - 2h'g) \delta t,$$

no a podľa prvej impulzovej vety

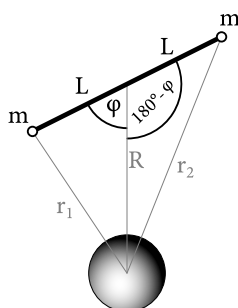
$$F = \frac{\delta I}{\delta t} = \rho S_2 \left(1 + \frac{S_2}{S_1}\right) [v^2 - 2(h - d)g].$$

2.7 Teoretické cvičenie

vzorák Tömás, opravoval Tömás

Keďže bol Hovorca taký milý, že nám v zadaní poradil, ako vyzerá potenciál gravitačného poľa, bola by škoda to nevyužiť. Predtým si ale uvedomme, čo sú to malé kmity. No predsa to, kde si môžeme dovoliť napísať, že pri výchylke x z rovnovážnej polohy na nás pôsobí sila $F = -kx$, kde k je konštanta úmernosti. To tiež znamená, že pri výchylke x máme potenciálnu energiu $E_p = \frac{1}{2}kx^2$.

Okrem toho kmitáme, čiže ak v nejakom momente máme rýchlosť $\dot{x}$ ⁸, máme kinetickú energiu $E_k = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2$, kde μ je naša hmotnosť. Pri zanedbaní trenia naša kmitajúca sústava žiadnu energiu nestráca, a teda ak jej na začiatku udelíme nejakú výchylku x_0 a rýchlosť $\dot{x}_0$, bude mať energiu $E = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{x}_0^2$, ktorá je stále rovnaká. Preto v každom čase platí, že $\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 = E = \text{konšt.}$ Teraz už len jednoducho vyjadríme uhlovú frekvenciu $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ a z nej periódu $T = \frac{2\pi}{\omega}$.



Obrázok 2.7.1: Vychýlená činka

Súc poučení prvým odsekom, vyjadríme si potenciálnu a kinetickú energiu. Potenciálna energia hmotného bodu m vzdialeného R od stredu Zeme je $E_p = -\frac{GMm}{R}$, kde M je hmotnosť Zeme. Vzdialenosti oboch koncov činky od stredu Zeme pri výchylke φ od zvislej polohy vieme ľahko vyjadriť z obrázka 2.7.1 pomocou kosínusovej vety ako

$$\begin{aligned} r_1 &= R^2 + L^2 - 2RL \cos \varphi \\ r_2 &= R^2 + L^2 + 2RL \cos \varphi. \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

⁷Impulz sily je rovný zmene hybnosti sústavy.

⁸Bodka označuje časovú deriváciu, teda $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Potenciálna energia je potom

$$E_p = -GMm \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = -GMm \left(\frac{1}{R^2 + L^2 - 2RL \cos \varphi} + \frac{1}{R^2 + L^2 + 2RL \cos \varphi} \right). \quad (2.7.2)$$

Teraz by sme mali zistiť, pre aké φ je činka v rovnovážnej polohe. Mohli by sme deriváciou nájsť minimum funkcie $E_p(\varphi)$, alebo si uvedomíme, že zo symetrie úlohy dáva zmysel, že stabilná rovnovážna poloha by mohla byť zvislá ($\varphi = 0^\circ$) a/alebo⁹ „vodorovná“ ($\varphi = 90^\circ$). Pri pohľade na potenciálnu energiu $E_p \sim \frac{1}{r}$ je však jasné, že keď činku z vodorovnej polohy, kde obe závažia sú v rovnakej výške, otočíme do zvislej, závažie, ktoré kleslo, stratilo viac potenciálnej energie, ako vystúpavšie závažie získalo. Teda funkcia $E_p(\varphi)$ na intervale $[0^\circ, 90^\circ]$ rastie. Okrem toho, kvôli symetrii nemá zmysel uvažovať iné φ ako interval $[0^\circ, 90^\circ]$, čiže minimum potenciálnej energie, a teda stabilná rovnovážna poloha je iba vo $\varphi = 0^\circ$. Vo zvyšku úlohy nás teda budú zaujímať iba malé kmity okolo $\varphi = 0^\circ$.

Pri pohľade na rovnicu 2.7.2 ale vidíme, že sa vôbec nepodobá na tvar $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, ktorý chceme dostať. Pre malé kmity ale môžeme použiť Taylorov rozvoj, kde celý potenciál rozvineme okolo rovnovážnej polohy $\varphi = 0^\circ$. Využijeme, že

$$\frac{1}{\sqrt{a \pm b \cos \varphi}} \approx \frac{1}{\sqrt{a \pm b}} + \frac{\pm b \varphi^2}{4(a \pm b)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.7.3)$$

kde v našom prípade je $a = R^2 + L^2$ a $b = 2RL$. Aplikujúc to na rovnicu 2.7.2 dostaneme

$$E_p = -GMm \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2 - 2RL}} + \frac{-2RL\varphi^2}{4(R^2 + L^2 - 2RL)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2 + 2RL}} + \frac{2RL\varphi^2}{4(R^2 + L^2 + 2RL)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

pričom si spomenieme, že pri potenciálnej energii nás nezaujíma jej hodnota, ale iba rozdiel energií medzi dvomi bodmi. A keďže R a L sú konštanty, prvý a tretí zlomok sú tiež konštantné a pri kmitoch činky sa nemenia a môžeme ich bez ľútosti vyšktrnúť z rovnice. Potom potenciálnu energiu vieme upraviť na

$$E_p = GMm \frac{RL^2}{(R^2 - L^2)^3} (3R^2 + L^2) \varphi^2.$$

To už vieme zapísať ako $E_p = \frac{1}{2}k\varphi^2$, kde

$$k = 2GMm \frac{RL^2}{(R^2 - L^2)^3} (3R^2 + L^2).$$

Výborne, tú väčšiu polovicu už máme za sebou. Hmotné body na konci činky sa pohybujú po časti kružnice s polomerom L . Preto pri uhlovej rýchlosti $\dot{\varphi}$ je rýchlosť pohybu hmotného bodu $v = L\dot{\varphi}$, čiže kinetická energia oboch hmotných bodov spolu je

$$E_k = mL^2\dot{\varphi}^2.$$

To vieme zapísať ako $E_k = \frac{1}{2}\mu\dot{\varphi}^2$, kde

$$\mu = 2mL^2.$$

⁹Rovnovážna poloha nemusí byť len jedna.

Teraz už len spočítame uhlovú frekvenciu malých kmitov

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{GM \frac{R}{(R^2 - L^2)^3} (3R^2 + L^2)}$$

a periódu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R^2 - L^2)^3}{GMR(3R^2 + L^2)}}.$$

V každej slušnej domácnosti je činka oveľa menšia ako Zem, čiže pomer $\frac{L}{R} \ll 1$, a ak je tento pomer umocnený na druhú či nebudaj na tretiu, je už úplne zanedbateľný voči jednotke. Teda vzťah pre periódu vieme zjednodušiť na

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^6 \left(1 - \frac{L^2}{R^2}\right)^3}{GMR R^2 \left(3 + \frac{L^2}{R^2}\right)}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{3GM}}.$$

2.8 Profesionálna deformácia

vzorák Asi nebude, opravoval Jaro