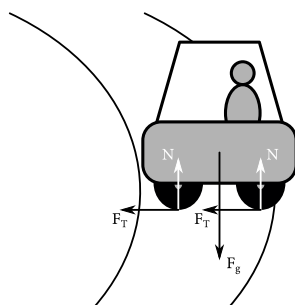


Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Lietanie neškodí

vzorák Lucka a Marcel, opravovala Tete

Pozrime sa najprv na to, čo sa deje s autom, keď zatača do strany. Kubko otočí volantom a kolesá auta sa vychýlia (otočia). Trenie medzi vozovkou a kolesami spôsobí, že auto nepokračuje v priamočiarnom pohybe, ale začne sa pohybovať po kružnici. Kým Kubko neotočil volant, pohyboval sa po priamke, a teda neexistovali žiadne sily, ktoré by pôsobili „zboku“ (kolmo na smer pohybu). V momente, ako Kubko otočil volantom, začala na neho pôsobiť odstredivá sila, ktorá ho tlačila smerom dookola (von zo zákruty).



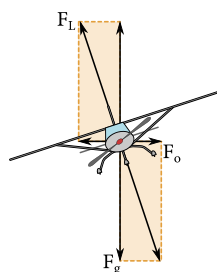
Obrázok 1.1.1: Auto v zákrute

Malá odbočka: Uvedomme si, že presne táto odstredivá sila spôsobí, že ak ideme autom v zákrute príliš rýchlo, odstredivá sila prekročí hranicu pokojového trenia medzi pneumatikami a vozovkou a dostaneme šmyk. Čo sa s tým dá robiť? Vieme zväčšovať súčiniteľ pokojového trenia (napríklad zdrsníť časť cesty), zväčšiť normálovú silu (napríklad pridať na auto [spoiler](#)), alebo zmenšiť odstredivú silu. Odstredivú silu vieme zmenšiť tak, že pôjdeme pomalšie, alebo zariadime, aby nám až tak veľmi nevadila (t. j. nepôsobila celá smerom dookola). Ako také niečo urobiť? Možno ste si už niekedy všimli, že niektoré zákruty sú naklonené (klopené), a nie je to preto, že by sa tam nedala postaviť vodorovná zákruta. Často takéto zákruty bývajú napríklad na pretekárskych okružoch. Dôvod, prečo takéto zákruty existujú je nasledovný: Ak je zákruta klopená, časť odstredivej sily sa rozloží tak, že tlačí auto smerom „dole“, teda zväčšuje normálovú silu. A to je už niečo veľmi podobné, ako v prípade lietadla.

Začnime s predstaviteľnejším príkladom ako je lietanie, a to s bicyklovaním. Pri zatáčaní na bicykli sme sa intuitívne naučili, že sa treba nakloniť do tej strany, do ktorej zatačame. Prečo to tak je? Vo vodorovnom smere na cyklistu pôsobí trecia sila a v zvislom smere normálová sila spolu s gravitačnou silou. Výsledná sila je rovná dostredivej sile. Ak sa presunieme do neinerciálnej sústavy spojennej s cyklistom, musíme pridať ešte aj odstredivú silu, ktorá je rovnako veľká ako dostredivá, ale smerovo opačne orientovaná, a preto cyklista necíti, že ho niečo tlačí do strany.

Ako je to však s lietaním? Možno sa vám viacerým zdalo tvrdenie úlohy neintuitívne, ale dá sa nájsť pomerne veľa videí (napríklad <https://youtu.be/KxMMPgh9e2U> alebo <https://youtu.be/zG9Xsb0YPYg>), kde vidno, že sa také niečo v realite deje. Je to však trochu podobné ako bicyklovanie. Ak sa lietadlo nakloní, tak okrem gravitačnej sily F_g , naň pôsobí sila F_L (vztlaková), ktorá udržiava lietadlo vo vzduchu. Ďalej naň pôsobí sila

F_l , ktorá je zodpovedná za zatáčanie, čiže je rovná dostredivej sile F_d . Keď sa presunieme do neinerciálnej vzťažnej sústavy spojenej s lietadlom, musíme zaradiť aj odstredivú silu $-F_d$, ktorá sa vykompenzuje so silou F_2 a Kubko tak necíti, že by ho do strany tlačila nejaká sila.



Obrázok 1.1.2: Lietadlo v zákrute

Na záver ešte niekoľko poznámok z leteckej praxe: To, že lietadlá robia také zákruty aby výslednica síl nesmerovala doľava nie je náhoda. Je to to, čo je náplňou prvých niekoľko hodín v leteckom výcviku, a takto správna zákruta sa volá „koordinovaná“, keďže vyžaduje koordináciu všetkých troch ovládacích prvkov (výškovka, smerovka a krídelká). Takáto koordinovaná zákruta sa dá urobiť pri stúpaní, klesaní, a môže mať ľubovoľný¹ náklon.

V prípade, že smer výslednej sily nie je zhodná s náklonom, ale smeruje von zo zákruty, tak smer, ktorým lietadlo smeruje nie je dotyčnica s jeho trajektóriou, ale smeruje smerom viac dovnútra zákruty. Takáto zákruta sa volá sklzová. V opačom prípade, ak sila smeruje dovnútra zákruty, je zákruta výklzová. Dôvod prečo sa lietajú koordinované zákruty je ten, že pri nich má lietadlo najmenší odpor (neletí bokom) a dochádza v najmenšej miere k nerovnomernému obtekaniu krídel, ktoré na malých rýchlostiach môže spôsobiť stratu vztľaku na jednom krídle.

Na to, aby pilot vedel, aká je výslednica síl pôsobiaca na lietadlo (aspoň teda smerom doprava/doľava) existuje prístroj nazývaný „gulička“.



Obrázok 1.1.3: „Gulička“

V prípade, že výslednica síl pôsobí do niektorej strany, je tak vychýlená aj gulička. Pilot takúto odchýlku opravuje podľa ľudového porekadla „Kam gulička, tam nožička, alebo kontra krídelkami.“ (Nožička preto, lebo nohami sa na lietadle ovláda smerovka.)

¹Teda, takmer ľubovoľný, keďže sme limitovaní výkonom motora a maximálnou rýchlosťou lietadla.

1.2 Zneviditeľnenie

vzorák Viki, opravovala Viki

Na začiatok trochu označenia – nech má naša ľadová kocka hranu dĺžky a .

