

Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Teleportovaním prišla zima

vzorák Tete, opravovala Tete

Najprv si v krátkosti vysvetlíme, ako funguje šírenie tepla. Šírenie tepla prebieha medzi dvomi telesami s rozdielnou teplotou tak, že teplejšie teleso odovzdáva časť svojej tepelnej energie chladnejšiemu. Toto sa môže diať tromi rôznymi spôsobmi:

- vedením tepla (čiže kondukciou)
- prúdením teplom spolu s hmotou (čiže konvekciou)
- alebo žiarením (teda radiáciou).

Vedenie tepla prebieha vtedy, keď sú častice hmoty v priamom kontakte. Keďže tuhé látky sú podstatne hustejšie ako kvapaliny a plyny, je u nich tento typ prenosu tepla obvykle najvýraznejší. Prúdenie tepla prebieha v kvapalinách a plynch. Je to proces, pri ktorom teplejšie molekuly tekutiny stúpajú hore, keďže majú nižšiu hustotu v porovnaní s okolitými molekulami.

Pri prenose tepla radiáciou prenášajú teplo elektromagnetické vlny¹, ktoré vyžaruje každé teleso s teplotou väčšou ako 0 K. Čím väčšia je teplota telesa, tým väčšie množstvo energie vo forme elektromagnetických vln vyžaruje. Na rozdiel od predošlých dvoch spôsobov tento typ prenosu tepla nepotrebuje žiadne médium, ktoré by energiu prenášalo, čiže funguje aj v vákuu.

Čo sa teda stane, keď umiestnime ľadovú kocku do stredu miestnosti? V skutočnosti prebiehajú všetky tri spôsoby šírenia tepla. Vedenie tepla prebieha medzi kockou ľadu a maličkou časťou vzduchových molekúl, ktoré sú v priamom kontakte s kockou ľadu. Keďže tieto molekuly odovzdávajú svoje teplo kocke, stávajú sa chladnejšími oproti zvyšným vzduchovým molekulám. Chladnejšie molekuly klesajú dolu a teplejšie molekuly ich nahrádzajú, čiže začne prebiehať prúdenie tepla. Chladný vzduch postupne dôjde až k Tete, ktorá bude odovzdávať svoje teplo chladnejším časticiam, s ktorými je v kontakte, a teda bude pociťovať chlad.

V zadaní sa však pýtame, prečo pociťuje Tete chlad ešte skôr, ako sa vzduch v miestnosti ochladí. Kombinácia predošlých dvoch spôsobov to teda nemôže byť, keďže tam ide práve o ochladený vzduch. Ostáva nám teda posledná možnosť: tepelné žiarenie, ktoré je v porovnaní s vedením a prúdením tepla výrazne rýchlejšie, pretože elektromagnetické vlny sa šíria rýchlosťou svetla.

Izbová teplota je izbová práve preto, že sa v nej ľudia cítia príjemne – súčet všetkých spôsobov prenosu tepla je práve taký, aby vyrovnal tepelný výkon človeka v pokoji. Pred zjavením kocky mali všetky objekty v miestnosti a aj jej steny izbovú teplotu, a teda vyžarovali do svojho okolia určitý výkon a Tete sa cítila príjemne. S kockou ľadu v miestnosti to ale bude inakšie. Priteleportovávajúca kocka ľadu síce stále takisto žiari tepelným žiarením, ale keďže je jej teplota nižšia, vyžaruje ho menej. Preto zo smeru, kde je kocka ľadu, Tete cíti, že k nej prichádza tepelného žiarenia primálo a teda z toho smeru pociťuje chlad.

¹Pri teplotách, s ktorými sa bežne stretávame, pociťujeme ako teplo konkrétne tie vlny, ktorých vlnová dĺžka spadá do infračervenej časti spektra.

2.2 Tečenie Patrikovou zaváraninou

vzorák Kubovia

Na úlohu sa dá pozrieť mnohými spôsobmi – napríklad vieme sledovať časový vývoj výšky hladiny v závislosti na polomere diery v dne... Najjednoduchším prístupom je však pozrieť sa na stav, ktorý chceme dosiahnuť.

Pre výtok dierkou umiestnenou v hĺbke h pod hladinou existuje mnoho prístupov, ktorými dostaneme rovnaký výsledok, $v = \sqrt{2gh}$, známy ako Torricelliho² vzorec. Niektorí ho možno poznáte priamo pod týmto názvom, no veľmi jednoducho sa dá odvodiť z Bernoulliho rovnice. A ak pôjdeme ešte o úroveň vyššie, vieme sa pozrieť na kinetickú a potenciálnu energiu vody, ktorá priteká a oteká, z toho je zas odvodená Bernoulliho rovnica... Ničmenej, my si vystačíme s Torricelliho vzťahom.

Ak sa pozrieme na pohár s ustálenou výškou hladiny, musí platiť, že koľko vody priteká, toľko i oteká (aby sme nešetrili pojmy, ktoré znejú strašne učene, ide o rovnicu kontinuity...). Odtok dierkou o ploche $s = \pi r^2$ rýchlosťou v vieme vyjadriť ako objemový prietok dierkou $Q_d = sv = \pi r^2 v$. Rýchlosť v ale poznáme: $v = \sqrt{2gh}$ a teda $Q_d = \sqrt{2gh} \pi r^2$.

Ak sa hladina nemá meniť, potom ale musí platiť $Q_d = Q_v$. (Nezabudli ste? Q_v je zadaný objemový prítok pritekajúcej vody.) Napíšme si teda rovnicu:

$$\begin{aligned} Q_v &= \sqrt{2gh} \pi r^2, \\ r^2 &= \frac{Q_v}{\sqrt{2gh} \pi}, \\ r &= \sqrt{\frac{Q_v}{\sqrt{2gh} \pi}}. \end{aligned}$$

Podarilo sa nám teda určiť r ! Ale... bez závislosti na R , h a h_0 ? Veru áno, o záj to na počiatočnej hladine naskladanej uhorkovej vody ani na veľkosti pohára nebude závisieť. S akýmikoľvek parametrami totiž začneme, hladina h sa bude meniť až dovtedy, kým nebude platiť $Q_d = Q_v$.

