

Riešenia 1. kola letnej časti

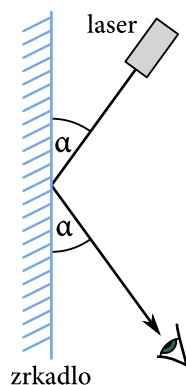
1.1 Temný vynález

vzorák Lucka, opravovala Lucka

Svetlo sa v každom okamihu správa ako častica (fotón) a zároveň ako vlna. Avšak na vyriešenie tejto úlohy nemusíme pracovať s fotónmi a vlnami. Stačí nám, ak poznáme zákon odrazu a geometrickú optiku.

Ešte predtým ako si rozoberieme jednotlivé prípady, pozrime sa na to, čo to znamená vidieť. Mozog získava informácie z okolia prostredníctvom zmyslových orgánov. Takže na to, aby sme mohli daný objekt vidieť potrebujeme, aby nám lúč priletel do šošovky.

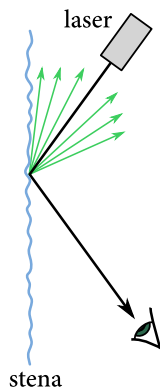
Pozrime sa teda na prvý prípad - zrkadlo. Predstavme si dokonalé zrkadlo, čiže všetko svetlo, ktoré dopadne na povrch zrkadla sa odrazí. Zároveň si môžeme predstaviť, že naše zrkadlo je dokonale hladké a teda platí, že uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu. Čo sa bude diať, ak na takéto zrkadlo zasvietime lúčom? Lúč doletí k zrkadlu a odrazí sa pod rovnakým uhlom. Kam máme postaviť Jara, aby uvidel zrkadlo? Keďže vidieť znamená, že mu lúč svetla musí priletieť do oka, postavíme ho tak, aby bol uhol dopadu lúča rovnaký ako uhol medzi Jarovým okom, bodom v ktorom sa lúč odrazil od zrkadla a zrkadlom.



Obrázok 1: Odras zväzku lúčov od zrkadla.

Ďalší objekt je dokonale čierne teleso. Takéto teleso pohlcuje všetko svetlo. To znamená, že ak naň zasvietime laserom, tak sa neodrazí ani jeden lúč a teda Jaro nič neuvidí.

Pod pojmom stena si môžeme predstaviť objekt s nerovnomerným povrchom. Pozrime sa najprv na prípad, keby sme svietili s reálnym zväzkom lúčov (neboli by nekonečne tenké). Pri odraze by sa lúče „roztrieštili“ a rozleteli všetkými smermi. To by znamenalo, že Jaro sa môže postaviť kdekoľvek. Ak by sme použili nekonečne tenký zväzok lúčov, tak by sme uvideli, že lúče sa znova „roztrieštili“. Avšak na vysvetlenie tohto javu by sme museli zísť až do oblasti kvantovej fyziky.



Obrázok 2: Odraz zväzku lúčov od steny.

Skúsme sa ešte zamyslieť nad tým, čo by sa stalo, ak by odrazený lúč od zrkadla nedopadol do oka. Takýto lúč by sa mohol odraziť od bielej steny, čím by presvetlil celú miestnosť. To by znamenalo, že by sa istotne našiel nejaký lúč, ktorý by sa po rozptyle od steny odrazil späť na zrkadlo a dopadol by do oka, takže by sme mohli stáť kdekokoľvek.

Prečo nesmie byť v miestnosti prach a dokonca ani vzduch? Pretože by sa mohlo stať, že lúč narazí do častíc a zmení svoju trajektóriu, pričom na každej z častíc sa svetlo odráža do všetkých smerov (intenzita odrážaného svetla sa však v závislosti od smeru môže líšiť). Preto by sa Jaro mohol postaviť kdekokoľvek. Podobná situácia nastáva napríklad pri rozptyle slnečných lúčov v hmle. Svetlo sa rozptyľuje na kvapôčkach vody v atmosfére, takže celé okolie sa „rozjasňuje“ a my nevieme povedať, kde sa nachádza slnko, pretože k nám neprichádzajú žiadne priame lúče.

1.2 Čo ti hrabe?

vzorák **Denda**, opravovala **Denda**

Začnime analýzou skúmanej situácie spojenou s budovaním potrebného vedomostného aparátu. Rovnako ako na hrable, tak aj na Maja, ktorého hmotnosť odhadneme na $m_M = 70$ kg, pôsobí tiažová sila určená známym vzťahom $\vec{F} = m \vec{g} \doteq 700$ N. Pri rotačnom pohybe je analógiou druhého Newtonovho zákona:

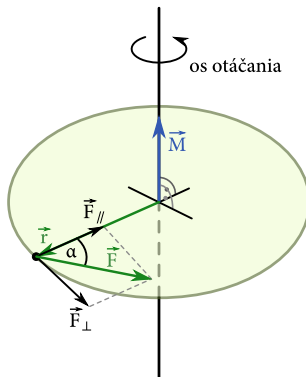
$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m \vec{a}$$

vzťah

$$\vec{M} = I \vec{\epsilon}.$$

Analógia funguje nasledovne. - Ekvivalentom zvyčajnej sily $\vec{F}$ pre rotačný pohyb je *moment sily* $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Keď sa obmedzíme len na veľkosti¹, tak $M = rF_{\perp} = rF \sin \alpha$ (značenie podľa Obr. 3).

¹Budeme používať notáciu, kde vektorové veličiny bez šípky navrchu (napr. $\vec{F} \rightarrow F$) značia veľkosť.



Obrázok 3: G Moment sily $\vec{M}$ pôsobiaci na bod vo vzdialenosti $\vec{r}$ od osi otáčania pri pôsobení sily $\vec{F}$.
Os otáčania aj moment sily sú kolmé na rovinu určenú vektormi $\vec{r}$ a $\vec{F}$.

- Ekvivalentom hmotnosti m , je *moment zotrvačnosti* I . Hovorí nám, ako náročné je uviesť teleso do otáčavého pohybu vzhľadom na os rotácie. Moment zotrvačnosti bodu hmotnosti m s kolmou vzdialenosťou od osi otáčania r má hodnotu $I = mr^2$. Lubovoľné teleso si vieme porozdeľovať na hmotné minciastočky. Celkovým momentom zotrvačnosti potom bude súčet momentov zotrvačností týchto minciastočiek. Aby sme sa však vyhli pokročilej matematike (integrálnemu počtu), výsledok pre tenkú tyč hmotnosti m a dĺžky L s osou otáčania kolmou na tyč a prechádzajúcou koncom tyče si môžeme nájsť napríklad na wikipédii:

$$I = \frac{1}{3}mL^2.$$

Hrable si aproximujeme súčtom dvoch navzájom kolmých tyčí: kratšej² s dĺžkou $l_1 = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$ a hmotnosťou $m_1 = 0,5 \text{ kg}$ a dlhšej s hmotnosťou $m_2 = 0,6 \text{ kg}$ a dĺžkou $l_2 = 1,7 \text{ m}$. Dĺžku l_2 budeme zároveň považovať aj za výšku, v ktorej sa nachádza Majovo čelo. Moment zotrvačnosti hrablí teda je

$$I_{\text{hrable}} = \frac{1}{3}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) = \frac{1}{3}(0,005 + 1,734) \text{ kgm}^2 \doteq 0,58 \text{ kgm}^2.$$

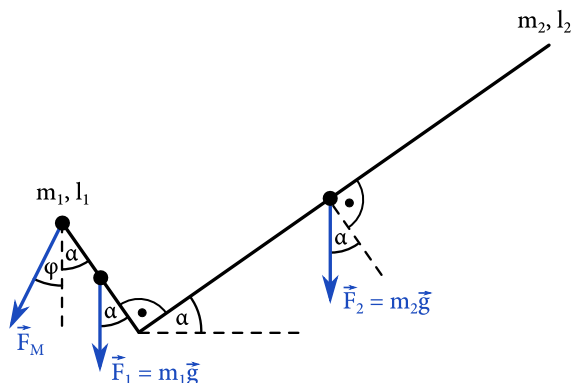
Vidíme, že príspevok za kratšiu tyč by sme mohli pokojne zanedbať. Popravde, keď ho vôbec neuvažujeme a výsledok zaokrúhlime na 2 desatinné miesta, dostávame tú istú hodnotu: $I = 0,58 \text{ kgm}^2$.