Pri riešení tejto úlohy nám pomôže znalosť geometrickej optiky. Predstavme si, že máme rozhranie dvoch rôznych prostredí (napríklad vzduchu a ľadu, to by sa nám v tejto úlohe mohlo hodiť). Svetelný lúč, ktorý dopadá na rozhranie týchto dvoch prostredí, sa pri prechode do druhého prostredia môže lámať. To znamená, že ak lúč dopadá na rozhranie pod uhlom α_1 , po prechode opúšťa rozhranie pod uhlom α_2 (prechádzajúci lúč zostáva v rovine dopadu), pričom platí

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$

Tomuto poznatku sa hovorí Snellov zákon lomu. V jeho matematickej formulácii vystupujú ešte dve veličiny, n_1 a n_2 . Hovorí sa im indexy lomu a patria medzi konštanty definujúce optické vlastnosti materiálu. Nie je ťažké zistiť, že pre vzduch, $n_1 \approx 1$ (táto rovnosť je približná, ale dostačujúca pre naše potreby) a pre ľad $n_2 \approx 1,31$. Vidíme, že ľad má väčší index lomu – takému prostrediu sa hovorí opticky hustejšie.

Vráťme sa teraz k našej úlohe s muchou. Muchu vidíme vďaka tomu, že odráža svetlo, ktoré na muchu dopadá, do všetkých smerov. Miesto muchy si teda vlastne môžeme predstaviť bodový zdroj svetla, ktorý do všetkých smerov svetelné lúče vyžaruje.

Pozorný čitateľ si ale isto všimne, že takto vyslovený Snellov zákon má aj svoje hranice. V našej úlohe lúče prichádzajú od muchy, lámu sa na rozhraní ľadovej kocky a vzduchu. Platí teda, že

$$\sin \alpha_1 = 1,31 \sin \alpha_2.$$

Avšak uhly α_1 a α_2 sú obidva niekde medzi 0° a 90° , teda ich sínusy sú čísla medzi 0 a 1. Hneď teda vidíme, že α_2 , teda uhol pod ktorým dopadá svetlo z muchy zvnútra na stenu kocky, nemôže byť hocijaký. Konkrétne v našom prípade to môže byť najviac $\alpha_c = \arcsin \frac{1}{1,31} \approx 49,76^\circ$. Tomuto uhlu sa hovorí aj kritický uhol. Ak svetlo z muchy dopadá na stenu kocky zvnútra pod väčším uhlom, dochádza k takzvanému úplnému odrazu, kedy svetelný lúč neprechádza do druhého prostredia.

Množina bodov na stene kocky, na ktoré dopadá svetlo z muchy pod uhlom menším ako kritickým, tvorí kruh so stredom v strede steny. Toto je množina bodov, ktoré chceme začieniť. Zostáva určiť polomer tohto kruhu. To ale nie je ťažké, nakoľko vieme uhol, pod ktorým dopadá na hranicu kruhu svetlo z muchy – práve pod kritickým uhlom α_c . Jednoduchou goniometriou už potom vidíme, že polomer kruhu bude

$$r = \frac{a}{2} \cdot \tan \alpha_c \approx 1,18 \cdot \frac{a}{2}.$$

Hneď vidíme, že sme sa prerátali – takýto kruh už by mal polomer väčší, než je polovica dĺžky hrany kocky a preto sa celý nevojde na stenu kocky. Celý kruh má obsah $S_{\text{kruh}} = \pi r^2$, potrebujeme ale odrátať štyri kruhové odseky s výškou $h = \frac{a}{2} (\tan \alpha_c - 1)$. Obsah každého z nich je teda (autor si tiež tento vzťah musel nájsť na wikipédii, nebojte)

$$S_{\text{odsek}} = r^2 \arccos \frac{r-h}{r} - (r-h) \sqrt{r^2 - (r-h)^2}.$$

Krásne, nie? :) Takéto osekané „kruhy“ vzniknú na každej zo šiestich stien kocky. Zafarbené časti povrchu kocky tak majú plochu $6(S_{\text{kruh}} - 4S_{\text{odsek}})$, celá kocka má povrch $S_{\text{kocka}} = 6a^2$, teda pomer je

$$\frac{S_{\text{zafarbené}}}{S_{\text{kocka}}} = \frac{S_{\text{kruh}} - 4S_{\text{odsek}}}{a^2}.$$

Zostáva vyčíslieť, dostaneme hodnotu približne 0,942.

Poznámka

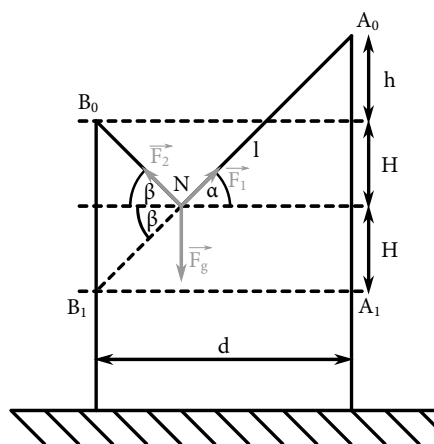
Je nutné dodať, že toto (mucha ako bodový zdroj svetelných lúčov) je jeden z možných spôsobov, ako sa pozerať na úlohu. Ak si povieme, že mucha je čierny bod, ktorý vidíme iba vtedy, ak ho dokážeme rozlíšiť voči podkladu, rovnakými úvahami prideme na to, že stačí zafarbiť polovicu pôvodného výsledku (konkrétne „kruhy“ na troch stenách so spoločným rohom). Tak muchu nebudeme vidieť pri pohľade zo žiadnej strany, či už kvôli nerozlíšeniu alebo priamo kvôli zafarbeniu. Aj takýto spôsob nahliadania na úlohu je dobrý.

1.3 Psie kusy

vzorák **Filip**, opravoval **Filip**

Začnime zaznačením známych a hľadaných veličín do obrázka 1.3.1. Našou úlohou je určiť výšku H pomocou zadaných veličín (teda pomocou l , d , h a M).

Ďalej si pre jednoduchšie vyjadrovanie označme bod, v ktorom je zavesená obruč bodom N , vrchol prvej tyče A_0 a bod A_1 je vo výške $2H + h$ pod vrcholom A_0 . Na tyči B je jej vrchol bod B_0 a bod B_1 je vo výške $2H$ pod vrcholom B_0 . Úsek A_0N zvierá s vodorovnou priamkou uhol α a úsek NB_0 uhol β . Úsek A_0N pôsobí na obruč ťahovou silou o veľkosti F_1 , úsek NB_0 silou s veľkosťou F_2 . Samotná obruč pôsobí na lano v bode N tiažovou silou F_g .



Obrázok 1.3.1: Hojdačka so zakreslenými silami.

