

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

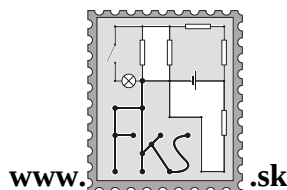
vzorové riešenia 2. série

B – kategória (mladší)

23. ročník

letný semester

školský rok 2007/2008



FKS, KTFDF FMFI UK

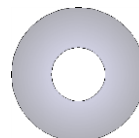
Mlynská dolina

842 48 Bratislava

otazky@fks.sk

B-2.1 Kruh (vzorák Tomáš)

Je známe, že zahrievaním sa väčšina materiálov roztahuje. Napríklad koľajnice musia mať v sebe pravidelné medzery, inak by sa v lete mohli „pokrčiť“. Čo však, keď z tenkého plechu vyrežeme kruh, ktorý má vo svojom strede otvor? Čo sa stane s veľkosťou otvoru, keď plech zahrejeme? Zväčší sa, alebo sa zmenší?



Pri zahriatí sa všetky rozmery predmetu natiahnu k -krát ($k > 1$, keďže kruh sa zväčšuje). To znamená, že vzdialenosť ľubovoľných dvoch bodov sa zväčší k -násobne. Alebo, inými slovami, roztiahnutím dostávame útvar podobný s pôvodným s koeficientom podobnosti k .

Prečo je to práve tak? Tu je dobré zamyslieť sa nad tým, ako taký plech (ale vlastne aj hocikaká iná podobná pevná látka) vlastne funguje. Za týmto účelom si plech predstavíme ako veľa malých hmotných bodov, pričom každý sa drží so susednými pomocou akýchsi paličiek (väzieb), ktoré pri izbovej teplote majú istú dĺžku. Takýto model hmoty, čo ako triviálny, je dobrý na kopec vecí – od numerických simulácií až po nasledujúcu úvahu: Čo ak si všetky väzby (paličky) v istom okamihu povedia, že by rady boli k -krát dlhšie? Túto požiadavku im vie zabezpečiť (iba) útvar, ktorý je presne podobný s pôvodným útvarom s koeficientom podobnosti k .

A ako to bude s našim kruhom? Všetky rozmery kruhu sa zväčšia k -krát. Konkrétne aj rozmery jeho vnútorného okraja, čiže rozmery diery, sa zväčšia k -krát. Takže diera sa zväčší. Tiež môžeme použiť názornú predstavu s bodmi a paličkami: keby sa diera v kruhu chcela zmrštiť, tyčky spájajúce body na jej obode by sa nielenže nenatiahli, ale boli by ešte kratšie, ako pri izbovej teplote.

Ospravedlňujem sa za strohý tón vzoráku, môžete si mentálne natiahnuť každý jeho rozmer k -krát, ja sa lúčim s pokrikom somtakýhľadnýžeodsmäduužanineviemakýsomnevyspatýdobrúnoc.

B-2.2 Drevo (opravoval Jakub, vzorák Jakub, predhovor Tomáš)

je ľahšie ako voda, a preto keď ho ponoríme do vody, stúpa nahor (Archimedov zákon). Odkiaľ sa berie energia potrebná na zvýšenie jeho potenciálnej energie?

Tomášov predhovor: Dobrým zvykom, na ktorý bohužiaľ mnoho opravovateľov zabúda, je na začiatok vzoráku aspoň jednou-dvoma vetami zhrnúť pointu príkladu – ak to ide. Následne sa čitateľ naladí na tú správnu „vlnovú dĺžku“ a je lepšie schopný vstrebať technické detaily a vzorce, ktoré ho čakajú neskôr. Keďže sám som zástancom tejto metódy vysvetľovania, tak si hned odpovedzme, odkiaľže to berie drevo potenciálnu energiu? Samozrejme, keď drevený objekt ponorený vo vode stúpne, na jeho miesto sa dostane voda, ktorá tam pripláva (ako keby) z povrchu vodnej hladiny. Tým pádom je to „niečo za niečo“ – drevo ide hore, voda dole. A že celkovo sa pri tomto deji naozaj energia sústavy znižuje a to až do okamihu, keď sa drevo ustáli na hladine presne tak, ako predpovedá Archimedov zákon, to už bude náplňou ďalších častí vzoráku.

Vzorák: V celom vzoráku budem uvažovať, že povrch vody je veľmi rozsiahly – dosť na to, aby sa pri ponáraní telesa významne nemenila výška jeho hladiny. Vztlakovú silu vo

vzduchu nebudem uvažovať. Hmotnosť mysleneho ponáraného telesa označím m a jeho objem V . Potom jeho priemerná hustota je $\rho = m/V$. Hustotu vody označím ρ_0 .