- Ekvivalentom zrýchlenia $\vec{a}$ je *uhlové zrýchlenie* $\vec{\varepsilon}$. Prirodzene, uhlové zrýchlenie nám hovorí, ako rýchlo sa mení uhlová rýchlosť $\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$ v čase:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}.$$

Na hrable budú pôsobiť 3 sily. $\vec{F}_1$ – tiažová sila kovovej časti hrablí pôsobiaca v jej ťažisku, $\vec{F}_2$ – tiažová sila drevenej časti opäť pôsobiaca v jej ťažisku a $\vec{F}_M$ – sila, ktorou na hrable pôsobí Majo pri dostupovaní.

²U kratšej časti budeme pre jednoduchosť ignorovať, že je v skutočnosti súčtom dlhších zubov a kratších ‘medzizubových spojív’ a pre účely určenia momentu zotrvačnosti si ju predstavíme ako kovový obdĺžnik, ktorý je už len súčtom pásikov (tyčí) zubovej dĺžky. Ak si obdĺžnik rozdelíme na n totožných tenkých pásikov (os otáčania prechádza spodnou hranou tohto obdĺžnika), tak $I = n \cdot \left(\frac{1}{3} \frac{m_1}{n} l_1^2 \right) = \frac{1}{3} m_1 l_1^2$, čo je rovnaký výsledok, aký by sme dostali pre tenkú tyč s dĺžkou l_1 a hmotnosťou m_1 .



Obrázok 4: *Sily pôsobiace na hrable.*

Sú len 3 možnosti, odkiaľ môžu pochádzať príspevky k sile $\vec{F}_M$.

1. Prvá možnosť sa týka zmeny hybnosti Majovej nohy. Hrable Majovi totiž bránia v tom, aby položil nohu prirodzene dopredu. Avšak uhol, pod ktorým Majo vtedy na hrable pôsobí, by mal tendenciu skôr otáčať drevenú tyč smerom do zeme než ju zdvíhať. Táto energia sa teda v podstate stratí, keďže s rotáciou hrabli nemá nič spoločné.
2. Kráčanie je vo všeobecnosti veľmi komplikovaný proces. Zoberme si napríklad naše ťažisko. To sa nepohybuje úplne vodorovne, ale skôr po akejsi jemnej sínusoide. Podobne tiež pri chôdzi presúvame váhu zboka na bok a taktiež zrýchľujeme a spomaľujeme naše končatiny. Na niektoré takéto zmeny pohybu potrebujeme využívať trenie so zemou. Pri chôdzi teda nepôsobíme výlučne iba smerom dole, ale aj trochu smerom dozadu. Týmto sa vyhybame problému, že keď na ležiace hrable pôsobíme čisto vertikálnym smerom, tak ich nemáme šancu zrotovať. Budeme ale predpokladať, že to nie je príliš veľká sila a preto uhol φ (viď Obr. 4) do takej miery, ako to bude možné, zanedbáme.
3. Tretia, najočividnejšia a najdôležitejšia možnosť, je tiažová sila. Táto sila bude samozrejme smerovať kolmo na zem a napriek tomu, že sa môže meniť od nuly po celú Majovu hmotnosť, prisúdime jej konštantnú veľkosť polovice Majovej tiaže. Čiže

$$\vec{F}_M = \frac{m_M \vec{g}}{2}.$$

V podstate sme teda celý proces spravili ekvivalentný s prípadom, kde kratšiu časť hrablí pritlačí k zemi závažie (hmotný bod) s hmotnosťou $\frac{m_M}{2}$, ktoré bude po celú dobu umiestnené na jej konci. Vďaka tomu teraz môžeme získať výsledok dvoma spôsobmi: cez sily (dynamiku) a zo zákona zachovania energie.

Dynamika - hrubý odhad

Pre jednoduchosť podme ignorovať ťaž kratšej časti hrablí $F_1 = m_1 g = 5 \text{ N}$.³ Do úvahy bude teda prichádzať len sila $\vec{F}_M$, ktorá sa bude usilovať o to, aby hrable Majovi vrazili do čela a sila $F_2 = m_2 g = 6 \text{ N}$,⁴ ktorá ju v tom bude trošku brzdiť. Pozrime sa teraz na silu $\vec{F}_M$. Ak závažie nepovažujeme za súčasť hrablí, tak $\vec{F}_M = \frac{1}{2} m_M (\vec{g} - \vec{a})$, kde $\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{l}_1$ je zrýchlenie konca kratšej časti hrablí a zároveň závažia. Teraz využijeme, že závažie je bodové.

³Nakoľko je zanedbateľná v porovnaní so silou od Maja a tiež príslušný moment sily $\vec{M}_1$ má hodnotu len 0,5 Nm.

⁴Veľkosťou je táto sila podobná tej, ktorú zanedbávame, tu je však už veľkosť momentu sily $M = 5,2 \text{ Nm}$.

Vďaka tomu ho môžeme zobrať ako súčasť systému tak, že ho započítame do momentu zotrvačnosti:

$$I_{\text{systém}} = I_{\text{hrable}} + \frac{m_M}{2} l_1^2 = 0,58 \text{ kgm}^2 + 0,35 \text{ kgm}^2 = 0,93 \text{ kgm}^2.$$

Tento krok (závažie je už súčasťou systému) nám umožnil používať $\vec{F}_M = \frac{m_M}{2} \vec{g}$.⁵ Takže veľkosť momentu sily $\vec{M} = \vec{M}_M + \vec{M}_2$ bude

$$M = \frac{g}{2} \cdot (m_M l_1 \sin \alpha - m_2 l_2 \cos \alpha).$$

a veľkosť uhlového zrýchlenia $\vec{\varepsilon}$

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{M}{I_{\text{systém}}} = \frac{g}{2} \cdot \frac{m_M \cdot l_1 \sin \alpha - m_2 l_2 \cos \alpha}{0,93 \text{ kgm}^2},$$

$$\varepsilon(\alpha) = (37,63 \sin \alpha - 5,48 \cos \alpha) \text{ s}^{-2}.$$

Všimnime si, že uhlové zrýchlenie závisí od uhla α . My sme sa však s iným ako konštantným zrýchlením ešte nestretli. Zaujímá nás však len hrubý odhad. Preto si pre jednoduchosť ε konštantným spravme. Najrozumnejšie bude nahradiť ho jeho strednou (priemernou) hodnotou. Nekonštantnými prvkami sú len faktory $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$. $\sin \alpha$ sa na intervale $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mení od 0 po 1 a $\cos \alpha$ od 1 po 0. Hrubo odhadnime strednú hodnotu týchto funkcií na danom intervale jednou polovicou⁶. Čiže zoberieme $\langle \sin \alpha \rangle = \langle \cos \alpha \rangle = \frac{1}{2}$ a teda

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (37,63 \sin \alpha - 5,48 \cos \alpha) \text{ s}^{-2} = 16,075 \text{ s}^{-2}.$$

Vieme, ako sa mení uhlová rýchlosť $\vec{\omega}$ a prejdený uhol v radiánoch $\vec{\alpha}$ v čase pri konštantnom uhlovom zrýchlení $\vec{\varepsilon}$:

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \cdot t,$$

$$\vec{\alpha}(t) = \vec{\alpha}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{1}{2} \vec{\varepsilon} \cdot t^2.$$

⁵Nadštandardné (nelámte si týmto príliš hlavu) výpočtové znázornenie ekvivalencie týchto dvoch možností. Začneme so silou $\vec{F}_M = \frac{1}{2} m_M (\vec{g} - \vec{\varepsilon} \times \vec{l}_1)$ v kombinácii s momentom zotrvačnosti hrablí bez bodového závažia (I_{hrable}) a úpravami sa dostaneme k bodovému závažiu započítanému do momentu zotrvačnosti ($I_{\text{systém}}$) a sile $\vec{F}_M = \frac{1}{2} m_M \vec{g}$.

$$I_{\text{hrable}} \vec{\varepsilon} = \vec{M}_M + \vec{M}_2 = \vec{l}_1 \times \vec{F}_M + \vec{M}_2 = \frac{m_M}{2} \cdot (\vec{l}_1 \times \vec{g} - \vec{l}_1 \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{l}_1)) + \vec{M}_2,$$

$$I_{\text{hrable}} \vec{\varepsilon} + \frac{m_M}{2} \vec{l}_1 \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{l}_1) = \frac{m_M}{2} \vec{l}_1 \times \vec{g} + \vec{M}_2.$$

Teraz využijeme identitu: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$. V našom prípade $\vec{l}_1 \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{l}_1) = (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_1) \vec{\varepsilon} - (\vec{l}_1 \cdot \vec{\varepsilon}) \vec{l}_1 = l_1^2 \vec{\varepsilon}$. Čiže:

$$I_{\text{systém}} \vec{\varepsilon} = (I_{\text{hrable}} + \frac{m_M}{2} l_1^2) \vec{\varepsilon} = \vec{l}_1 \times \frac{m_M}{2} \vec{g} + \vec{M}_2.$$

⁶Skutočná stredná hodnota (zaokrúhlená na 3 desatinné miesta) je 0,637.

V našom prípade $\vec{\alpha}_0 = 0$, $\vec{\omega}_0 = 0 \text{ s}^{-1}$. Chceme získať rýchlosť konca hrablí (vo vzdialenosti 1,7 m):

$$v(t) = \omega(t) \cdot 1,7 \text{ m} = \varepsilon \cdot t \cdot 1,7 \text{ m},$$

keď $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Správny čas získame zo vzťahu pre prejdenný uhol:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \varepsilon t^2.$$

$$t = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} = 0,44 \text{ s}.$$

A teda

$$v(t) \doteq 12 \text{ ms}^{-1} \doteq 43,3 \text{ kmh}^{-1}.$$

Od vás nám plne stačili len takéto rýchle, hrubé odhady. Poďme to však teraz zrátať presnejšie, nech si overíme, či sme sa trafili.

Dynamika – presnejšie

Vráťme do hry už aj tiež kratšej časti hrablí. Veľkosť momentu sily $\vec{M} = \vec{M}_M + \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, bude v tomto prípade

$$M = \frac{g}{2} \cdot ((m_1 + m_M) l_1 \sin \alpha - m_2 l_2 \cos \alpha).$$

Veľkosť uhlového zrýchlenia $\vec{\varepsilon}(\alpha)$ zas

$$\varepsilon = \frac{M}{I_{\text{systém}}} = \frac{g}{2} \cdot \frac{(m_1 + m_M) \cdot l_1 \sin \alpha - m_2 l_2 \cos \alpha}{0,93 \text{ kgm}^2},$$

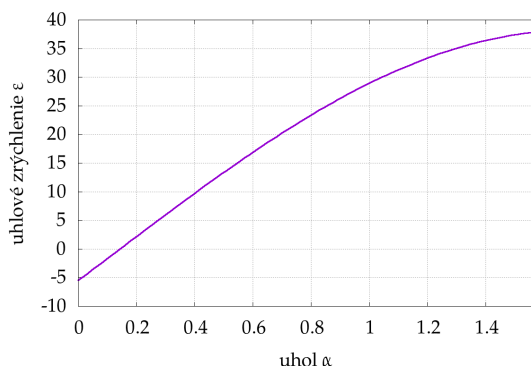
$$\varepsilon = (37,9 \sin \alpha - 5,48 \cos \alpha) \text{ s}^{-2}.$$

Ako sme už spomínali, uhlové zrýchlenie závisí netriviálne od uhla α . Čo iné, než zobrať priemernú hodnotu, by sme s aparátom, ktorý poznáme, vedeli spraviť? Môžeme čas rozbiť na nejaké malé časové úseky Δt a skúsiť predpokladať, že zrýchlenie sa počas týchto časových úsekov nemení.⁷ Konkrétne, problém nasimulujeme nasledujúcim spôsobom. Pre každý časový úsek si zaktualizujeme uhlovú rýchlosť a uhlové zrýchlenie a následne sa posunieme o uhol, ktorý s danou rýchlosťou a zrýchlením ľubovoľný bod hrablí za Δt prejde. Proces opakujeme, kým prejdenný uhol neprekročí $90^\circ = \frac{\pi}{2}$. Rýchlosť, ktorou hrable zasiahnu Maja do čela bude $v = \omega \cdot 1,7 \text{ m}$, kde ω je správne zaktualizovaná. Avšak predtým, než predstavím možný kód pre takúto simuláciu, vykreslime si ešte, ako tá závislosť $\varepsilon(\alpha)$ vyzerá (Obr. 5).

⁷Konštantné časové úseky Δt by sme mohli vymeniť za konštantné uhlové úseky $\Delta \alpha$ tým, že by sme vzali

$$\Delta t(\alpha) = \frac{-\omega(\alpha) + \sqrt{\omega^2(\alpha) + 2 \cdot \Delta \alpha \cdot \varepsilon(\alpha)}}{\varepsilon(\alpha)}.$$

Získali by sme tým napríklad istotu, že výslednú rýchlosť máme pre $\alpha = 90^\circ$. Ak ale zoberieme Δt dostatočne malé, výrazný rozdiel by to spraviť nemalo. Skúsila som oba spôsoby simulácie a rozdiel bol až na treťom desatinnom mieste.



Obrázok 5: Závislosť uhlového zrýchlenia ε od uhla α pri $\varphi = 0$.

Všimnime si, že pre malé uhly je ε záporné. To nechceme. Vôbec to totiž nepopisuje situáciu, ktorú pozorujeme. Podľa daného grafu, by sme hrable z horizontálnej polohy ($\alpha = 0$) nikdy nezdvihli – na zdvihnutie by zrýchlenie muselo byť kladné už pre $\alpha = 0$. Majo teda naozaj musí pôsobiť na hrable aj smerom dozadu – príspevok k sile $\vec{F}_M$ z bodu 2, označme ho $\vec{F}_{M_{\text{hor}}}$, teda nemôžeme zanedbať úplne. Vyjadrime si jeho príspevok k uhlovému zrýchleniu:

$$\varepsilon_{M_{\text{hor}}} = \frac{M_{M_{\text{hor}}}}{I_{\text{systém}}} = \frac{l_1 \cdot F_{M_{\text{hor}}} \cdot \cos \alpha}{I_{\text{systém}}}.$$