Na riešenie úlohy je potrebné uvedomiť si dve veci. Tou prvou je, že časti lana NA_0 a NB_0 budú s vodorovnou priamkou zvierat rovnaký uhol. Keďže je bod N v pokoji, výslednica síl, ktoré naň pôsobia v x -ovom aj y -ovom smere, musí byť nulová. Rozkladom síl na vodorovné a zvislé zložky dostávame podmienku pre x -ový smer,

$$F_1 \cos \alpha = F_2 \cos \beta. \quad (1.3.1)$$

Voľne zavesenú obruč zároveň možno považovať za voľnú kladku, čo znamená, že ťahové sily F_1 a F_2 , ktorými na ňu pôsobia jednotlivé úseky lana, musia byť rovnaké. Z rovnosti síl v x -ovom smere vyplýva, že aj kosínusy oboch uhlov musia byť navzájom rovnaké, a teda aj uhly α a β musia byť rovnaké. To následne znamená, že časť lana NB_0 možno zobraziť podľa vodorovnej osi tak, že trojuholník $A_0B_1A_1$ je pravouhlý.²

Ďalej vieme, že poloha bodu N nebude závisieť na hmotnosti M obruče (teda aspoň v ideálnych podmienkach). Keďže predpokladáme, že lano je nehmotné a svoje rozmery vplyvom vonkajších síl nemení, na lano bude pôsobiť len tiažová sila v jednom bode. Preto bude pre rovnaké parametre d , h a l poloha bodu N rovnaká bez ohľadu na hodnotu M .

Úlohu sme si takto podstatne zjednodušili. Snažíme sa vyjadriť hodnotu výrazu $H+h$ (pozri obrázok 1.3.1), keďže hľadáme výšku pod vrcholom vyššej tyče. Podľa Pytagorovej vety platí

$$|A_0A_1| = \sqrt{l^2 - d^2}. \quad (1.3.2)$$

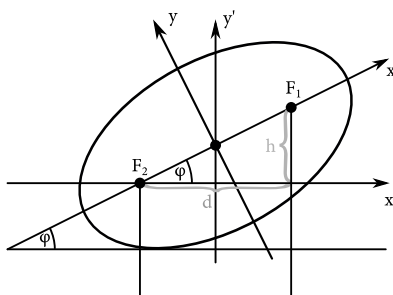
Zároveň ale platí $|A_0A_1| = 2H + h$, teda dostávame rovnosť, ktorú jednoducho upravíme:

$$\begin{aligned} 2H + h &= \sqrt{l^2 - d^2}, \\ H + h &= \frac{\sqrt{l^2 - d^2} + h}{2}. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Obruč sa ustáli v tejto výške pod vrcholom vyššej tyče.

Alternatívne sme si mohli všimnúť, že množina bodov, v ktorých sa môže obruč nachádzať, bude elipsa, ktorá má ohniská vo vrcholoch jednotlivých stĺpov a dĺžka lana predstavuje súčet vzdialeností bodov elipsy od týchto ohnísk. Nina sa ustáli v najnižšom bode tejto elipsy, kde má dotyčnica k elipse nulový sklon. Následne vieme využiť odrazovú vlastnosť elipsy, ktorá nám vraví, že lúč vychádzajúci z jedného ohniska elipsy sa pri odraze od dotyčnice v danom bode odrazí do druhého ohniska. Podľa zákona odrazu to ale znamená, že uhly α a β musia byť rovnaké (pozri obrázok 1.3.1). Keď už máme zdôvodnenú rovnosť týchto dvoch uhlov, vieme následne postupovať rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

Treťou možnosťou, o ktorú sa pokúsila približne tretina riešiteľov, je čisto analytické riešenie pomocou rovnakej elipsy ako v predchádzajúcom prípade. Toto riešenie je však o niečo zložitejšie a pracnejšie ako predchádzajúce dve.



Obrázok 1.3.2: Náčrt k analytickému riešeniu.

²Rovnosť síl musí platiť v x -ovom aj y -ovom smere. Stačí nám ale vyšetriť len jeden z nich, keďže obe podmienky musia byť splnené súčasne.

Na obrázku 1.3.2 môžeme vidieť, že ohniská elipsy sa nachádzajú na známych súradniciach. V „zvyčajnej“ súradnicovej sústave (označme ju $x'y'$), ktorá má x' -ovú os vodorovnú a y' -ovú zvislú však F_1F_2 nebude rovnobežná ani s jednou súradnicovou osou. Môžeme tak definovať karteziánsku sústavu xy , ktorá bude oproti sústave $x'y'$ otočená o uhol φ . Tangens tohto uhla vieme ľahko určiť, je to pomer $h : d$. V sústave xy tak budú mať ohniská súradnice

$$\begin{aligned} F_1 &= \left[-\frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{2}, 0 \right], \\ F_2 &= \left[\frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{2}, 0 \right]. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Vieme určiť predpis elipsy, keďže poznáme

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{l^2}{4}, \\ e^2 &= \frac{d^2 + h^2}{4}, \\ b^2 &= a^2 - e^2 = \frac{l^2 - d^2 - h^2}{4}, \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

kde e je lineárna excentricita, čiže vzdialenosť ohnísk od stredu elipsy.

Elipsa bude mať v sústave xy stred v jej počiatku. Jej predpis tak bude

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.3.6)$$

Zamerajme sa teraz na dotyčnicu k hľadanému najnižšiemu bodu. Vieme, že pôjde o priamku, ktorá bude mať predpis

$$y = kx + c_1, \quad (1.3.7)$$

kde k je jej smernica a c_1 bude absolútny člen. V sústave $x'y'$ bude mať táto priamka nulový sklon, teda bude vodorovná. V sústave xy , ktorá je oproti $x'y'$ otočená o uhol φ bude zvierat tento uhol s x -ovou osou. Bude mať zjavne záporný sklon, a preto bude pre jej smernicu k platiť

$$\begin{aligned} k &= -\tan \varphi, \\ k &= -\frac{h}{d}. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

My ale vieme, že dotyčnica k elipse v bode $[x_0, y_0]$ bude mať vo všeobecnosti predpis