2.3 Trápna pružná zrážka?

vzorák Majo, opravoval Majo

Na prvý pohľad vyzerá naša zrážka veľmi čudne. Veď keď bod narazí pružne do steny, energia by sa mu mala zachovať a mal by vystúpiť do rovnakej výšky. Spisujem do riešenia a odosielam, no nie? V skutočnosti to nie je také ľahké, ako sa javí na prvý pohľad.

Podme si postupne prejsť, čo sa udeje. Pustíme hmotný bod. Tesne pred nárazom má hmotný bod nejakú rýchlosť, ktorú vieme zrátať zo zákona zachovania energie. Hmotný bod klesne o výšku $L \cos \alpha$, takže zákon zachovania energie má tvar

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL \cos \alpha.$$

²taliansky fyzik Giovanni Evangelista Torricelli (1608 – 1647), (vaším riešeniam) tiež známy ako Toricelli, Torriceli, Terricelli, Torriccelli, Torrichelli, či dokonca Torricello

Preto má hmotný bod tesne pred dopadom rýchlosť s veľkosťou

$$v = \sqrt{2gL \cos \alpha}. \quad (2.3.1)$$

Zíde sa nám mať túto rýchlosť rozpísanú do horizontálnej a vertikálnej zložky, tak to spravme:

$$v_x = v \cos \alpha$$

$$v_y = v \sin \alpha.$$

Zavedme súradnice tak, že ich stred bude v mieste, kde je upevnená nitka, s kladným smerom doprava, resp. hore. Potom má vektor $\vec{v}$ vyjadrenie:

$$\vec{v} = (v \cos \alpha, -v \sin \alpha) = v (\cos \alpha, -\sin \alpha).$$

Teraz prichádza na rad tá najzaujímavejšia časť – zrážka. Počas zrážky akoby pôsobí na veľmi krátky čas nejaká sila. Keďže hmotný bod narazil z boku, táto sila bude iba vo vodorovnom smere. S vertikálnou zložkou rýchlosti sa tak nemá čo stať. Niečo sa stane iba s horizontálnou zložkou rýchlosti. Lenže sa to stane pružne, t. j. energia hmotného bodu sa nestratí. Preto sa horizontálna zložka rýchlosti musí zmeniť na rovnako veľkú, ale opačne orientovanú. Takže vektor $\vec{v}$ sa zmení na $\vec{u}$ v tvare

$$\vec{u} = v (-\cos \alpha, -\sin \alpha).$$

Doteraz však mal hmotný bod vektor rýchlosti smer kolmý na nitku. V smere nitky bola jeho rýchlosť nulová. Vektor $\vec{u}$ už ale nebude mať takýto smer. Tesne po zrážke by preto hmotný bod chcel mať aj nejakú rýchlosť v smere nitky. Tým pádom by sa ale mala nitka o čosi natiahnuť. Nitka je však nenatiahnuteľná, a tak sa táto rýchlosť akoby pohltí³. Zvyšná časť rýchlosti bude zodpovedná za to, že hmotný bod sa odrazí do nejakej výšky.

Potrebujeme teda zrátať zložku vektora $\vec{u}$ v smere kolmom na smer nitky. Smer nitky je v smere vektora

$$\vec{l} = (-L \sin \alpha, -L \cos \alpha) = L (-\sin \alpha, -\cos \alpha).$$

Vektor kolmý na smer nitky (ten v smere, v akom chceme mať rýchlosť) tak bude⁴

$$\vec{k} = L (-\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Na výpočet zložky jedného vektora v smere iného vektora je najšikovnejší nástroj skalárny súčin. Konkrétne ak potrebujeme zložku vektora $\vec{a}$ v smere vektora $\vec{b}$, jej veľkosť bude

$$|\vec{a}_b| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

³Tu vyzerá, že sa akoby stratila energia. V reálnej situácii by sa nitka (modelovaná pružinou s vysokou tuhosťou) o malý kúsok natiahla a táto energia by sa uložila ako potenciálna alebo by sa uvoľnila vo forme tepla.

⁴Použijeme mnemotechnickú pomôcku, že zložky vektora treba vymeniť a vhodnej zložke zmeniť znamienko.

a samotný vektor bude⁵

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Použitím tohto vieme, že veľkosť zložky vektora $\vec{u}$ v smere vektora $\vec{l}$ je

$$\begin{aligned} |\vec{u}_k| &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{k}}{|\vec{k}|} \\ &= \frac{vL(-\cos \alpha, -\sin \alpha) \cdot (-\cos \alpha, \sin \alpha)}{L} \\ &= v(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= v \cos(2\alpha). \end{aligned}$$

Všimnime si zopár vecí na našom výsledku. Ak by bola $\alpha = 45^\circ$, potom by $|\vec{u}_k| = 0$, t. j. bod by sa neodrazil. Všetka rýchlosť tesne po odraze by totiž bola v smere nitky. Pre uhly $\alpha > 45^\circ$ by dokonca vyšlo $|\vec{u}_k|$ záporné. Hmotný bod by tak chcel znova naraziť do steny⁶. V zadaní ale máme predpoklad $\alpha \leq 42^\circ$, takže tieto divné prípady nás netrápia a všetko sa správa príjemne.

S použitím zákona zachovania energie ako na začiatku vieme zistiť, do akej výšky od miesta zrážky sa hmotný bod odrazí. Pritom už dosadíme 2.3.1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 \cos^2(2\alpha) &= mgH \\ H &= \frac{v^2 \cos^2(2\alpha)}{2g} \\ H &= L \cos \alpha \cos^2(2\alpha). \end{aligned}$$

Posledným krokom je vyjadriť výšku, ako sa od nás žiada. Keďže výška $h = 0$ je tam, odkiaľ sme hmotný bod pustili, odrazí sa do výšky⁷

$$\begin{aligned} h &= 0 - L \cos \alpha + H \\ &= L(\cos \alpha \cos^2(2\alpha) - \cos \alpha) \\ &= -L \cos \alpha \sin^2(2\alpha). \end{aligned}$$

⁵Len násobíme jednotkovým vektorom v smere vektora $\vec{b}$.