Je zrejmé, že na to, aby sme docielili kladné uhlové zrýchlenie od začiatku, $\varepsilon_{M_{\text{hor}}}(\alpha = 0)$ musí byť väčšie ako $5,48 \text{ s}^{-2}$. Zoberme teda napríklad $\varepsilon_{M_{\text{hor}}}(\alpha = 0) = 5,49 \text{ s}^{-2}$, čo zodpovedá sile $F_{M_{\text{hor}}} = 51,06 \text{ N}$. Pre jednoduchosť predpokladajme, že sila $\vec{F}_{M_{\text{hor}}}$ bude po celú dobu konštantná. Nový vzťah pre uhlové zrýchlenie teda bude:

$$\varepsilon = (37,9 \sin \alpha + 0,01 \cos \alpha) \text{ s}^{-2}.$$

Kód v pythone by mohol vyzeráť napríklad takto:

```
from math import cos, sin, pi

def epsilon(alpha):
    return 37.9*sin(alpha) + 0.01*cos(alpha)

delta_t = 0.00001

alpha = 0
omega = 0
while alpha < pi/2:
    zrychlenie = epsilon(alpha)
    alpha += omega*delta_t + (zrychlenie*delta_t**2)/2
    omega += zrychlenie*delta_t
print(omega*1.7)
```

Výsledok pre $\Delta t = 10^{-5}$ s je

$$v = 14,8 \text{ ms}^{-1} \doteq 53,28 \text{ kmh}^{-1}.$$

Pre kontrolu či časový úsek $\Delta t = 10^{-5}$ s je vhodná voľba, skontrolujeme, či o rád menší a o rád väčší časový úsek dajú podobné výsledky. $\Delta t = 10^{-4}$ s dáva $v = 14,806 \text{ ms}^{-1}$ a pre $\Delta t = 10^{-6}$ s je $v = 14,803 \text{ ms}^{-1}$.

Zákon zachovania energie

Potenciálna energia bodového závažia a kovovej časti hrablí sa premení na prírastok potenciálnej energie drevenej tyče, rotačnú kinetickú energiu hrablí a kinetickú energiu bodového závažia:

$$\frac{m_M}{2}gl_1 + m_1g\frac{l_1}{2} = m_2g\frac{l_2}{2} + \frac{1}{2}I_{\text{hrable}}\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{m_M}{2}l_1^2\omega^2.$$

Nás zaujíma, akou rýchlosťou zasiahnu hrable Majovo čelo. Túto rýchlosť môžeme vyjadriť ako

$$v = \omega \cdot 1,7 \text{ m}.$$

Po vyjadrení veľkosti uhlovej rýchlosti ω zo zákona zachovania energie dostávame

$$v = \sqrt{\frac{m_Mgl_1 + m_1gl_1 - m_2gl_2}{I_{\text{hrable}} + \frac{1}{2}m_Ml_1^2}} \cdot 1,7 \text{ m},$$

$$v \doteq 13,69 \text{ ms}^{-1} \doteq 49,28 \text{ kmh}^{-1}.$$

Záver

V porovnaní s riešením cez energie, hrubým odhadom sme sa dopustili chyby $1,69 \text{ ms}^{-1} = 6,084 \text{ kmh}^{-1}$. Keby sme použili presnú strednú hodnotu $\langle \sin \alpha \rangle = \langle \cos \alpha \rangle = 0,637$, dostali by sme $v = 13,58 \text{ ms}^{-1} = 48,89 \text{ kmh}^{-1}$ a teda chybu $0,11 \text{ ms}^{-1} = 0,396 \text{ kmh}^{-1}$. To vôbec nie je zlé! Horizontálna sila, ktorú sme pridali pri presnejšom riešení cez sily, pridala zhruba $1,11 \text{ ms}^{-1} \doteq 4 \text{ kmh}^{-1}$. Zarátanie vplyvu kratšej časti hrablí zas zhruba $0,06 \text{ ms}^{-1} \doteq 0,2 \text{ kmh}^{-1}$.

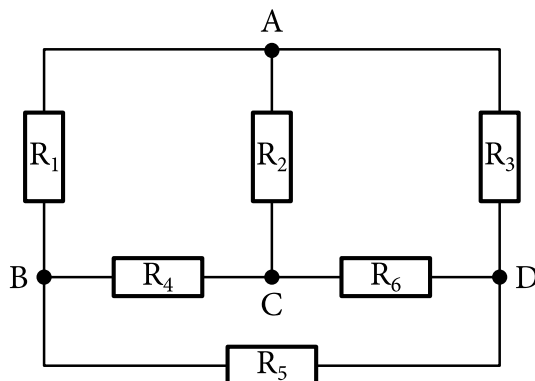
Skutočná dynamika ale môže výrazne závisieť aj od toho, ktorou časťou nohy na hrable dopadneme – ak napríklad dopadneme na hrable tak, že pätu ešte nemáme položenú na zemi, je dosť možné, že nohu reflexívne potiahneme dozadu, kým sa päta zeme nedotkne.⁸ Tým by tá horizontálna zložka sily mohla spraviť výraznejší rozdiel. Rovnako, ako dostupujeme, čím ďalej tým viac sa na nohu zavažujeme. Na druhú stranu, kým máme nohu vyvýšenú, ťažšie sa na ňu prenáša váha. Polovica Majovej hmotnosti je teda naozaj hrubý odhad. Celkovo však odhadujeme, že hrable Maja zasiahnu rýchlosťou okolo 50 kmh^{-1} , čo musí dosť bolieť.

1.3 Viac-menej odporná

vzorák Bubu, opravoval Bubu

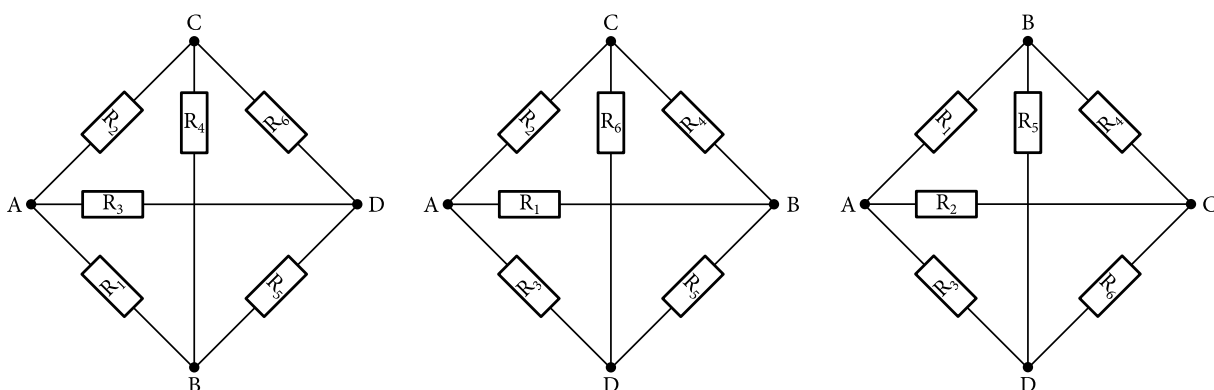
Pri riešení úloh s odpormi je veľmi často veľmi dôležité si obvod prekresliť, prípadne si uvedomiť, že nie je až taký zložitý ako si myslíme, dosť to uľahčuje výpočty aj uvažovanie. Pozrime sa teda na náš obvod, označme si jednotlivé uzly A, B, C a D, a jednotlivé rezistory $R_1, \dots, R_6$:

⁸Presnejšie odhady by sa dali spraviť experimentálne.