Vieme, že teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované vztlakovou silou. Táto sila pôsobí na ponorené teleso koná pri jeho vynáraní prácu, lebo pôsobí v smere uvažovaného posunutia nahor. To ale znamená, že teleso má potenciálnu energiu (vďaka svojej polohe je schopné konať prácu) za vztlakovú silu. Označím ju E_{vz} . Okrem toho má samozrejme aj potenciálnu energiu v tiažovom poli $E_G = mgh$. Celková potenciálna energia telesa je daná súčtom týchto dvoch energií, čiže $E_p = E_G + E_{vz}$. Zrejme sa teda energia potrebná na zvýšenie ťažiska ponáraného telesa bude brať práve z energie skrytej vo vztlaku.

Vztlaková sila je konštrukcia, ktorá nám umožňuje zabudnúť na hydrostatický tlak spôsobený tiažou vlastnej kvapaliny, do ktorej je teleso ponorené. Teraz bude pre nás veľmi osožné vrátiť sa k pôvodnému konceptu, v ktorej pôsobí len tiažová sila a ňou vyvolaný hydrostatický tlak. Bedlivými očami preskúmame, čo sa deje v sústave kvapalina + ponárané teleso. Ak sa zameriame na celkovú zmenu tiažovej potenciálnej energie tejto sústavy (v ktorej je zahrnutá aj vytlačaná kvapalina), tak by sme mali dospieť k rovnakému výsledku, ako keby sme poctivo zráтали $E_p = E_G + E_{vz}$.¹ To znamená, že namiesto energie E_{vz} môžem uvažovať zmenu potenciálnej tiažovej energie $\Delta E_{G,voda}$ vytlačenej vody.

Ak by som z vody vynoril teleso ponorené objemom V' , tak by voda vytlačená na povrch zaplavila objem pôvodne okupovaný telesom (**obr.**). Ak h' je hĺbka ťažiska kvapalného telesa, ktoré vyplní priestor uvoľnený telesom, tak potenciálna energia kvapaliny klesne o $\Delta E_{G,voda} = V'\rho_0gh'$. Odtiaľ dostaneme vzťah

$$E_{vz} = \Delta E_{G,voda} = V'\rho_0gh'.$$

Na hranole s podstavou s plochou S orientovanou vodorovne a výškou H si demonštrujeme, ako to funguje. Rozoberieme najprv prípad, keď je celý hranol ponorený vo vode (**obr.**). Potom pri vynorení o Δh stúpne potenciálna energia telesa o

$$mg\Delta h = V\rho g\Delta h$$

a potenciálna energia vody klesne o

$$(S\Delta h)\rho_0gH = (SH)\rho_0g\Delta h = V\rho_0g\Delta h.$$

Takže celková zmena potenciálnej energie bude

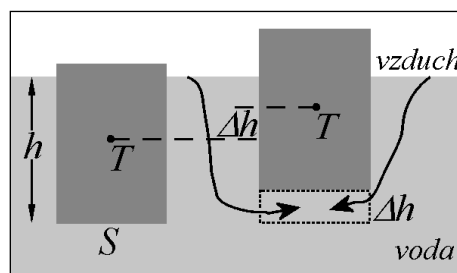
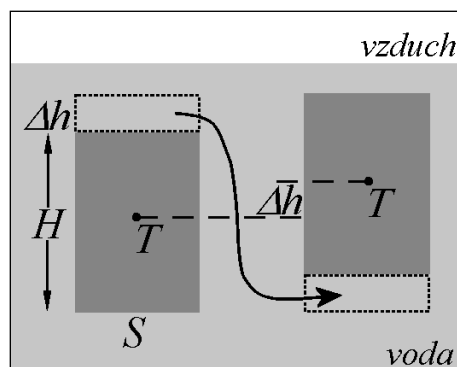
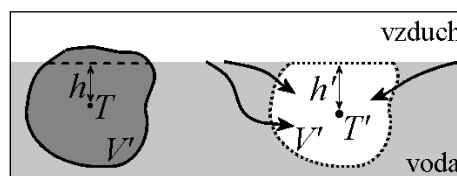
$$\Delta E_{celk} = V(\rho - \rho_0)g\Delta h,$$

odkiaľ už hneď vidíme, že ak je hustota vody ρ_0 väčšia ako priemerná hustota ρ telesa, tak bude celková energia sústavy pri vynáraní klesať.