⁶Riadny bitkár ten hmotný bod.

⁷Podľa očakávania zápornej.

2.4 Tuhosť pasty zlámanej

vzorák Rado, opravoval Rado

Fyzikálny úvod

Fyzikálny popis lámania je komplikovaný. Tuhé teleso sa skladá z atómov usporiadaných do nejakej mriežkovej štruktúry. Táto štruktúra však nie je dokonalá a vyskytujú sa v nej rôzne poruchy. Vakancia je pomenovanie pre jeden chýbajúci atóm v mriežke. V materiáloch sa často tvoria takzvané dislokácie, čo je viacero nazhromaždených vakancií v jednej rovine. Ak sa tieto dislokácie vedú v telese jednoducho pohybovať, materiál je pružný.

Preto ak chceme spevniť materiál, pridávame do neho malé množstvá iných látok, ktoré tvoria v pôvodnej mriežke zrná a tie sťažujú dislokáciám pohyb. Mimochodom, dôvod, prečo sa pri zahriatí materiály stávajú mäkšími je, že atómom sa dodá energia, čo im umožní ľahšiu difúziu (respektíve pohyb v mriežke) a tým pádom sa rozbíjajú zrná pridanej látky. Tento proces nazývame rozpúšťanie a umožňuje ľahší pohyb dislokácií. K lomu dochádza ak sa dislokácie nahromadia pri povrchu a tým oslabia sily, ktoré držia atómy pokope. Pri hraničnej sile dochádza k lavínovitému prerazeniu materiálu a práve túto silu sa pokúsime zmerať pre špagety.

Experiment

Na meranie sme používali obyčajné bezvaječné špagety z pšeničnej múky značky Tiradell. Ich dĺžka bola $(25,5 \pm 0,4)$ cm, čo sme určili ako priemer piatich meraní.



Obrázok 2.4.1: Aparatúra

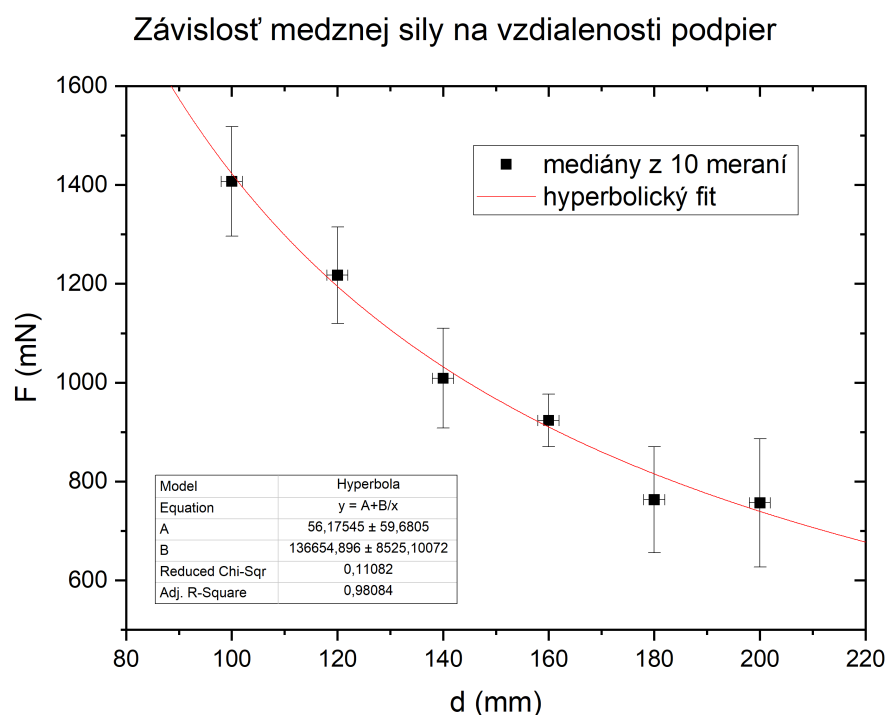
Základom aparatúry boli dve podpery a záťaž, ktoré držali špagetu vo vodorovnej polohe. Na špagete bola v strede zavesená nádobka do ktorej sme pomaly prilievali vodu. Akonáhle došlo k prelomeniu špagety,

nádobka spadla na mäkkú podložku, čím sme zamedzili vyliatu vody. Následne sme nádobku odvážili na váhe s presnosťou 0,1 g. Pomocou vzťahu $F = mg$ sme určili medznú silu pre $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Namerané dáta:

$d = 200 \text{ mm}$	$d = 180 \text{ mm}$	$d = 160 \text{ mm}$	$d = 140 \text{ mm}$	$d = 120 \text{ mm}$	$d = 100 \text{ mm}$
m/g	m/g	m/g	m/g	m/g	m/g
77,0	76,1	103,3	118,4	140,0	118,4
83,5	83,7	92,8	114,5	118,7	139,1
80,3	67,9	85,6	108,8	104,8	131,3
77,3	74,9	98,9	85,1	125,0	147,7
66,0	74,8	100,8	104,0	127,7	153,8
37,5	106,8	94,8	96,9	110,8	138,6
72,4	68,6	93,5	96,6	129,8	140,1
74,8	79,5	88,9	93,8	123,2	146,8
77,9	79,9	91,3	101,7	127,2	151,7
79,2	81,5	96,7	110,9	119,5	154,8
medián	medián	medián 94 ± 5	medián	medián	medián
77 ± 13	78 ± 11		103 ± 10	124 ± 10	143 ± 11

Pre každú vzdialenosť sme meranie opakovali 10-krát a do výsledného grafu znázornili ich medián. Miera rozhádzanosti je určená štandardnou odchýlkou, ktorá je v grafe znázornená error barmi. Namerané dáta vykazovali hyperbolickú závislosť, preto sme ich preložili funkciou $F = A + B/d$ pomocou metódy najmenších štvorcov zahrňujúcej jednotlivé odchýlky. Získané parametre sú zaznačené v grafe.