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y &= 1, \\ y &= -\frac{x_0 b^2}{a^2 y_0}x + \frac{b^2}{y_0}. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Rovnice 1.3.7 a 1.3.9 ale budú ekvivalentné, t. j. musia byť splnené súčasne. To znamená, že aj koeficienty pri lineárnom člene v oboch rovniciach musia byť rovnaké, z čoho plynie rovnosť

$$-\frac{x_0 b^2}{a^2 y_0} = -\frac{h}{d} \quad (1.3.10)$$

Následne vieme vyjadriť napr. bod x_0 a dosadiť túto hodnotu do rovnice 1.3.6 (keďže aj bod $[x_0, y_0]$ patrí našej elipse), čím po (trochu nepeknej) úprave dostávame

$$y_0^2 = \frac{d^2 b^4}{h^2 a^2 + d^2 b^2}. \quad (1.3.11)$$

Všimnime si, že tak ako sme si zvolili sústavu xy , bude bod $[x_0, y_0]$ ležať v jej 3. kvadrante. Obe súradnice tak musia byť záporné. Z rovnice 1.3.11 preto vezmeme záporný koreň. Dostávame

$$y_0 = -\frac{db^2}{\sqrt{h^2 a^2 + d^2 b^2}}. \quad (1.3.12)$$

Túto hodnotu dosadíme do rovnice 1.3.10, čím získavame hodnotu pre x_0 .

$$x_0 = -\frac{ha^2}{\sqrt{h^2 a^2 + d^2 b^2}}. \quad (1.3.13)$$

Teraz, nám už sú známe súradnice bodu $[x_0, y_0]$, lenže v sústave xy . Chceme teda vypočítať vzdialenosť bodu N od priamky určenej ohniskom F_2 a smerovým vektorom $\mathbf{u} = (1, -\tan \varphi)$ (ten nám hovorí, že priamka zvierá s x -ovou osou uhol φ). Priamku nazvime p . Ľahko nájdeme normálový vektor tejto priamky $\mathbf{n} = (\tan \varphi, 1)$. Všeobecná rovnica tejto priamky tak bude v tvare $p: (\tan \varphi)x + y + c_2 = 0$, kde c_2 určíme, ak do rovnice dosadíme bod F_2 , ktorý jej patrí. Ak tak urobíme a za $\tan \varphi$ zároveň dosadíme podľa rovnice 1.3.8, dostávame predpis priamky p ,

$$p: \frac{h}{d}x + y - \frac{h\sqrt{h^2 + d^2}}{2d} = 0. \quad (1.3.14)$$

V sústave $x'y'$ bude teda priamka p vodorovná a prechádzajúca ohniskom F_2 . Tým, že počítame vzdialenosť bodu N od tejto priamky v sústave xy , počítame rozdiel y -ových súradníc bodov F_2 a N v sústave $x'y'$, teda práve hľadanú výšku pod vrcholom vyššej tyče.

Vzdialenosť $|p; N|$ vieme určiť podľa vzťahu

$$|p; N| = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

kde a, b, c sú koeficienty z predpisu priamky p a x_0, y_0 sú súradnice bodu N (v sústave xy). Všetky tieto hodnoty sú známe, preto dosádzame z rovníc 1.3.14, 1.3.13 a 1.3.12. Následne dostaneme krkolomný výraz, ktorý ďalej upravujeme. A skutočne po jeho zjednodušení dostaneme hľadaný tvar

$$|p; N| = \frac{\sqrt{l^2 - d^2} + h}{2}.$$

Uff.

1.4 Chutný vzduch

vzorák **Matúš**, opravoval **Matúš**

Ako prvé sa musíme pozrieť na to, čo by malo spĺňať správne riešenie. V prvom rade by malo mať správne jednotky. Akonáhle má jedna strana iné jednotky ako druhá, výsledok nemôže byť správny. Takisto ak sčítavame respektíve odčítavame, musia mať tieto veličiny rovnaké jednotky. Naopak vo vnútri funkcií (ako napríklad logaritmus a exponenciácia) musia byť bezrozmerné čísla.

Ďalej by malo platiť, že výsledok závisí práve od všetkých relevantných veličín. Napríklad v tomto prípade by výška, v ktorej balík praskne, nemala závisieť napríklad od merného odporu železa.

Ako tretie sa môžeme pozrieť na to, ako výsledok závisí od jednotlivých veličín. Napríklad by malo platiť, že ak balík znesie väčší pretlak, potom praskne vo väčšej výške a naopak.

$$1. \quad H = -\frac{p_0}{c} \ln\left(\frac{V_1 - V_0}{V_2 - V_0} \exp\left(-\frac{c}{p_0} h\right)\right)$$

Pri prvej rovnici nikde nevystupuje Δp . Od tej by to ale malo závisieť, lebo prakticky určuje pevnosť sáčku. Preto môžeme s istotou povedať, že toto riešenie je nesprávne.

$$2. \quad H = -\frac{p_0}{c} \ln\left(\frac{V_1 - V_0}{V_2 - V_0} \exp\left(-\frac{c}{p_0} h\right) + \frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

Teraz nám už výsledok závisí od Δp , no nesprávne. Ak Δp rastie, tak aj H by malo rásť. Ale v druhej rovnici bude s rastúcim Δp rásť aj logaritmus a teda výška H bude klesať. Pre dostatočne veľké Δp bude výška dokonca záporná, lebo logaritmus bude kladný a člen $-\frac{p_0}{c}$ bude záporný.

$$3. \quad H = -\frac{c}{p_0} \ln\left(\frac{V_1 - V_0}{V_2 - V_0} \exp\left(-\frac{p_0}{c} h\right) - \frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

V tomto prípade nám nesedia jednotky. Výsledok logaritmu musí byť bezrozmerné číslo, takže jednotky nám určuje len $-\frac{c}{p_0}$. Tlak je v Pa a konštanta c má jednotky Pa/m, lebo určuje o koľko poklesne tlak, ak vystúpame nejakú výšku. To znamená, že pravá strana rovnice má rozmer 1/m a ľavá m. Preto ani toto nemôže byť správny výsledok.

$$4. \quad H = -\frac{p_0}{c} \ln\left(\frac{V_2 - V_0}{V_1 - V_0} \exp\left(-\frac{c}{p_0} h\right) - \frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

Vieme, že logaritmus má vyjsť záporný, čo najmenší, aby bol výsledok čo najväčší. Preto aby H rástlo, vnútorný argument logaritmu sa musí blížiť k 0 sprava. Logika hovorí, že čím viac sa sáčok nafukoval, tým vyššie praskol (sáčok od čipsov je pevný a preto kým nedosiahne svoj maximálny objem, nezáleží na tom, aký pretlak znesie). Preto čím väčší je rozdiel $V_2 - V_1$, tým väčšie by malo byť aj H . To znamená, že argument logaritmu musí byť menší. To ale zlomok $\frac{V_2 - V_0}{V_1 - V_0}$ nesplňa.

$$5. \quad H = -\frac{p_0}{c} \ln\left(\frac{V_1}{V_2} \exp\left(-\frac{c}{p_0} h\right) - \frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