Obrázok 6: Označenie uzlov a rezistorov

Všimnime si, že medzi každými dvoma uzlami máme presne jeden rezistor. To znamená, že si obvod vieme prekresliť takto:

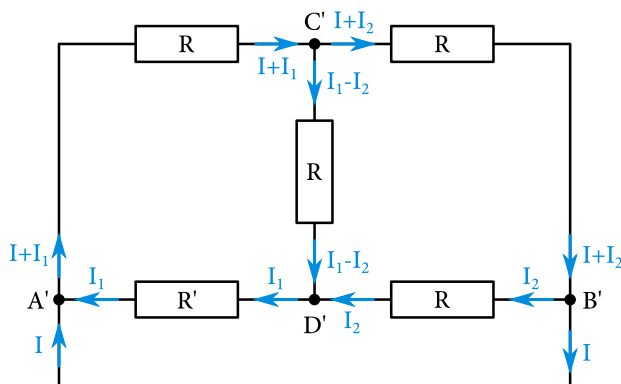


Obrázok 7: Tri možnosti ako si môžeme prekresliť obvod

Označme si odpor pokazeného rezistora R' . Uvažujme, bez ujmy na všeobecnosti (keďže je obvod symetrický) prípad, keď meriame odpor medzi uzlami A a B. Pozrime sa na prípady, keď je pokazený rezistor R_1 alebo rezistor R_6 . V týchto prípadoch je rozdiel potenciálov medzi uzlami C a D nulový, čo jasne vidíme z horizontálnej symetrie obvodu (ak by sme uzly C a D vzájomne vymenili bez zmeny jednotlivých odporov, nič by sa nezmenilo), a preto môžeme rezistor R_6 veselo odignorovať. Zostáva nám už len obvod s troma paralelnými vetvami, z ktorých každá je len sériovým zapojením pár rezistorov. Výsledný odpor paralelného zapojenia dvoch vetiev s odpormi R_I, R_{II} je $R_I R_{II} / (R_I + R_{II})$. Podobne výsledný odpor sériového zapojenia dvoch vetiev s odpormi R_I, R_{II} je $R_I + R_{II}$. Pomocou tohoto ľahko vyrátame, že výsledný odpor zapojenia je $0.5R$ ak je rezistor R_6 pokazený, a $RR' / (R + R')$ ak je pokazený rezistor R_1 , a v tomto prípade vieme povedať, že $R' = RR_{AB} / (R_{AB} - R)$.

Pozrime sa teraz na zvyšné 4 prípady (pokazený je jeden z rezistorov $R_2, \dots, R_5$). Z horizontálnej symetrie obvodu vidíme, že prípady keď je pokazený rezistor R_2 či R_3 , ako aj prípady keď je pokazený rezistor R_4 či R_5 sú ekvivalentné. Keďže $R_{AB} = R_{BA}$, tak vieme využiť aj vertikálnu symetriu obvodu, a teda vidíme, že výsledný odpor je rovnaký, bez ohľadu na to, či je pokazený rezistor R_2, R_3, R_4 , či R_5 . Pozrime sa teraz na to, ako ten odpor vieme zrátať. Uvažujme, bez ujmy na všeobecnosti, že týmto pokazeným rezistorom je práve rezistor R_3 . Všimnime

si, že zapojenie medzi bodmi A a B je teraz paralelným zapojením rezistoru R_1 , a zapojenia zvyšných rezistorov. Pozrime sa teda na odpor tohoto zapojenia:



Obrázok 8: Zapojenie piatich odporov, a prúdy v ňom

Uvažujme, že medzi uzlami A' a B' je napätie U , a tečie medzi nimi celkový prúd I , z čoho vyplýva, že platí $R_{A'B'} = U/I$. Zo zapojenia si vieme na základe úbytku napätia na jednotlivých rezistoroch (znovu pomocou Ohmovho zákona) napísať týchto 5 rovníc:

$$U_{D'} = U_{A'} + R'I_1$$

$$U_{C'} = U_{A'} - R(I + I_1)$$

$$U_{D'} = U_{C'} - R(I_1 - I_2)$$

$$U_{B'} = U_{C'} - R(I + I_2)$$

$$U_{B'} = U_{D'} + RI_2,$$

pričom napätia si zoberieme vzhľadom na uzol B', čiže $U_{A'} = U$ a $U_{B'} = 0$. Riešením týchto piatich rovníc zistíme, že odpor tohoto zapojenia je

$$\frac{R(3R + 5R')}{5R + 3R'}.$$

A teda celkový odpor zapojenia je

$$\frac{R(3R + 5R')}{8(R + R')},$$

z čoho získame R' ako $(R(8R_{AB} - 3R)) / (5R - 8R_{AB})$.

Všimnime si jednu veľmi podstatnú vec, a to síce, že tieto tri prípady s rôznymi nebudú mať nikdy rovnaký odpor, ak $R \neq R'$, čo nám uľahčuje situáciu.

Keďže už máme vyrátané jednotlivé možnosti výsledného zmeraného odporu, pozrime sa na to, ako na čo najmenej meraní zistiť, ktorý rezistor je pokazený, a jeho odpor.

Začnime zmeraním odporu medzi A a B. V prípade, že je tento odpor $0.5R$, vieme, že pokazený je rezistor R_6 , a jeho odpor vieme ľahko získať zmeraním R_{CD} ako $R_{CD}R/(R_{CD} - R)$. V prípade, že je odpor iný, povedzme, R_x , zmerajme odpor medzi uzlami A a C. Ak je tento odpor $0.5R$, vieme, že pokazený je odpor R_5 , a jeho odpor vieme vyrátať ako $(R(8R_x - 3R))/(5R - 8R_x)$. V prípade, že je odpor medzi A a C R_x , vieme, že pokazený je jeden z rezistorov R_3 , alebo R_4 (to sú jediné dva, ktoré majú pri meraní R_{AB} a R_{AC} „rovnakú pozíciu“. Už vieme, že jeho odpor je $(R(8R_x - 3R))/(5R - 8R_x)$. To, ktorý z týchto dvoch to je vieme rýchlo zistiť zmeraním odporu medzi A a D, pričom ak je tento odpor $0.5R$, tak je pokazený rezistor R_4 , inak R_3 . Poslednou možnosťou je, že odpor medzi uzlami A a C je R_y , čo znamená, že pokazený je buď odpor R_1 , alebo R_2 . Ak teda zmeriame odpor medzi uzlami C a D, dostaneme buď odpor $0.5R$, čo znamená, že pokazený je rezistor R_1 , a jeho odpor vieme získať ako $RR_x/(R_x - R)$. V opačnom prípade vieme, že je pokazený rezistor R_2 , no a v tom prípade jeho odpor vieme získať ako $RR_y/(R_y - R)$.

Otázka, ktorá je na mieste je, či to ide na menej ako tri merania. Odpoveď je, že nie, pozrime sa prečo: Začnime, b.ú.n.v. tým, že zmeriame odpor R_{AB} . Zistíme, že to nie je $0.5R$. Meraním odporu medzi bodmi C a D buď ukončíme hľadanie, alebo nezískame žiadnu informáciu. Ten druhý prípad, a to síce, že b.ú.n.v. zmeriame odpor medzi uzlami A a C sme prebrali vyššie.

Vo všetkých prípadoch sme teda zistili, ktorý rezistor je pokazený, aj to, aký je jeho odpor na najviac tri merania.

1.4 Šarmantná fotka

vzorák Kvík

Keby ste boli vekovo na úrovni Kvíka, okrem dinosaurov a prvého koncertu Helenky Vondráčkovej by ste si pamätali, že podobná úloha tu už kedysi bola. V nej sa šikovným spôsobom dalo využiť to, že sme mali k dispozícii viaceré význačné body a že sme na nej poznali horizont. Tu to však také jednoduché nie je.

Aj keď riešenie je určite jednoznačné (fotka je skutočná a fotoaparát niekde byť musel), bez ďalšej informácie ho veľmi presne zistiť nedokážeme. Môžeme si síce otvoriť nejaký vhodný softvér, napríklad Google Earth, pokúsiť sa nastaviť podobný pohľad a odčítat polohu – takáto metóda je však značne nepresná, závisí od zvoleného zorného poľa a ani po fyzikálnej stránke nie je práve hodnotná.