Obrázok 2.4.2: Závislosť medznej sily na vzdialenosti podpier

Diskusia

Namerané dáta poukazujú na nepriamu úmeru medzi medznou silou a vzdialenosťou dosiek. To je spôsobené tým, že pri kratšej vzdialenosti sa špageta ohne menej a teda pohyb dislokácií je menší. Menšie ohnutie kratšej špagety je podobné pákovému efektu, teda rovnaká sila vyvoláva menší moment sily na krajné body otáčania.

Všimnime si, že chyba parametra A je väčšia ako samotná hodnota A . To znamená, že z nášho merania nie je jasné aká by mala byť hodnota tohto parametra. Vskutočnosti by sme však očakávali aby bola A záporné, keďže špagety majú nejakú vlastnú hmotnosť a veľmi dlhé špagety by sa mali zlomiť pri nulovej sile, čisto vplyvom vlastnej tiaže.

Priebeh experimentu bol zaťažený rôznymi chybami. Po prvé treba zmieniť ľudský faktor, ktorý hral úlohu pri nalievaní vody do nádoby. Miestami zvýšený tlak padajúcej vody na nádobku mohol spôsobiť prelomenie špagety skôr. Na druhú stranu liatie vody do nádoby aj krátky čas po prelomení zvýšilo nameranú medznú silu. Po druhé, každá špageta je rozdielna. Stačilo aby sa vyskytvalo slabé miesto v kritickom bode a ku prelomeniu mohlo dojsť oveľa skôr. Z toho dôvodu sme pre každú vzdialenosť podpíer opakovali meranie 10-krát a do grafu znázornili ich medián. Priemer sme nerobili preto, lebo ten je náchylný na veľké ústrely, ktoré boli pri tomto experimente prítomné.

Záver

Medzná sila prelomenia špagiet sa so zvyšujúcou vzdialenosťou podpíer zmenšovala. Na nami meranom úseku sa systém správal hyperbolicky podľa predpisu

$$F = (56 \pm 96) \text{ mN} + \frac{(136,7 \pm 8,5) \cdot 10^3 \text{ N/m}}{d}.$$

2.5 Trenie, pohľad zhora

vzorák **Hovorca**, opravoval **Hovorca**

Tak poďme začať!

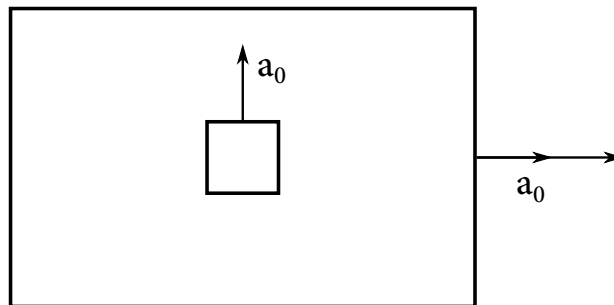
Aby sme dokázali určiť zrýchlenie akéhokoľvek telesa, potrebujeme poznať jeho hmotnosť a všetky sily, ktoré naň pôsobia. Hmotnosť kocky máme zadanú – m . Zostáva teda už len zistiť, aké na ňu pôsobia sily. V smere nahor a nadol (z a do obrázka) pôsobia sily, ktoré sa vzájomne vyrovnávajú, keďže sa kocka v tomto smere nehýbe. Sú to tiažová sila a normálová sila od kvádríka. Nebudú nás priveľmi zaujímať, poznamenajme, že obe majú veľkosť mg , kde g je tiažové zrýchlenie.

Potom sú tu ešte sily, ktoré ležia v rovine obrázka. S tými to bude trochu ťažšie.

Prvá veľmi očividná je sila $\vec{F}$, ktorou ťaháme za kvádrík. Tá síce **nepôsobí** na kocku, ale je zaujímavá svojím smerom a veľkosťou, s ktorými budeme ďalej pracovať. Táto sila udeľuje kvádríku nejaké zrýchlenie, avšak ako uvidíme, nie je jediná. Označme preto zrýchlenie kvádríka po koľajničkách ako a_0 .

Ďalšia očividná sila (tentoraz už pôsobí na kocku) je sila od lanka na kladkách. Keďže lanko je dokonale pevné, nikde sa nenaťahuje ani neskracuje. O koľko sa posunie kvádrík, o toľko potiahne lanko kocku (hoc iným smerom). Rovnako to teda musí byť aj s rýchlosťami – ako rýchlo sa ťahá kvádrík, tak rýchlo sa ťahá

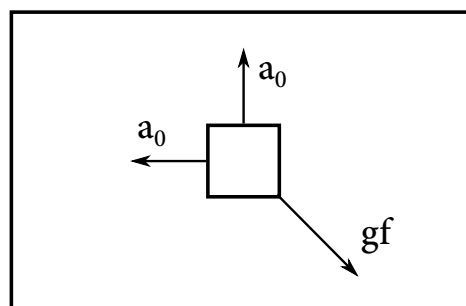
kocka. A aj so zrýchleniami. Teda sila od lanka na kladkách pôsobiaca na kocku bude mať veľkosť tiež a_0 , a smer bude mať nahor.

Obrázok 2.5.1: Zrýchlenia a_0

Tretia sila, hoc trochu skrytejšia, je trecia. Práve ona zabezpečuje, že sa kocka pohybuje s kvádkom. V ďalšom budeme uvažovať len, že trenie je maximálne možné, teda že bude mať veľkosť normálovej sily krát súčiniteľ šmykového trenia f , teda $|F_t| = mgf$. Udeľule teda zrýchlenie gf . Ale aký bude mať smer? Odpoveď poznáme – smer bude proti smeru vzájomnej rýchlosti trejúcich sa plôch. Lenže na to potrebujeme poznať, akým smerom zrýchľuje (a teda pohybuje sa, v prvom momente) kocka vzhľadom na kvádrík.