V tomto prípade výsledok nezávisí od V_0 . To by ale mal. Ak by sme si predstavili, že sáčok by sa nafúkol na dvojnásobok a v jednom prípade by čipsy zaberali zanedbateľnú časť objemu sáčku a v druhom by zaberali takmer celý jeho objem, tak v prvom prípade sa plyn v sáčku nafúkol na približne dvojnásobný objem

a v druhom na niekoľkonásobne väčší objem. Keďže tlak plynu je nepriamo úmerný jeho objemu (stavová rovnica), malo by to ovplyvniť výšku v ktorej praskne.

$$6. H = -\frac{p_0}{c} \ln\left(\frac{V_1-V_0}{V_2-V_1} \exp\left(-\frac{c}{p_0} h\right) - \frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

V šiestej rovnici máme výraz $\frac{V_1-V_0}{V_2-V_1}$, ktorý je tým väčší, čím sa sáčok menej nafúkol. Pre naozaj malé rozdiely V_1 a V_2 bude výsledok logaritmu kladný a výška záporná. To ale nedáva zmysel, lebo zároveň sa o aspoň kúsok nafúkol, takže Kvík musel niečo vystúpať. Preto ani táto rovnica nemôže byť správna.

$$7. H = -\frac{p_0}{c} \ln\left(\frac{2V_1-V_0}{V_2-V_0} \exp\left(-\frac{c}{p_0} h\right) - \frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

V prípade, keď by balík bol už na začiatku nafúknutý, čiže $V_1 = V_2$, by výška prasknutia nemala závisieť od jeho objemu. V takom prípade má balík už konštantný objem aj vnútorný tlak a výsledok by mal závisieť teda len od toho, aký pretlak balík znesie a ako rýchlo sa mení tlak s výškou. To ale siedma rovnica nespĺňa. Konkrétne je problém v časti $\frac{2V_1-V_0}{V_2-V_0}$.

$$8. H = -\frac{p_0}{c} \ln\left(\frac{V_1-2V_0}{V_2-V_0} \exp\left(-\frac{c}{p_0} h\right) - \frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

Správne riešenie by malo dávať výsledok aj pre prípad, že skoro celý objem sáčku bol vyplnený čipsami. Pre taký prípad ale v tejto rovnici dostávame záporný argument logaritmu a to je problém, lebo logaritmus je definovaný iba pre kladné čísla.

$$9. H = -\frac{p_0}{c} \ln\left(\frac{V_1-V_0}{V_2-V_0} \exp\left(\frac{c}{p_0} h\right) - \frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

V deviatej rovnici sa umocňuje e na kladné číslo. Preto s rastúcou počiatočnou výškou rastie argument logaritmu a tým klesá výška v ktorej balík praskne. Ak by sme ale mali dva prípady, kde by boli všetky objemy a odolnosť sáčku rovnaká, malo by platiť, že čím vyššie začneme, tým vyššie sáčok praskne.

$$10. H = \frac{p_0}{c} \ln\left(\frac{V_1-V_0}{V_2-V_0} \exp\left(-\frac{c}{p_0} h\right) - \frac{\Delta p}{p_0}\right)$$

V tomto prípade platí, že ak by sme zafixovali všetky veličiny okrem pretlaku, ktorý vrecúško vydrží, potom čím väčší pretlak by vydržal, tým menší by bol argument logaritmu. Preto keď zväčšujeme Δp , H sa zmenšuje. Preto ani desiatu rovnica nie je dobre.

1.5 Pingpongový tréning

vzorák Jozef, opravoval Hovorca

Na úvod si uvedomme, že máme statickú situáciu, pretože pingpongová loptička ostane stáť na mieste. Pri týchto slovách ste určite zajasali, pretože to znamená, že nebudeme musieť riešiť pohybové rovnice! Tak, ako to už pri riešení úloh na statiku býva, aj tu nám stačí spočítať výslednicu síl pôsobiach na loptičku a požadovať, aby sa rovnala nule (keby bola výslednica síl nenulová, potom by sa loptička pohybovala so zrýchlením). Najťažšou časťou tejto úlohy teda je rozmyslieť si, aké sily pôsobia na loptičku.

Prvá zo síl je gravitačná sila. Máme totiž Hovorcu hmotnosti M a loptičku hmotnosti m vo vzájomnej vzdialenosti R . Keďže Hovorcové údery sú fakt *masívne*, môžeme predpokladať, že vzdialenosť R medzi loptičkou a Hovorcom je omnoho väčšia ako sú ich samotné rozmery. Preto môžeme oba objekty aproximovať

hmotnými bodmi a dopustíme sa tým len minimálnej chyby. Avšak gravitačná sila, ktorou sa priťahujú dva hmotné body vo vzájomnej vzdialenosti R , je daná Newtonovým gravitačným zákonom

$$F_g = G \frac{Mm}{R^2}.$$

To bolo jednoduché! Teraz nám už ostáva len nájsť druhú zo síl pôsobiacich na loptičku – *tlak žiarenia*.

Ako môže svetlo pôsobiť silou na nejaké teleso? Veď predsa teória elektromagnetizmu nám hovorí, že svetlo nie je nič iné, ako vlnenie elektromagnetického poľa! Kde sa tam teda beria tlak? Odpoveď na túto otázku je z hľadiska elektromagnetizmu dosť náročná a my sa jej v tomto riešení vyhneme. Dôvod, prečo to môžeme urobiť, je ten, že sa na svetlo môžeme pozrieť aj z iného uhlu pohľadu. Namiesto toho, aby sme svetlo považovali za vlnu, predpokladajme, že ide o prúd malých častíc – *fotónov*. Tento predpoklad sa z klasického pohľadu zdá byť nezmyselný, ale v histórii sa ukázal ako kľúčový pri zrode kvantovej mechaniky. Obe interpretácie svetla sú si navzájom ekvivalentné³. Podľa Maxa Plancka je energia jedného takéhoto fotónu priamo úmerná jeho frekvencii (farbe) f , teda

$$E = hf,$$

kde konštantou úmernosti je *Planckova konštanta* h .