V obrázku však určitá dodatočná informácia skrytá je: budovy bývajú spravidla postavené tak, že ich steny sú zvislé. Keďže nie sme v Pise, ale niekde nad Bratislavou, môžeme predpokladať, že toto platí. Ak si na chvíľu odmyslíme, že Zem nie je dokonalá guľa, predĺženia hrán stien ležia na priamkach, prechádzajúcich stredom Zeme. Na fotke však sa samozrejme nemusia zobrazovať ako zvislé, čo dokážeme využiť.

Nakreslíme si niekoľko takýchto priamok na fotku, ako keby ich fotoaparát mohol vidieť, a predpokladajme, že ich vidíme aj vnútri Zeme. Stačia dve, pre názornosť ale skúsme aspoň tri. Na polohe striktne vzaté nezáleží⁹, ale intuitívne by nám malo byť zrejmé, že bude najlepšie, ak budú na fotke čo najďalej od seba, aby sme minimalizovali chyby. Zvoľme si napríklad os vysieláča na Kamzíku, os komína teplárne Polianky pri Dúbravke a najvyšší mrakodrap na Dlhých dieloch.

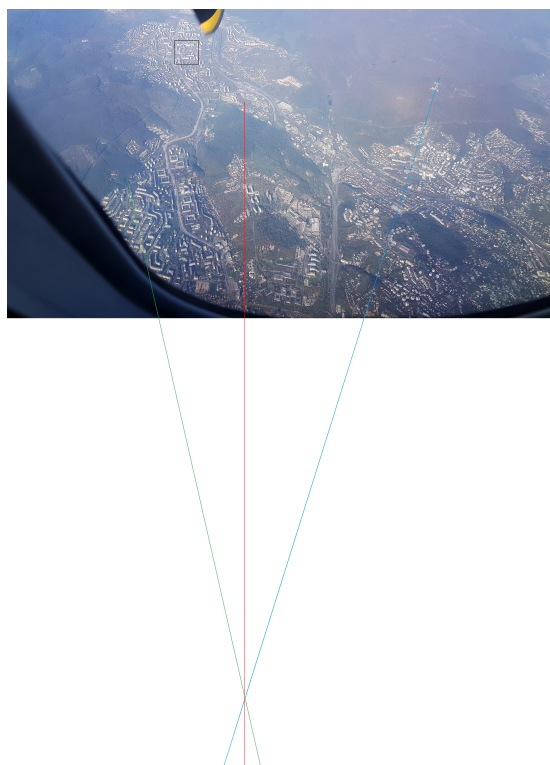
Tieto virtuálne priamky sa pretínajú v strede Zeme¹⁰. Na fotografii sa nám pretnú kdesi pod spodným okrajom, čo nám na prvý pohľad veľmi nepomohlo... aspoň kým si neuvedomíme, že na toto miesto by sa takisto zobrazil

⁹aspoň kým sa nezačínajú

¹⁰Na tejto škále by sme mohli Zem považovať za dosku, akurát miesto stredu potom potrebujeme nekonečno

stred Zeme. Viac ako stred nás bude zaujímať miesto na povrchu, ktoré sa nachádzalo presne pod Marcelovým lietadlom. To však leží na spojnici fotoaparátu a stredu Zeme, teda na fotke je na rovnakom mieste. Kde sa však toto miesto nachádza v skutočnom trojrozmernom svete?

To je jednoduché: pozrime sa opäť na tieto čiary a všimnime si, po akých miestach *na povrchu* prechádzajú na fotke. Ak ich pospájame – napríklad v Google Earth – a odignorujeme členitosť terénu, dostaneme znovu priamky, ale tentokrát na povrchu Zeme. Tam, kde sa pretnú, leží miesto priamo pod fotoaparátom, ktoré si označíme *P*. Takto dostaneme súradnice približne 48,1293° N, 17,0714° E, blízko začiatku legendárnej diaľnice D1.

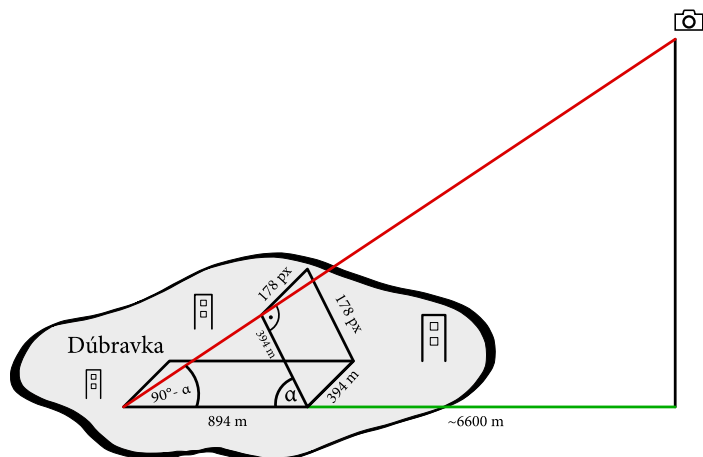


Obrázok 9: Fotografia s vyznačenými priamkami. Mrakodrap na Dlhých dieloch je pri okraji okienka, preto sme si priamku natiahli aj opačným smerom.

Zemepisnú šírku a dĺžku poznáme, čo však s výškou? Tu si pomôžeme nie zvislou priamkou, ale vodorovnou plochou. Opäť budeme hľadať nejakú dostatočne veľkú – dobre poslúži strecha Matfyzu alebo PriFUKu (olympijské obdĺžniky vľavo dolu) alebo Dúbravka. Nakreslíme si na toto miesto na fotku štvorec a predstavme si, že zodpovedajú skutočné miesta posprejeme farbou (aby sme neskôr, až nás chytia policajti, nemuseli veľa čistiť v rámci verejnoprospešných prác, postačí nám jeho obrys).

Ak je plocha dosť rovná, jeho spodná strana bude v skutočnosti úsečka, navyše kolmá na líniu pohľadu. Odmeriame jej skutočnú dĺžku a tiež dĺžku strany štvorca na obrázku – u nás to je 394 m a 176 px. Jeden pixel teda v tejto vzdialenosti zodpovedá asi 2,2 m. Ľavá strana (na fotke zvislá) však kvôli perspektíve bude v skutočnosti podstatne dlhšia, u nás až 894 m. Natiahla sa totiž pri zobrazení pod uhlom α . Ak si to nakreslíme, zistíme, že preň bude musieť platiť vzťah

$$\cos \alpha = \frac{394 \text{ m}}{894 \text{ m}}.$$



Obrázok 10: Geometria pohľadu na štvorec

Nás zaujíma doplnok tohoto uhla do 90° , čo je uhol, pod ktorým by pozorovateľ v rohu štvorca videl lietadlo, merané od jeho horizontu. Po vyčíslení zistíme, že $90^\circ - \alpha \doteq 26^\circ$. Vzdialenosť od vrchola štvorca¹¹ po bod P vieme opäť odmerať v Google Earth. V našom prípade je to asi 6600 m. Jednoduchou trigonometriou dopočítame, že lietadlo muselo byť vo výške asi $\tan 26^\circ \cdot 6600 \text{ m} \doteq 3240 \text{ m}$ nad úrovňou štvorca, čo je nejakých 3450 m nad morom. Vzorový súbor vo formáte kmz vyzerá [takto](#).

Možných postupov je samozrejme viac. Miesto plochej Dúbravky by sme mohli použiť zvislý komín, alebo odmerať viacero kolmých úsečiek na fotke a v skutočnosti a dofitovať správnu geometrickú vzdialenosť.