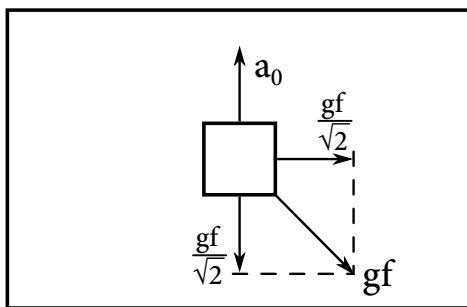
To nás núti prejsť do nami toľko milovanej neinerciálnej vzťažnej sústavy spojenjej s kvádkom. V tejto existuje práve jedna neinerciálna sila, a to $-\vec{F}$. Tá má príslušné zrýchlenie veľkosti a_0 v smere $-\vec{F}$. Navyše má teleso zrýchlenie a_0 v smere kolmo nahor. Vektorovým súčtom týchto zrýchlení bude zrýchlenie v smere šikmo nahor-dolava, keďže zrýchlenia majú rovnakú veľkosť, z Pytagorovej vety má ich súčet veľkosť $a_0\sqrt{2}$. Práve toto je v prvom momente smer a veľkosť zrýchlenia kocky vzhľadom na kvádrík, a tak i smer rýchlosti vzhľadom na kvádrík. Tým pádom je to kýžený smer rýchlosti trejúcich sa plôch. Zrýchlenie dané trecou silou tak má spomínanú veľkosť a gf a smer opačný, ako vektorový súčet zvyšných dvoch síl, tak ako na obrázku (áno, ide o štyridsaťpäťstupňový uhol).

Presne opačná sila však musí pôsobiť aj na kvádrík! Z nej ale môže pôsobiť len zložka v smere koľajničiek. Tá má (vďaka štyridsaťpäťstupňovému uhlu) veľkosť $\frac{gf}{\sqrt{2}}$. Teraz už vieme určiť zrýchlenie kvádríka, $a_0 = \frac{F}{M+m} - \frac{gf}{\sqrt{2}}$.



Obrázok 2.5.2: Smer trenia

Nuž, a teraz zostáva len vektorovo sčítať zrýchlenia sily od lanka na kladkách a trecej sily. Treciu silu môžeme rozložiť na zložku v smere sily $\vec{F}$ a v protismere sily od kladiek, obe zložky budú mať rovnakú veľkosť $\frac{gf}{\sqrt{2}}$.



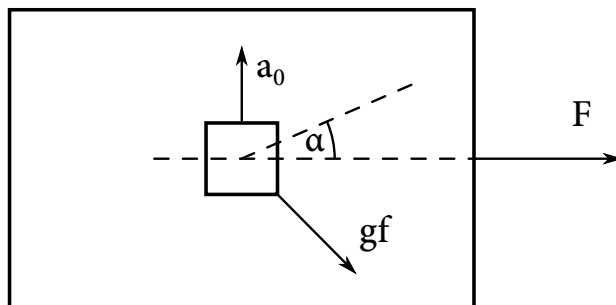
Obrázok 2.5.3: Zložky výsledného zrýchlenia

Veľkosť výsledného zrýchlenia teda i z poslednej Pytagorovej vety bude

$$a = \sqrt{\left(a_0 - \frac{gf}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{gf}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{F}{M+m} - \frac{2gf}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{gf}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Smer zrýchlenia je trochu ťažší, ale s trochou geometrie si ľahko uvedomíme, že uhol, ktorý výsledné zrýchlenie zvierá so smerom sily $\vec{F}$ je

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{\frac{F}{M+m} - \frac{2gf}{\sqrt{2}}}{\frac{gf}{\sqrt{2}}}\right).$$



Obrázok 2.5.4: Smer výsledného zrýchlenia

2.6 ...tak proste zhorelo

vzorák Tomáš, opravoval Tomáš

Hovorca zjavne používa hasiaci prístroj ako raketu. Nevyužíva pritom síce energiu uvoľnenú pri chemickej reakcii ako v obyčajnej rakete, ale iba vnútornú energiu oxidu uhličitého, ktorý je v hasiacom prístroji uskladnený pod vysokým tlakom. Konkrétne hodnoty zadané nemáme, takže si ich nejak realisticky odhadneme: nech Hovorcov hasiaci prístroj obsahuje 2 kg CO₂ pod tlakom 5 MPa a nech prázdna tlaková fľaša má hmotnosť 5 kg.

Keď Hovorca otvorí ventil hasiaceho prístroja, molekuly plynu z neho začnú unikať určitou rýchlosťou. Rozdelenie rýchlostí medzi časticami popisuje Maxwell-Boltzmannova distribúcia. Tou sa tu však zaoberať nebudeme, koniec-koncov ide o odhad a skutočná výtoková rýchlosť bude závisieť aj od tvaru trysky, o ktorom nevieme nič.

Ak sa pozrieme na molekuly plynu v hasiacom prístroji, vidíme, že sa navzájom chaoticky zrážajú a odrážajú od stien hasiaceho prístroja. To sa makroskopicky prejavuje ako tlak. Čo znamená, že tento plyn má izbovú teplotu $T = 300 \text{ K}$? Znamená to, že ak by sme v nejakom čase poznali rýchlosť každej jednej molekuly plynu v , ktorý je v termodynamicknej rovnováhe, ľahko by sme si spočítali aj kinetickú energiu každej molekuly ε a aritmetický priemer týchto energií. Teda stredná energia molekuly plynu $\langle \varepsilon \rangle$ zodpovedá nejakej teplote plynu T . Tento vzťah bežne poznáme v podobe

$$\langle \varepsilon \rangle \sim \langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m_0},$$

kde m_0 je hmotnosť jednej molekuly. Môžeme si teda plyn zjednodušene predstavovať tak, že každá molekula v ňom sa pohybuje náhodným smerom strednou kvadratickou rýchlosťou $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = v_{\text{rms}}$, čo je oveľa príjemnejšie ako chaos, ktorý tam v skutočnosti vládne.