Keď máme vyjadrenú energiu jedného fotónu, potom už ľahko vypočítame jeho hybnosť, však? Nuž, bohužiaľ nie. Tu totiž narážame na ďalšiu hranicu klasickej mechaniky - vysoké rýchlosti. V našom každodennom živote si pri prepočte kinetickej energie a hybnosti vystačíme s klasickým vzťahom $E = \frac{p^2}{2m}$, kde p je hybnosť častice. Tento vzťah ale, podobne ako celá Newtonovská fyzika, prestáva platiť pri rýchlostiach blížiacich sa rýchlosti svetla. Aby sme získali správny vzťah, musíme sa obrátiť na Einsteina, podľa ktorého je správny vzťah medzi energiou a hybnosťou častice daný

$$E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + p^2 c^2},$$

kde m_0 je pokojová hmotnosť častice a c je rýchlosť svetla⁴. Fotóny sú však veľmi špecifické častice v tom, že sa pohybujú presne rýchlosťou svetla a zároveň majú nulovú pokojovú hmotnosť (teda $m_0 = 0$). Potom sa Einsteinov vzťah redukuje na $E = pc$, ktorý v tvare pre hybnosť zapíšeme ako

$$p = \frac{E}{c}.$$

Ako ale vypočítame silu pôsobiacu na loptičku? Najskôr si uvedomme, že loptička je dokonale čierna, čo znamená, že neodráža fotóny. Ak teda nejaký fotón s hybnosťou p narazí na loptičku, potom bude kompletne absorbovaný a všetku svoju hybnosť odovzdá loptičke. Podľa Newtonovho zákona je sila pôsobiaca na objekt rovná zmene hybnosti tohto objektu za čas (jedná sa o ekvivalentnú formuláciu zákona $F = ma$). Ak teda za čas Δt narazí do loptičky veľké množstvo fotónov s celkovou hybnosťou $\Delta p = \Delta E/c$, potom sila pôsobiaca

³Presnejšie povedané v oboch prípadoch sa jedná o aproximáciu skutočného svetla, ktoré je plne popísané až zákonmi kvantovej mechaniky

⁴Všimnite si, že ak spod odmocniny vyjmeme $m_0 c^2$ a použijeme aproximáciu $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$, ktorá je platná pre malé hodnoty x , potom dostaneme $E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2 c^2}{m_0^2 c^4}} \approx m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$, kde $m_0 c^2$ je pokojová energia častice (známy vzťah $E = mc^2$) a $\frac{p^2}{2m_0}$ je klasický vzťah pre kinetickú energiu. Pre malé hybnosti sa teda Einsteinov vzorec naozaj redukuje na klasickú verziu.

na loptičku bude

$$F_f = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{c \Delta t}. \quad (1.5.1)$$

Všimnite si, že výraz $\Delta E / \Delta t$ je vlastne výkon žiarenia dopadajúceho na loptičku.

Ako tento výkon určíme? No predsa z výkonu P Hovorcovej žiarovky! Uvedomme si, že výkon žiarovky nám hovorí koľko Jouleov energie vyžiari žiarovka za jednu sekundu. Teraz si predstavme sféru polomeru R s žiarovkou v jej strede a pýtajme sa aký svetelný výkon uniká z tejto sféry (teda koľko Jouleov energie prejde sférou za jednu sekundu). Odpoveď musí byť samozrejme P , pretože ak by to tak nebolo, potom by sa celková energia vo vnútri sféry zvyšovala. Ak tento výkon teraz predelíme plochou sféry $4\pi R^2$, potom dostaneme energiu, ktorá za jednotku času dopadne na 1 m^2 povrchu sféry. Teraz sa vráťme k loptičke. Tá má prierez πr^2 a nachádza sa vo vzdialenosti R od Hovorcu, teda na povrchu sféry. Výkon žiarenia, ktoré dopadá na loptičku, teda je

$$P_d = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{P}{4\pi R^2} \pi r^2 = \frac{Pr^2}{4R^2}.$$

Dosadením tohto do rovnice 1.5.1 pre silu žiarenia dostaneme vzťah

$$F_f = \frac{Pr^2}{4R^2 c}.$$

Teraz nám už len stačí dať túto silu do rovnosti s gravitačnou a dostaneme

$$G \frac{Mm}{R^2} = \frac{Pr^2}{4R^2 c} \implies P = 4cG \frac{Mm}{r^2}.$$

A toto je výsledok! Všimnite si, že nezávisí od vzdialenosti R medzi Hovorcom a loptičkou. To sa nám môže zdať na prvý pohľad neintuitívne, ale v skutočnosti to zmysel dáva, pretože gravitačná sila F_g a aj sila žiarenia F_f sú nepriamo úmerné štvorcu vzdialenosti. Ak by sme napr. loptičku umiestnili do vzdialenosti dvakrát väčšej, potom by gravitačná sila klesla štyrikrát, ale zároveň by štyrikrát klesla aj sila od žiarenia, teda loptička bude stále v rovnováhe.

1.6 Čo by kameňom dohodil

vzorák Majo, opravoval Majo

Na prvý⁵ pohľad sa zdá, že budeme musieť riešiť trojrozmernú úlohu. Do istej miery je to pravda – lebo keď kameň niekam vystrelíme, kým dopadne, Mesiace sa stihne mierne pootočiť. Mesiace sa však okolo svojej osi otáča dooooost pomaly, a tak zanedbajme toto pootočenie.

Môžeme sa vďaka tomu tváriť, že celá situácia bude prebiehať iba v rovine, v ktorej ležia Maťko, Kubko a stred Mesiaca⁶. Zároveň bude celá situácia symetrická podľa osi úsečky spájajúcej Maťka a Kubka.

Potrebuje vedieť niečo o trajektóriách, po ktorých sa môže kameň dostať ku Kubkovi. Patrilo by sa teda vedieť, ako tieto trajektórie môžu vyzeráť. Na to môžeme zavolať 1. Keplerov zákon. Možné trajektórie sú

⁵Pre niektorých aj na druhý, siedmy aj tristošesťdesiatšesť.

⁶Ak Maťko vystrelí kameň do nejakého smeru, rovina, v ktorej sa bude pohybovať kameň, bude tvorená Maťkom, stredom Mesiaca a určená vektorom rýchlosti kameňa na začiatku.

teda kužeľosečky – kružnica, elipsa, parabola alebo hyperbola. Zo symetrickosti situácie ale máme k dispozícii len tie kužeľosečky, ktoré sú symetrické podľa osi úsečky spájajúcej Maťka a Kubka. To nás do istej miery obmedzuje.

Podme sa zamyslieť, či by sme vedeli prehodiť Kubkovi kameň po hyperbole. Problém, ktorý totiž môže nastať, je, že pri výstrele strelíme rovno do Mesiaca. Ukážeme, že presne toto sa stane.

Najprv si pripomeňme, ako je definovaná hyperbola s ohniskami F_1 a F_2 . Je to množina tých bodov X v rovine takých, že $||XF_1| - |XF_2||$ sa rovná nejakej konštante. Inými slovami – ak sa priblížime k jednému z ohnísk, o rovnakú vzdialenosť sa musíme priblížiť aj k druhému ohnisku.