1.5 Biliardové gule

vzorák Hovorca, opravoval Hovorca

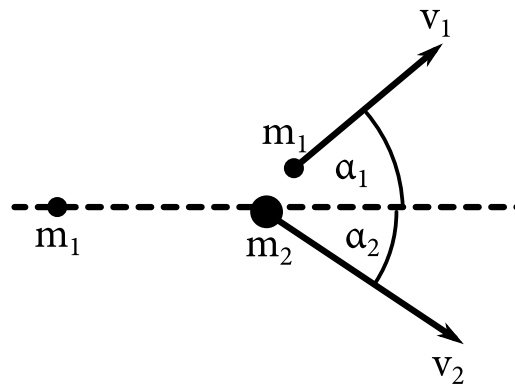
Budeme predpokladať, že zrážky biliardových gúl sú dokonale pružné, a že biliardový stôl je bez trenia - to zabezpečí, že gule sa po ňom budú kĺzať a nebudú rotovať. Ak sú zrážky dokonale pružné, môžeme uvažovať, že platí zákon zachovania energie (ďalej len ZZE) aj zákon zachovania hybnosti (ZZH) v našej sústave.

Na úvod sa pozrime, ako vyzerá necentrálna zrážka dvoch gúl rôznych hmotností, z ktorých sa jedna hýbe a druhá stojí. Budeme predpokladať, že stojaca guľa má hmotnosť m a hýbajúca sa má hmotnosť $k \cdot m$, kde k je kladné reálne číslo. Uvedomme si, že stojaca guľa je ľahšia ako hýbajúca sa práve vtedy, keď $k > 1$. Dôležité je v tomto prípade si uvedomiť, že stojaca guľa sa po zrážke bude pohybovať smerom určeným *výlučne* tým, kde na nej leží bod dotyku s hýbajúcou sa guľou pri zrážke. Jediná sila, ktorá totiž pri zrážke pôsobí na stojacu guľu je totiž normálová sila povrchu pohybujúcej sa, a tá má smer kolmo od bodu dotyku. Teda ak je Hovorca šikovní (a to veríme, že je), dokáže nasmerovať prvú guľu na druhú tak, aby sa následne stojaca guľa rozpohybovala smerom, ktorý si zmyslí (samozrejme v rámci rozumného rozpätia uhlov).

Zároveň však platí ZZH, ktorý platí vektorovo! Ak si pohyb gúl po zrážke rozložíme na „smer pôvodnej rýchlosti prvej gule“ a „kolmý smer“ (pracovne nazývané aj x -ový a y -ový smer v danom poradí), pre oba tieto smery musí platiť ZZH. Teda y -ové zložky hybností gúl po zrážke sa musia vzájomne rovnať veľkosťou a byť opačne orientované, nakoľko pred zrážkou bola celková hybnosť v tomto smere nulová. Zložky v smere x zase po zrážke musia spolu dať pôvodnú hybnosť prvej gule. Označíme α_1 a α_2 uhly, o ktoré sa voči x -ovému smeru odklonia

¹¹ Jeho rozmery tu zanedbávame. Síce nám to spraví chybu, ale iba porovnateľne veľkú s ostatnými, ktoré sme už urobili a ktorým sa veľmi nevieme vyhnúť.

postupne prvá a druhá guľa po zrážke, pričom uvažujeme len ich veľkosť, nie smer, teda $\alpha_1 \geq 0$ a $\alpha_2 \geq 0$. Označme tiež rýchlosť prvej gule pred zrážkou v_0 a rýchlosti guľí po zrážke v_1 a v_2 .



Obrázok 11: Necentrálna zrážka dvoch guľí.

Potom môžeme písať tri rovnice, ktoré postupne vyjadrujú ZZE, ZZH v smere x a ZZH v smere y :

$$kmv_0^2 = kmv_1^2 + mv_2^2,$$

$$kmv_0 = kmv_1 \cos \alpha_1 + mv_2 \cos \alpha_2,$$

$$0 = kmv_1 \sin \alpha_1 - mv_2 \sin \alpha_2.$$

Všimnime si hneď na úvod, že hmotnosť m sa dá zo všetkých rovníc vykrátiť. Našou snahou bude vyjadriť pomer hmotností k iba pomocou uhlov, ktoré vieme merať. Ak sa nám to podarí, tak pomer hmotností určí, ktorá z guľí je ťažšia.

Tretiu rovnicu upravme do tvaru $v_2 = kv_1 \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$ a dosadiac do druhej tú následne upravíme na tvar $v_0 = v_1 (\cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cot \alpha_2)$. Ak teraz do prvej rovnice dosadíme za v_0 a v_2 , dostaneme rovnicu

$$kv_1^2 (\cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cot \alpha_2)^2 = kv_1^2 + k^2 v_1^2 \left(\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \right)^2,$$

z ktorej vieme vykrátiť kv_1^2 a úpravami dostávame

$$k = \left(\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \right)^2 \left((\cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cot \alpha_2)^2 - 1 \right).$$

Čitateľ nám isto odpustí matematický prístup, keď povieme, že „riešenie existuje“, teda že vieme určiť, ktorá z guľí je ťažšia, ba čo viac, presne určiť pomer hmotností dvoch guľí pri zrážke, pokiaľ jedna z nich predtým stála.

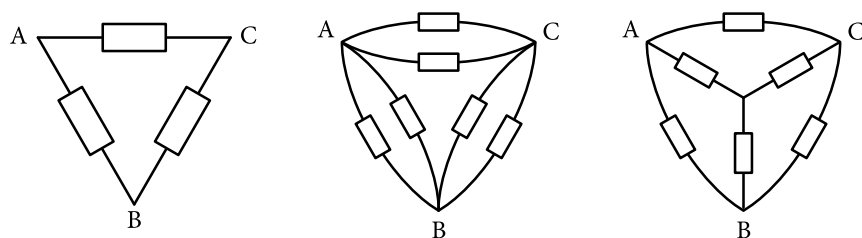
Teraz stačí urobiť nasledovné: postavím na stôl tri gule. Prvú vystrelím necentrálne na druhú tak, aby druhá zasiahla po zrážke tretiu tiež necentrálne. Odmeriame uhly a vieme určiť pomery hmotností prvej a druhej gule ako aj druhej a tretej gule, teda vlastne pomery hmotností všetkých guľí. A teda jednoznačne dokážeme povedať, ktorá z guľí je najťažšia a ktorá najľahšia.

1.6 Čierna skrinka

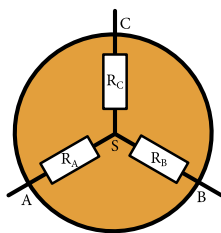
vzorák Dušan, opravovala Terka

Začneme tým, že sa chceme ospravedlniť za pôvodné zadanie. Nájst všetky možné zapojenia nie je také jednoduché, ako sme si mysleli.

A teraz k tým podstatným veciam. Najjednoduchšie zapojenie bude vyzeráť určite tak, že spojíme každý bod s každým práve jedným vodičom s rezistorom. To znamená, že v čiernej skrinke nebude žiaden uzol navyše. Otázkou teraz zostáva, či z takéhoto zapojenia vieme vyrobiť jednoducho iné zapojenie, ktoré by malo iný počet uzlov, inak povedané také, ktoré by podľa zadania nebolo rovnaké. (Rozdelenie rezistora na dva sériovo alebo paralelne zapojené rezistory nemení počet uzlov.) Ukazuje sa, že vieme, a to vďaka zapojeniu trojuholník-hviezda¹² To znamená, že týmto spôsobom si vieme zadarmo vyrobiť zapojenie, ktoré má rovnaký počet odporov, ale o uzol viac. Počet odporov zas vieme meniť nahradením jedného odporu za dva paralelné. Už vidíte kam tým smerujeme? Stačí vziať najjednoduchšie zapojenie v tvare trojuholníka, odpor na každej strane nahradiť veľa paralelnými a dostaneme tak veľa trojuholníkov pospájaných vo vrcholoch. A teraz môžeme na každý z nich aplikovať transformáciu trojuholník-hviezda, čím dostaneme zapojenia s rôznym počtom vrcholov. Poradie týchto ekvivalentných operácií môžeme dokonca medzi sebou prestriedať, no tak či onak, teoreticky je takýchto rôznych zapojení nekonečno.