Nech teraz jedna molekula vyletí cez trysku von. Čo na to povedia ostatné molekuly? Nič, ak považujeme plyn za ideálny. V ňom totiž molekuly interagujú jedine pružnými zrážkami. To, že z nádoby niektoré molekuly unikli, nemá na rýchlosť molekúl zostávajúcich v nádobe žiadny vplyv.⁸ A keďže aj po úniku častíc sa zostávajúce častice pohybujú stále rovnakými rýchlosťami plyn v nádobe má stále rovnakú teplotu a každá ďalšia uniknutosia molekula tiež uniká rýchlosťou v_{rms} voči hasiacemu prístroju.

Celková rýchlosť V , ktorú Hovorca získa, sa dá vypočítať pomocou Ciolkovského rovnice

$$V = v_{\text{eff}} \ln \frac{m_z}{m_k},$$

kde m_z je začiatková hmotnosť Hovorcu s plným hasiacim prístrojom, m_k je jeho konečná hmotnosť s prázdny hasiacim prístrojom a v_{eff} je efektívna rýchlosť, s ktorou molekuly vylievajú von. Jej presný vzťah s v_{rms} závisí od tvaru trysky a odlišnosti pracovného plynu od ideálnosti, bude však určite vyjadriteľný ako $v_{\text{eff}} = \alpha \cdot v_{\text{rms}}$ pre nejakú konštantu α rádovo rovnú jednej. A keď už odhadujeme, prečo nie aj naozaj rovnú jednej.⁹

Aby sme zistili v_{rms} , musíme poznať hmotnosť molekuly CO_2 . Tá dokopy obsahuje 44 nukleónov, teda jej hmotnosť je približne $m_0 = 44u$. Nech Hovorca v skafandri s prázdny hasiacim prístrojom spolu vážia $m_k = 100 \text{ kg}$ a na hasiacom prístroji si prečítal, že pôvodne obsahoval 2 kg CO_2 . Všetko teda dosadíme do vyjadrenia pre Hovorcovu rýchlosť

$$V \approx \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K}}{44 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} \ln \frac{100 \text{ kg} + 2 \text{ kg}}{100 \text{ kg}} \doteq 8,14 \text{ m/s}.$$

Hotovo? Ani nie. Hovorcovi predsa ešte ostal v rukách prázdny hasiaci prístroj, ktorý môže použiť ako reaktívnu hmotu a odhodiť ho rovno za seba. Povedzme, že prázdny hasiaci prístroj odhodí rýchlosťou 10 m/s , čím získa ďalšiu rýchlosť w . Pozrieme sa teda na zákon zachovania hybnosti v ťažiskovej sústave, kde

⁸Za predpokladu, že steny hasiaceho prístroja plyn dokonale tepelne izolujú od okolia.

⁹Pre jednoduchú dieru v stene by to bola stredná veľkosť absolútnej hodnoty rýchlosti v smere kolmom na dieru $\langle |v_x| \rangle$ (zvyšné dve zložky sa pre všetky molekuly vzájomne vyrušia) a dostaneme $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \approx 0,46$, pre optimálnu [de Lavalovu trysku](#) vo vákuu dostaneme $\alpha = \sqrt{\frac{2\gamma}{3(\gamma-1)}} \approx 1,7$. Reálny hasiaci prístroj bude niekde medzi tým.

sa pred odhodením prístroja Hovorca nepohybuje. Dostaneme

$$5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s} = (100 \text{ kg} - 5 \text{ kg}) w \quad \Rightarrow \quad w = \frac{5 \text{ kg}}{95 \text{ kg}} \cdot 10 \text{ m/s} \approx 0,53 \text{ m/s}.$$

Hovorca teda získal ďalšiu rýchlosť $w = 0,53 \text{ m/s}$ v ťažiskovej sústave, ktorej rýchlosť voči sústave vesmírnej stanice poznáme, pretože práve na tú rýchlosť sa Hovorca urýchlil otvorením ventilu hasiaceho prístroja. Hovorca sa teda pohybuje rýchlosťou $8,14 \text{ m/s} + 0,53 \text{ m/s} = 8,67 \text{ m/s}$ od vesmírnej stanice.

Poznámka o ideálnom plyne

Ešte by stálo za zváženie pozrieť sa, ako veľmi sa uvažovaný CO_2 podobá na ideálny plyn. Jednou z vlastností ideálneho plynu je, že vzdialenosti medzi molekulami sú oveľa väčšie ako veľkosť molekúl, teda že potenciálna energia molekuly voči všetkým ostatným molekulám je zanedbateľná. Veľkosť molekuly si vieme nájsť, podľa [Wikipédie](#) je dĺžka väzby medzi kyslíkom a uhlíkom dlhá 116 pm, molekula CO_2 má takéto väzby dve, teda veľkosť molekuly CO_2 je 232 pm.

Ak je N molekúl v nádobe s objemom V , tak na jednu molekulu pripadá objem $V_0 = \frac{V}{N}$. Ak poznáme celkovú hmotnosť plynu m a jeho molárnu hmotnosť M_m , tak počet molekúl je $N = \frac{m}{M_m} N_A$, teda $V_0 = \frac{V M_m}{m N_A}$. Objem plynu odhadovať nemusíme, pretože poznáme jeho teplotu, tlak aj hmotnosť, a teda objem vypočítame zo stavovej rovnice

$$pV = \frac{m}{M_m} RT \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{M_m} \frac{RT}{p}$$

Po dosadení dostávame do vyjadrenia V_0 a vykrátení m a M_m dostávame

$$V_0 = \frac{RT}{p N_A}$$

Zaujímá nás tretia odmocnina z V_0 , aby sme z objemu na jednu molekulu dostali dĺžku, ktorú porovnáme s veľkosťou molekuly. Ešte si spomenieme, že $R = N_A k$, a počítame