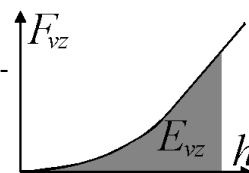
Ak hranol pláva na hladine a jeho spodná podstava sa nachádza v hĺbke h pod hladinou (**obr.**), tak vynorením telesa o Δh (nech je to maličká hodnota oproti h) opäť stúpne potenciálna energia telesa o $mg\Delta h$. Potenciálna energia vody klesne o

$$(S\Delta h)\rho_0g(h - \Delta h/2) \approx (S\Delta h)\rho_0gh = (Sh)\rho_0g\Delta h = V'\rho_0g\Delta h.$$

Takže celková zmena potenciálnej energie pri vynorení o Δh oveľa menšie ako h je $\Delta E_{celk} = (m - V'\rho_0)g\Delta h$. Z toho vidíme, že potenciálna energia bude pri vynáraní telesa klesať dovtedy, kým sa hmotnosť vytlačenej vody $V'\rho_0$ nebude rovnáť hmotnosti telesa m . Potom bude rásť.



¹ Vyjadriť E_{vz} znamená určiť prácu, ktorú vykoná vztlaková sila pri vynorení telesa von z kvapaliny. To nie je celkom triviálny výpočet, lebo veľkosť vztlakovej sily sa pri vynáraní telesa nad hladinu mení v závislosti od objemu ponorenej časti. E_{vz} je vo všeobecnosti plocha pod grafom závislosti F_{vz} od h , vid' **obr.**

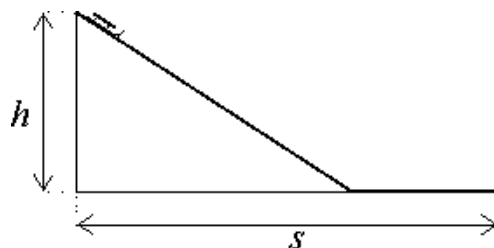


Zlatým klincom je teda skutočnosť, že potenciálna energia celej sústavy je najnižšia práve vtedy, keď hmotnosť vytlačenej vody je rovná hmotnosti telesa m , čiže vtedy, keď sú vztlaková a tiažová sila v rovnováhe. Tým sme potvrdili známy fakt, že teleso sa snaží zaujať energeticky najvýhodnejšiu polohu.²

Hodnotenie: 3 body dostal človek za to, že správne určil pôvod energie, t.j. že teleso má dodatočnú potenciálnu energiu vyplývajúcu z existencie vztlakovej sily, resp. že vo vytlačenej vode je uložená energia. Zvyšné 2 body sa dali dostať za to, že riešiteľ ukázal, že tej energie je dosť. A zdravím *Piešťanské kvarteto* s tým, že potenciálna energia skutočne môže mať zápornú hodnotu. Záleží to od umiestnenia nulovej hladiny. Potenciálna energia a napätie sú totiž rôzne pojmy!

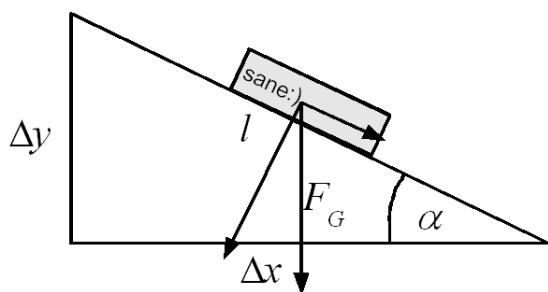
B-2.3 Sánky (5 bodov) (opravoval Bzdušo)

René vytrel svoje sánky na kopec (naklonenú rovinu) do výšky h . „Kone moje hyjé,“ zareval a spustil sa dolu. Jeho sánky zastali na rovine vo vodorovnej vzdialenosti s od miesta, z ktorého sa pustil. Za predpokladu, že koeficient trenia f medzi sánkami a svahom je stále rovnaký a v okamihu prechodu zo svahu na vodorovnú rovinu sa nestráca žiadna pohybová energia, dokážte, že platí $f = h/s$.



Na prvý pohľad trochu zvláštne zadanie. Veď je v ňom priamo uvedený výsledok. Nie je preto divu, že aj vám väčšinou naozaj vyšlo $f = h/s$. Pamätajte však, že opravovateľ odhalí, či váš postup je, alebo nie je správny.³ Dobrý opravovateľ dokonca odhalí, či svojmu riešeniu naozaj rozumiete. Toto vzorové riešenie je, samozrejme, správne. Určite si ho prečítajte, najmä v prípade, že som vám do riešenia napísal nejaké nekalé poznámky a stíhal body.