Prvý Keplerov zákon hovorí o hyperbole, ktorú používame ešte o kúsok viac – jej ohnisko musí ležať v strede Mesiaca. Druhé ohnisko leží niekde „nad“ touto hyperbolou. Z toho vyplýva, že keď sa posunieme po hyperbole od Maťka ku Kubkovi, naša vzdialenosť k druhému ohnisku sa zmenší. Tým pádom sa musí zmenšiť aj naša vzdialenosť od prvého ohniska, teda od stredu Mesiaca. V tom momente sme ale už pod povrchom Mesiaca⁷. Po hyperbole sa teda kameň pohybovať nebude.

Z podobných dôvodov sa kameň nebude pohybovať po parabole. Parabola je totiž definovaná tak, že keď si vyberieme priamku (direkčná priamka) a bod (ohnisko) mimo nej, na parabole budú ležať body, ktoré sú rovnako vzdialené od ohniska ako od direkčnej priamky. Opäť teda vidíme vlastnosť ako pre hyperbolu – keď sa priblížime k direkčnej priamke, musíme sa priblížiť k ohnisku.

Parabola, po ktorej sa musí pohybovať kameň musí mať svoje ohnisko v strede Mesiaca a direkčnú priamku opäť niekde „nad“. Takže po výstrele po parabole sa opäť kameň zavráta do Mesiaca.

Zostáva tak jediná možnosť – kameň sa bude pohybovať po elipse⁸. Tá bude mať jedno ohnisko v strede Mesiaca a zo symetrickosti bude jej hlavná os totožná s osou úsečky spájajúcej Maťka a Kubka. Podme zistiť, kde môže ležať druhé ohnisko. Všimnime si totiž, že poloha oboch ohnísk a poloha Maťka (resp. Kubka) nám potom jednoznačne určujú elipsu⁹.

V mierne degenerovanom prípade, keď sú obe ohniská v rovnakom bode, dostávame kružnicu. Presne tú kružnicu, ktorá je určená povrchom Mesiaca. To je skutočne jedna z možných trajektórií, ako môže Maťko poslať kameň Kubkovi.

Vo všetkých ostatných prípadoch to skutočne bude časť nejakej elipsy. Hoci teda, v niektorých prípadoch budeme trajektória tá menej triviálna, lebo v skutočnosti hodíme aj ponad južný pól.

V 21. storočí si všetky možné prípady už vieme jednoducho vyskúšať, a to na tejto adrese: <https://www.geogebra.org/calculator/zaykfzq>

Môžeme ísť počítať uhly. Začnime tým očividnejším prípadom, keď Maťko vystrelí kameň na tú stranu priamky Maťko-Kubko, na ktorej neleží stred Mesiaca. Najmenší uhol dosiahneme, keď bude druhé ohnisko totožné so stredom mesiaca, t. j. trajektória bude mať tvar kružnice. Vtedy dosiahneme uhol 0° .

⁷Pre pomalšie chápavých – nabúrali sme doň.

⁸Pre tých, ktorí by chceli rýpať: kružnicu považujeme tiež za elipsu.

⁹elipsa je totiž množina bodov, ktoré majú rovnaký súčet vzdialeností od oboch ohnísk. Ak vieme, kde sú obe ohniská a nejaký bod z elipsy, poznáme tento súčet vzdialeností, a teda celú elipsu.

Ako budeme hýbať ohniskom, bude sa uhol, pod ktorým Maťko strieľa, zvyšovať. Teoreticky najväčší uhol dosiahneme pre ohnisko akoby nekonečne ďaleko¹⁰.

Pozrime sa na trojuholník určený oboma ohniskami a Maťkom. Keď je druhé ohnisko v nekonečne, uhol pri ňom má veľkosť 0° . Uhol pri strede Mesiaca má veľkosť $\phi/2$, a teda uhol pri Maťkovi má veľkosť $180^\circ - \phi/2$. Teraz využijeme silne netriviálnu vlastnosť elipsy – že dotyčnica k elipse je osou vonkajšieho uhla v trojuholníku určenom ohniskami a bodom, v ktorom hľadáme dotyčnicu¹¹. A práve dotyčnica k tejto elipse je smer vektora rýchlosti, pod ktorým má Maťko vystreliť kameň. Vonkajší uhol pri Maťkovi má veľkosť $\phi/2$, takže jeho os ho rozdelí na dva s veľkosťou $\phi/4$. Keď dopočítame uhly, zistíme, že Maťko musí vystreliť pod uhlom $180^\circ - \phi/2 + \phi/4 - 90^\circ = 90^\circ - \phi/4$.

Ak by sme hľadali tento uhol v tom menej očividnom prípade, dostali by sme uhol pri Maťkovi veľkosti $\phi/2$. Podobným spôsobom ako v predošlom odseku by sme ale dostali, že v hraničnom prípade musí Maťko hádzať pod uhlom $\phi/4$.

Maťko teda môže hádzať pod uhlami s veľkosťami v intervale $(0^\circ, 90^\circ - \phi/4)$.

Úloha od nás chce ešte vypočítať, akou rýchlosťou musí Maťko vystreliť kameň v jednotlivých prípadoch. Veľmi dobre vieme, ako bude vyzeráť výsledná elipsa a jej hlavná polos. Hľadanú rýchlosť vďaka tomu vieme poľahky dostať z rovnice vis-viva:

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

V oboch prípadoch máme, že $r = R$, lebo Maťko stojí na povrchu Mesiaca. Pre uhol s veľkosťou 0° máme dĺžku hlavnej polosi $a = R$. V prípade pre uhol s veľkosťou $90^\circ - \phi/4$ je druhé ohnisko v nekonečne, takže aj $a = \infty$. V jednotlivých prípadoch dostávame rýchlosti¹²:

$$v_{0^\circ} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$v_{90^\circ - \phi/4} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Najmenší uhol, pod ktorým môže Maťko strieľať, je teda 0° , kedy musí strieľať rýchlosťou $v_{0^\circ} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. Najväčší uhol, pod ktorým môže strieľať, je zas $90^\circ - \phi/4$, kedy musí strieľať rýchlosťou $v_{90^\circ - \phi/4} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$.

¹⁰V takomto prípade ale ku Kubkovi kameň nikdy nepríde. Presnejšie tým teda myslíme, že sa s hľadaným uhlom vieme dostať ľubovoľne blízko k uhlu, ktorý by sme dostali, keby druhé ohnisko bolo skutočne v nekonečne.