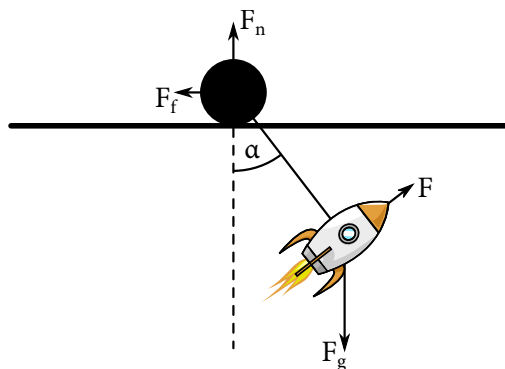
$$\sqrt[3]{V_0} = \sqrt[3]{\frac{kT}{p}} = \sqrt[3]{\frac{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K}}{5 \text{ MPa}}} \doteq 939 \text{ pm}.$$

Toto veruže nie je oveľa viac ako veľkosť molekuly. Náš výpočet založený na predpoklade, že plyn v hasiacom prístroji je ideálny, je teda viac odhad ako presný.

2.7 Takýto pohyb zrátajte!

vzorák Dvojka, opravoval Dvojka

To prvé, čo ako šikovní fyzici musíme urobiť, je nakresliť si všetky sily, čo v našom systéme pôsobia. Očividne tu bude ťah raketky F , ako aj gravitačná sila F_g na ňu pôsobiaca, na jednej strane tyče. Na druhej strane tyče potom bude sila normálová F_n , ktorá zabezpečuje, že tyč sa z koľaje neutrhne, a sila trecia F_t . Spolu to vyzerá takto:



Obrázok 2.7.1: Raketka

Najprv sa pozrieme na veľkosti týchto síl. Očividne $F_g = mg$ a F je zadané. F vieme rozdeliť na dve zložky: vertikálnu, ktorá raketku odľahčuje, a horizontálnu, ktorá ju urýchľuje pozdĺž koľajnice. F_n potom bude rovná rozdielu F_g a vertikálnej zložky F , teda $F_n = mg - F \sin \phi$, kde ϕ je odklon tyče od smeru tiažového zrýchlenia. A napokon, trecia sila je očividne $F_t = f F_n$.

Teraz sa môžeme spýtať, ktoré z týchto síl ovplyvňujú uhlové vychýlenie tyče. Tu môžeme urobiť arbitrárne rozhodnutie, kam umiestnime os otáčania a potom sa jednoducho pozrieme na zodpovedajúce momenty síl. Môže sa zdať rozumné umiestniť os otáčania do miesta dotyku tyče a koľaje, no v skutočnosti bude celý systém omnoho krajší, keď os otáčania umiestnime do ťažiska systému tyč-raketka – čo je, keďže tyč je nehmotná, priamo v raketke. Potom vidíme, že jediné sily, ktoré na systém tyč-raketka pôsobia nenulovým momentom sily sú F_n a F_t (tu by sme ešte po správnosti mali zarátat fiktívnu silu, ktorá je výsledkom toho, že naša zvolená os otáčania je neinerciálna a zrýchľuje zrýchlením a , ale keďže tento koniec tyče má nulovú hmotnosť, aj táto fiktívna sila má nulovú magnitúdu - o tom viac v poznámkach na konci). Spomenieme si na vzorec pre veľkosť momentu sily

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| |\vec{r}| \sin \alpha_{F-r}.$$

Z nákresu ľahko nahliadneme, že celkový moment sily pôsobiaci na raketku je

$$M = F_n L (f \cos \phi - \sin \phi).$$

Prv, než sa pustíme do skúmania kmitavého pohybu raketky, nájdeme uhol α , na ktorom sa systém ustáli pred tým, ako doňho drgneme. V ustálenom stave je uhlové zrýchlenie nulové, a teda pre uhol α platí rovnica

$$f \cos \alpha - \sin \alpha = 0,$$

čo upravíme na

$$\alpha = \arctan f.$$

Na to, aby sme našli pohyb systému, musíme teraz zmeniť bod otáčania na taký, v ktorom máme nenulový moment zotrvačnosti. Až teraz ho teda umiestnime do bodu dotyku tyče a koľajnice. Nesmieme zabudnúť, že tento bod zrýchľuje zrýchlením $\frac{1}{m} (F \cos \phi - f F_n)$. Keď teda prejdeme do neinerciálnej vzťažnej sústavy vzťahujúcej sa na tento bod, na raketku bude pôsobiť d'Alembertova sila veľkosti $F \cos \phi - f F_n$ opačným smerom ako je smer pohybu, ktorej moment je teda $M_A = -L (F (\cos^2 \phi + f \sin \phi \cos \phi) - f mg \cos \alpha)$. Okrem nej

pre túto os otáčania na raketku pôsobia ešte momenty gravitačnej a ťahovej sily: $M_g = -Lmg \sin \phi$, $M_F = LF$. Ostatné momenty síl (normálovej a trecej) majú nulové rameno sily.

Vzhľadom na to, že systém tyč-raketka je v podstate len hmotný bod, ktorý je od našej zvolenej osi otáčania vzdialený L , jeho moment zotrvačnosti je triviálne $I = mL^2$. Napíšeme si moment sily ako súčin momentu zotrvačnosti a uhlového zrýchlenia, dosadíme naše tri nenulové momenty síl a získavame tak našu hlavnú pohybovú rovnicu

$$mL^2 \frac{d^2 \phi}{dt^2} = L (mg - F \sin \phi) (f \cos \phi - \sin \phi).$$

Toto sa môže na prvý pohľad zdať beznádejné, no ctený čitateľ nech nezúfa – veľa týchto vecí sa vieme zbaviť vďaka *aproximáciám*. V prvom rade skúsme trochu vyčistiť pravú stranu rovnice:

$$\frac{m}{mg - F \sin \phi} L \frac{d^2 \phi}{dt^2} = f \cos \phi - \sin \phi$$

Keďže sa budeme pýtať na malé kmity okolo tohto uhla, bolo by fajn spraviť si novú premennú β , ktorá popisuje uhlovú výchylku tyče od tohto rovnovážneho stavu. Inými slovami

$$\beta = \phi - \arctan f \quad \Rightarrow \quad \phi = \beta + \arctan f \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \phi}{dt^2} = \frac{d^2 \beta}{dt^2},$$

kde $\beta \ll 1$.