Všimnime si, že zadanie nevraví nič o sklone kopca. S určitosťou z neho vieme vyčítať, že $\tan \alpha > h/s$, ale tam naše poznatky o ňom končia. Čo môžeme spraviť, je uvažovať všeobecný uhol sklonu α spĺňajúci našu podmienku a dúfať, že výsledok na ňom nebude závisieť.



Uvažujme teraz posunutie o l dolu kopcom so sklonom α (obrázok vľavo). Pôsobí nám tiažová sila $F_G = mg$, kde m je hmotnosť Reného so sánkami. Ako sme už zvyknutí, rozložíme si túto silu do dvoch zložiek smerujúcich kolmo na podložku, resp. pozdĺž nej. Pri klasickom označení:

$$F_N = mg \cos \alpha$$

$$F_p = mg \sin \alpha$$

Tretia sila, ktorá na sane pôsobí, je pri šmýkaní daná vzťahom $F_T = fF_N = mgf \cos \alpha$ a nie je zakreslená v inak prehľadnom obrázku. Zrejme nám uberá energiu. Koľko, to zistíme použitím vzťahu pre prácu:⁴

$$W = -F_T l = -mgfl \cos \alpha$$

² Alebo, lepšie povedané, vychádzajúc z úvah o energii sme potvrdili známy Archimedov zákon.

³ Bežne sa stáva, že človek vedome či nevedome spraví dve chyby, ktorých účinky sa navzájom nenápadne vybičujú a dosiahnutý výsledok je správny. V Príručke mladých fyzikov nájdete na túto tému rozpracovanú esej, bezprostredne nasledovanú esejami na tému „Je lepšie používať mäkkú alebo tvrdú kefku na zuby?“ resp. „Myslím, že nie som, teda som.“

⁴ Práca, ktorú konajú sily na pohybujúcom sa telese, počítame vzťahom $W = F \cdot s \cdot \cos \angle \vec{F}, \vec{s}$, kde to étericky pôsobiace brucho kosínusu je uhol medzi smerom pôsobiacej sily a smerom pohybu. V našom prípade tretia sila pôsobí proti smeru pohybu telesa a teda zvieraný uhol je -180° . Kosínus tohto uhlu je -1 , čo vysvetľuje znamienko mínus vo vzťahu pre prácu tretej sily.

Ak si teraz šikovým okom všimnime, že $l \cos \alpha$ je vlastne vodorovné posunutie Δx (prvý obrázok), tak dostávame pre prácu vzťah $W = -mgf\Delta x$. Tu sa už črtá niečo s tým, že na uhle sklonu nezávisí. Konkrétne vidíme, že ak sa šmýkame po kopci s hocíjakým konštantným sklonom, tak energia, ktorú sme stratili kvôli treniu je priamo úmerná len posunutiu vo vodorovnom smere, prostredníctvom vzťahu

$$W = -mgf\Delta x.$$

V našom prípade si môžeme pohyb sánok rozdeliť na dve časti: Pohyb na kopci a pohyb na rovinke až do zastavenia. Ak si rovinku predstavíme ako kopec s uhlom sklonu $\alpha = 0$, tak prichádzame k záveru, že aj tu bude práca trenia určená rovnakým vzťahom. Ak si rozdelíme celkovú vodorovnú dráhu s na $s_1 + s_2$, ako na druhom obrázku, tak celková práca vykonaná trením bude:

$$W_T = -mgfs_1 - mgfs_2 = -mgf(s_1 + s_2) = -mgfs.$$

Pri prechode z kopca na rovinku sa podľa zadania energia nestráca, takže je to všetka stratená energia. V okamihu zastavenia zrejme energia, ktorú sme stratili trením je rovná úbytku potenciálnej energie, preto:

$$mgh - mgfs = 0$$

Odtiaľ jednoduchou úpravou získame $f = h/s$. Takže to naozaj platí.