Ešte nám však zostáva dokázať, že aspoň jedno z takýchto ekvivalentných zapojení bude môcť spĺňať hodnoty uvedené v zadani. Keďže sme leniví (a múdri, pekní, skromní), ukážeme to na výpočtovo najjednoduchšom zapojení, hviezde s tromi rezistormi ako na obrázku.



Podľa zadania, keď zapojíme 20 V zdroj na uzly A a B, tak medzi uzlami B a C nameriame napätie 8 V. Cez odpor R_C prúd netečie a medzi uzlami A a B je prúd nemenný. Ohmov zákon hovorí, že napätie sa v sériovo zapojených rezistoroch rozloží priamo úmerne odporu rezistorov. Pomer odporu R_B k odporu celej vetvy, cez ktorú preteká prúd teda je

$$\frac{R_B}{R_A + R_B} = \frac{U'_{SB}}{U'_{AS} + U'_{SB}} = \frac{8}{20}.$$

¹²Ako presne spraviť túto transformáciu nebudeme vysvetlovať, no ak to neviete, nájdete to napríklad na wikipédii https://en.wikipedia.org/wiki/Y-Δ_transform.

Podobne, ak zapojíme zdroj medzi uzly B a C, cez odpor R_A prúd nepotečie a na odpore R_C nameriame spád napätia 20 V. Pre pomer odporov teda platí

$$\frac{R_C}{R_B + R_C} = \frac{U''_{SC}}{U''_{BS} + U''_{SC}} = \frac{15}{20}.$$

Máme dve lineárne rovnice o troch neznámých, ktoré hravo vyriešime. Vyjde nám $R_A = \frac{3}{2}R_B$ a $R_C = 3R_B$ s vôľou v odpore R_B , čo nie je prekvapením na počet nezávislých rovníc.

No a to je všetko. Ukázali sme na pár riadkoch, že vieme nájsť nekonečne veľa riešení problému a pre to najjednoduchšie zapojenie sme ho aj našli. Na šestku celkom ľahké, nie?

1.7 Manéver

vzorák Adam, opravoval Adam

Ako to často býva, ak nájdeme nejakú zachovávajúcu sa veličinu, výrazne si pomôžeme. V tomto prípade je tou veličinou moment hybnosti vzhľadom na os kolotoča, keďže na systém kolotoč + Nina nepôsobí vonkajšie sily s nenulovým príslušným momentom sily vzhľadom na os otáčania. Len poznamenajme, že na systém pôsobí ešte ťažová sila a sila od fyzickej osi kolotoča, ale ich moment sily vzhľadom na os otáčania je nulový.

Aký veľký je tento moment hybnosti?

Na to, aby sme to vedeli, potrebujeme poznať moment zotrvačnosti prázdneho kolotoča I , moment hybnosti potom získame ako:

$$L = I\omega$$

Moment zotrvačnosti celého kolotoča okolo jeho osi bude súčtom momentov zotrvačnosti jeho štyroch obručí. Už nám len stačí určiť moment zotrvačnosti obruče (kružnice), okolo osi prechádzajúcej jej stredom a ležiacej v rovine obruče. Jedna možnosť je niekde ho nájsť, ale mne sa to (v slovenčine) len tak z voleja nepodarilo, a tak si ukážeme nástroj, vďaka ktorému ho určíme na kolene.

Veta o kolmých osiach

Majme rovinný útvar a karteziánske súradnice zvolené tak, že útvar leží v rovine xy . Príspevok malého kúska hmotnosti Δm k momentu zotrvačnosti okolo ľubovoľnej osi je $\Delta I = \Delta m v^2$, kde v je kolmá vzdialenosť kúska od danej osi. Pozrime sa na takýto kúsok nášho útvaru a na jeho príspevok k momentom zotrvačnosti vzhľadom na súradnicové osi. Z Pytagorovej vety dostávame:

$$\Delta I_x = \Delta m y^2$$

$$\Delta I_y = \Delta m x^2$$

$$\Delta I_z = \Delta m (x^2 + y^2) = \Delta I_x + \Delta I_y$$

Keďže celkový moment zotrvačnosti je súčtom takýchto čiastkových, na úrovni celého telesa dostávame:

$$I_z = I_x + I_y$$

Aplikujme to na našu tenkú obruč. U tej zo symetrie vieme, že $I_x = I_y =: I_O$, a teda podľa vety o kolmých osiach:

$$I_O = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{2}MR^2,$$

kde $I_z = MR^2$ je známy moment zotrvačnosti obruče okolo osi prechádzajúcej jej stredom a kolmej na rovinu v ktorej leží.

Teraz už vieme určiť hodnotu zachovávajúceho sa momentu hybnosti ako:

$$L = I\omega = 4I_O\omega = 2MR^2\omega$$

Nechajme sa chytiť Ninu a prejsť ju do vzdialenosti r od osi kolotoča (hneď po chytení sa je $r = R$), a pozrime sa na moment hybnosti:

$$2MR^2\omega = I\omega = L = I'(r)\omega'(r),$$

kde $I'(r) = I + mr^2$ je moment zotrvačnosti kolotoča aj s Ninou a $\omega'(r)$ je nová uhlová rýchlosť, ktorú vďaka vyššie napísaného ZZMH vieme hneď vyjadriť ako:

$$\omega'(r) = \frac{L}{I'(r)} = \frac{I}{I + mr^2}\omega = \frac{2M}{2M + m\left(\frac{r}{R}\right)^2}\omega$$

Vidíme, že po dosadení $r = 0$ (Nina sa stíska s osou) je $\omega'(0) = \omega$, a teda kolotoč sa točí tak, ako na začiatku.

Pozrime sa teraz na prácu, ktorú svojím presunom do stredu Nina vykonala. Vieme, že hocaká zmena (mechanickej) energie je platená prácou. Zmena rotačnej energie sústavy počas Nininho presunu z okraja k osi je:

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2}I'(0)\omega'^2(0) - \frac{1}{2}I'(R)\omega'^2(R) = \frac{1}{2}L(\omega'(0) - \omega'(R)) = \frac{mM}{2M + m}R^2\omega^2$$

Netreba však zabudnúť na prácu, ktorú Nina vykonala pri chytení sa, vieme totiž, že tým kolotoč spomalila. Tomu zodpovedá zmena energie:

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2}I'(R)\omega'^2(R) - \frac{1}{2}I\omega^2 = \dots = -\Delta E_1$$

Počas troch bodiek len vojde do hry to, že $I = I'(0)$ a $\omega = \omega'(R)$. Ako vidíme, korektne by celková práca vykonaná Ninou mala byť $W = 0$. To znie trochu podozrivo, veď predsa ak sa spýtame Niny v strede, či má pocit, že dačo robila, pravdepodobne by povedala že hej, a ak sa nám to nezdá, môže spraviť ešte o kus viac. Tento rozdiel vzniká v tom, že to čo cíti Nina ($W_N = \Delta E_1$) je práca, ktorú vykonali jej svaly. To, že keď nasadala na kolotoč pričom ju trochu zohriala nepružná zrážka s obručou a dodala jej trochu kinetickej energie jej svaly oddýchnutosťou nenabije. Uznávané teda boli oba výsledky, aj 0, aj $\frac{mM}{2M+m}R^2\omega^2$.