Teraz zoberieme túto substitúciu a postupne ju vrazíme do našej pohybovej rovnice. Začneme zlomkom na ľavej strane:

$$\begin{aligned} \frac{m}{mg - F \sin \phi} &= \frac{m}{mg - F \sin (\beta + \arctan f)} \\ &= \frac{m}{mg - F (\sin \beta \cos \arctan f + \cos \beta \sin \arctan f)} \\ &= \frac{1}{g} \frac{1}{1 - \frac{F}{mg} \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} (\sin \beta + f \cos \beta)} \end{aligned}$$

Zo zadania vieme, že $F \ll mg$, teda $\frac{F}{mg} \ll 1$. Pravú stranu teda vieme aproximovať ako $\frac{1}{g}$, pokiaľ ukážeme, že $\frac{1}{\sqrt{1+f^2}} (\sin \beta + f \cos \beta) \leq 1$. Inými slovami, chceme ukázať, že

$$\sin \beta + f \cos \beta \leq \sqrt{1+f^2}.$$

Keďže obe strany rovnice sú kladné (je bezpečné predpokladať, že $\beta \ll f$), táto nerovnica bude platiť, keď bude platiť jej štvorec:

$$\begin{aligned} (\sin \beta + f \cos \beta)^2 &\leq 1 + f^2, \\ \sin^2 \beta + f^2 \cos^2 \beta + 2f \sin \beta \cos \beta &\leq 1 + f^2, \\ \beta &\leq \frac{1}{2f}, \end{aligned}$$

čo platí, keďže očakávame, že f nebude rádovo viac ako 1, pričom v poslednej úprave sme využili, že pre malé β platí $\sin \beta \approx \beta$ a $\cos \beta \approx 1$. Našu pohybovú rovnicu teda vieme zapísať ako

$$\frac{L}{g} \frac{d^2 \phi}{dt^2} = f \cos \phi - \sin \phi.$$

Teraz dosadíme našu substitúciu aj do zvyšku rovnice a po troche upravovania opäť použijeme aproximácie pre malé uhly:

$$\begin{aligned} \frac{L}{g} \frac{d^2 \beta}{dt^2} &= f \cos (\beta + \arctan f) - \sin (\beta + \arctan f) \\ &= f (\cos \beta \cos \arctan f - \sin \beta \sin \arctan f) - \sin \beta \cos \arctan f - \cos \beta \sin \arctan f \\ &= f \cos \beta \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} - f \sin \beta \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} - \sin \beta \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} - \cos \beta \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \\ &= -\sin \beta \frac{1+f^2}{\sqrt{1+f^2}} \\ \frac{L}{g} \frac{d^2 \beta}{dt^2} &= -\sqrt{1+f^2} \beta \end{aligned}$$

V tomto už spoznávame rovnicu harmonického oscilátora hmotnosti $\frac{L}{g}$ a tuhosti $\sqrt{1+f^2}$. Uhlová rýchlosť je potom jednoducho

$$\omega = \sqrt{\frac{g\sqrt{1+f^2}}{L}}.$$

Poznámka č. 1

V tejto úlohe sa veľmi silno používajú niektoré nie úplne známe trigonometrické identity, konkrétne

$$\sin \arctan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{a} \quad \cos \arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Takéto veci si nikto nepamätá všetky a preto je fajn, že sa dajú nájsť na internete, napríklad na Wikipédii v článku https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities.

Poznámka č. 2

Ak by sme os otáčania predsa len umiestnili do bodu dotyku tyče s koľajnicou, museli by sme spraviť ešte jeden krok – konkrétne zaradiť fiktívnu silu (a teda aj fiktívny moment sily) pôsobiacu na raketku. Tá vznikla, keď sme prešli do neinerciálnej vzťažnej sústavy zrýchľujúcej spolu s raketkou so zrýchlením daným rozdielom horizontálnej zložky ťahu rakety a tretej sily pôsobiacej na systém tyč-raketka. To by vyprodukovalo niekoľko škaredých rovníc, ktorým sme sa tu úspešne vyhli – konečný výsledok by bol ale pochopiteľne rovnaký.

Pozorný čitateľ sa možno pozastavil nad tým, že tým, že sme umiestnili os otáčania do jediného hmotného bodu v našom systéme, sme eliminovali všetky fiktívne sily v rátaní stabilnej výchylky α . Hoci os otáčania je stále neinerciálna, fiktívna sila pôsobiaca na každý komponent vo vzťažnej sústave osi otáčania je úmerná hmotnosti tohoto komponentu, a všetky tieto komponenty (v našom prípade len ten koniec tyče, ktorý sa dotýka koľajnice) majú nulovú hmotnosť.

Toto ale vyúsťuje v to, že α je funkciou jedine parametra f a nezávisí od hodnôt F a m . Toto sa môže zdať ako chyba – napokon, ak by sme dali m veľmi veľké (a teda aj tiaž by bola veľká), ale F veľmi malé, raketka by sotva dosiahla uhol $\arctan f$ pre arbitrárne f ! Tu to ale vyjde tak, že kým raketka nedosiahne tento uhol, systém sa po koľaji nerozbehne, keďže horizontálna zložka ťahu nedosiahne hodnotu $f F_n$ (a teda aj skutočná hodnota F_f bude menšia než $f F_n$). Inými slovami, do istej hodnoty F sa raketka len čoraz viac nakláňa, až kým F_f nedosiahne $f F_n$, a vtedy sa celý systém rozbehne – a toto je vždy pri uhle naklonenia $\arctan f$. No a keďže v zadání je napísané, že raketka sa hýbe, môžeme predpokladať, že f je dostatočne malé na to, aby bol tento uhol dosiahnutý, aj keď $F \ll mg$.