¹¹Toto tvrdenie aj dokážeme. Označme ohniská F_1 a F_2 a bod, v ktorom hľadáme dotyčnicu ako P . Ďalej na polpriamke F_1P zvolíme za bodom P bod X taký, že $|PX| = |PF_2|$. Potom os vonkajšieho uhla pri bode P je súčasne osou úsečky F_2X . Predpokladajme, že na tejto osi leží nejaký iný bod Q , ktorý leží súčasne na elipse. Z vlastností elipsy dopočítame, že $|F_1X| = |F_1P| + |PX| = |F_1P| + |F_2P| = |F_1Q| + |F_2Q| = |F_1Q| + |QX|$. Z trojuholníkovej nerovnosti ale máme $|F_1X| \leq |F_1Q| + |QX|$ s rovnosťou iba v prípade, že Q leží na F_1X . Tým pádom bod Q musí byť totožný s bodom P , a teda os vonkajšieho uhla pri bode P pretína elipsu iba v bode P , t. j. skutočne je to dotyčnica.

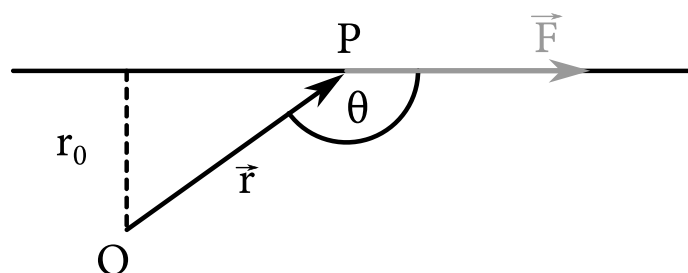
¹²Porovnaj tieto výsledky s prvou a druhou kozmickou rýchlosťou.

1.7 Pomsta je kladka

vzorák Tomáš, opravoval Tomáš

Malé kmity budeme riešiť ako obvykle – napíšeme si rovnicu pre momenty síl a pokúsime sa z nej dostať rovnicu harmonického oscilátora. Najprv si však budeme musieť ujasniť niekoľko vecí, ktoré v tomto riešení využijeme.

- Ak z kružnice s polomerom r vysekneme oblúk so stredovým uhlom φ , dĺžka tohto oblúka je $r\varphi$.
- Ak vektor sily $\vec{F}$ pôsobí v ľubovoľnom bode P na danej priamke, tak veľkosť momentu tejto sily voči nejakému bodu O bude $M = r_0 F$, kde r_0 je vzdialenosť priamky od bodu O (viď Obrázok 1.7.1). Dá sa na to prísť ľahko. Označme $\vec{r}$ vektor od bodu O k bodu P , potom veľkosť momentu sily vieme vyrátať pomocou sínusu uhla medzi vektormi $\vec{r}$ a $\vec{F}$ ako $M = |\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin \theta = r_0 F$, kde sme využili jednoduchú trigonometriu v pravouhlom trojuholníku.
- Pre rotačný pohyb platí rovnica pre moment sily $\tau = J\varepsilon$ ¹³, kde τ je moment sily a J je moment zotrvačnosti (analogicky k $F = ma$).
- Ak by kladka v zadaní bola nehmotná v bezťažkovom stave a miesto pružiny by bol Patrik, ktorý by lano potiahol silou F , tak závažie hmotnosti M na opačnej strane sa začne pohybovať so zrýchlením $a = \frac{F}{M}$, pričom naň pôsobí moment sily $\tau = rF$, kde r je polomer kladky. Zároveň sa kladka roztáča s uhlovým zrýchlením $\varepsilon = \frac{a}{r}$. Ak toto všetko dosadíme do $\tau = J\varepsilon$, zistíme, že moment zotrvačnosti závažia voči osi otáčania kladky je $J = Mr^2$, kde ešte raz pripomíname, že r je polomer kladky.



Obrázok 1.7.1: Moment sily vektora $\vec{F}$.

Po prečítaní vyššie spomenutých bodov môžeme napísať rovnicu pre momenty síl. Do protismeru hodinových ručičiek roztáča kladku gravitačná sila pôsobiaca na závažie momentom veľkosti Mgr . V rovnovážnej polohe roztáča pružina kladku v smere hodinových ručičiek rovnako veľkým momentom sily. Zadefinujme si, že ak vychýlime kladku v smere hodinových ručičiek, výchylku považujeme za kladnú. Ak teda Patrik vychýli kladku v kladnom smere o uhol φ , pružina sa skrúti o $r\varphi$, čím sa jej sila zmenší o $kr\varphi$, a teda jej moment sa zmenší o $kr^2\varphi$. Naopak, záporné vychýlenie φ zväčší moment sily od pružiny o $kr^2\varphi$. Uvedomíme si, že moment sily od závažia je konštantný, pretože nezávisí od vychýlenia kladky. Preto pri výchylke φ pôsobí na kladku moment sily $-kr^2\varphi$, kde sme mínusom zahrnuli do vzťahu predchádzajúcu úvahu o kladnom a zápornom φ . Posledným krokom pred napísaním rovnice je, že uhlové zrýchlenie je druhou časovou deriváciou uhlovej výchylky a budeme teda používať označenie $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ a celkový moment zotrvačnosti našej

¹³ Abeceda má málo písmen, a keďže M je už hmotnosť, moment sily sme označili τ .

sústavy je $J = J_0 + Mr^2$, kde J_0 je moment zotrvačnosti kladky. Vychádzame z už známej rovnice

$$J\varepsilon = \tau,$$

$$J\ddot{\varphi} = -kr^2\varphi,$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{kr^2}{J}\varphi.$$

Toto je rovnica harmonického oscilátora kmitajúceho s uhlovou frekvenciou

$$\omega = \sqrt{\frac{kr^2}{J}}.$$

Kladka je plný valec, ktorý má moment zotrvačnosti $J_0 = \frac{1}{2}mr^2$, čo po dosadení do vyjadrenia uhlovej frekvencie a úprave dáva

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\frac{m}{2} + M}}.$$

Periódou malých kmitov je potom

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{\frac{m}{2} + M}}}.$$

Porovnať tento výsledok s prípadom nehmotnej kladky je najlepšie na uhlovej frekvencii. V prípade $m = 0$ by bola

$$\omega = \frac{k}{M},$$

čo je uhlová frekvencia pružinky so závažím M , čo je vlastne to isté ako táto úloha s nehmotnou kladkou.

Poznámka o malých kmitoch

Pozorný čitateľ by mohol namietat, že v zadaní nebolo nutné uvažovať malé kmity. Naozaj, pri riešení sme nikde nepoužili Taylorov rozvoj pre malé výchylky φ . Avšak už samotná rovnica pružiny $F = -kx$ je Taylorovým rozvojom, pretože žiadna skutočná pružina nie je lineárna a uvedená rovnica teda platí len pre malé výchylky x .

1.8 Miško, pusť balónik a meraj! II.

vzorák Asi nebude, opravoval Jaro