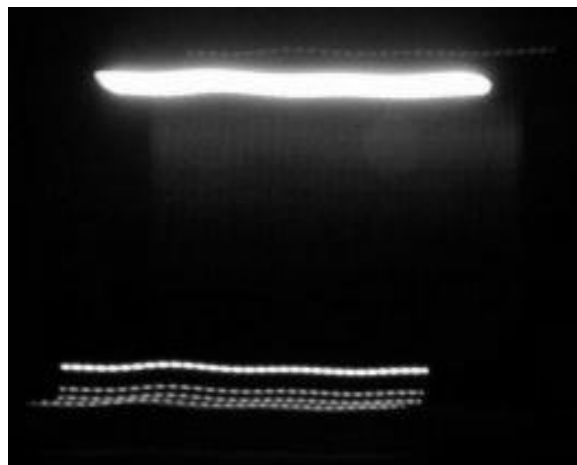
Samozrejme, toto nebolo jediné správne riešenie. Je však veľmi šikovné. V súvislosti s ním tu mám navyše drobnú výzvu pre koumákov: Platil by podľa vás dokazovaný vzťah, aj keby mal kopec viacej etáp s rôznym sklonom? A čo pre rôzne zakrivený kopec, kde neexistuje poriadne rovný úsek, ale všetko je akosi „oblé“? Porozmýšľajte, ako súvisí dodatočná poznámka o nestrácaní energie pri prechode z kopca na rovinku s odstredivou silou.

B-2.4 Blik B (opravoval Maťo, vzorák Robo)

Predstavte si rodinnú atmosféru, rozprestretý obrus, strieborný príbor a bravčové karé. A zrazu....Crrr a dcéra kráča ku dverám. No nazdar, stará mama, prejdi, čo sa robí? Pre Kristove rany neuveríte, až teraz som si všimla, máme na ulici takú tú žltú sodíkovú výbojku a tá síce svieti, ale to sa len pomalému oku zdá, pretože v skutočnosti bliká s frekvenciou f . A mne sa f podarilo zmerať len použitím zastaraného digitálneho fotoaparátu a stopiek.

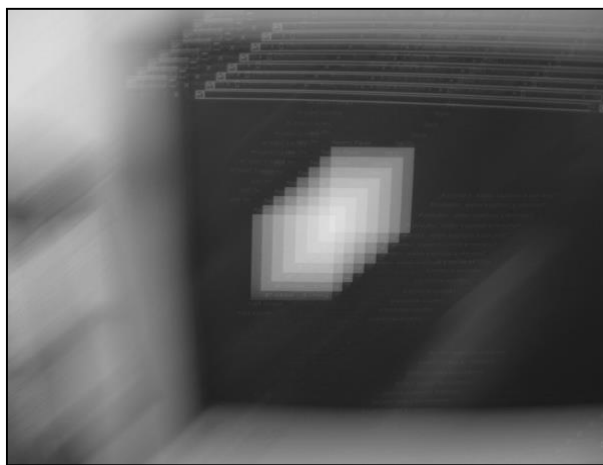
Skúste to aj vy! Pokiaľ pri riešení fotoaparát skutočne využijete, všetok fotografický materiál, ktorý vyprodukuje a pri riešení využijete, treba (vytlačný, nie nutne vo farbe) poslať spolu s riešením. Ak vo vašom okolí nie sú sodíkové výbojky (to je také to úplne najklasickejšie pouličné osvetlenie), môžete namiesto nich merať frekvenciu blikania klasického (nie LCD) monitoru.

Čaute blikáči. Úvodom Vás chcem pochváliť za všetky pekné fotografie, ktoré ste priložili k riešeniam. Aj vďaka nim vznikol tento vzorák ☺. Po slovách chvály poďme na vec. Na istom stupni zovšeobecnenia možno tvrdiť, že ste všetci použili rovnaký prístup, len s rôznym stupňom estetickej výsledku a na rôznom experimentálnom materiáli (výbojka, monitor, dokonca i LED dióda na predlžovačke). Pointou je, že pri fotení foťákom pohneme. Takto sa fotografovaný vzor (pokiaľ je blikajúci) zobrazí ako séria viacerých obrazov, pričom každý zodpovedá jednému „bliknutiu“ vzoru. Ak poznáme expozičnú dobu fotografie t (pri digitálnych fotoaparátoch zistiteľná softvérovo) a pohybujeme záberom, v ktorom sa nachádza „bodka“ reprezentujúca vzdialenú výbojku, z počtu bodiek na fotografii N je možné zistiť frekvenciu výbojky ako N/t . Z mnohých vašich záberov vyberám dva od Filipa Kubinu (expozičná doba $1/3$ s, frekvencia výbojok 93- 96 Hz, čiary z bodiek zodpovedajú viacerým výbojkám zachytených v jednom zábere):

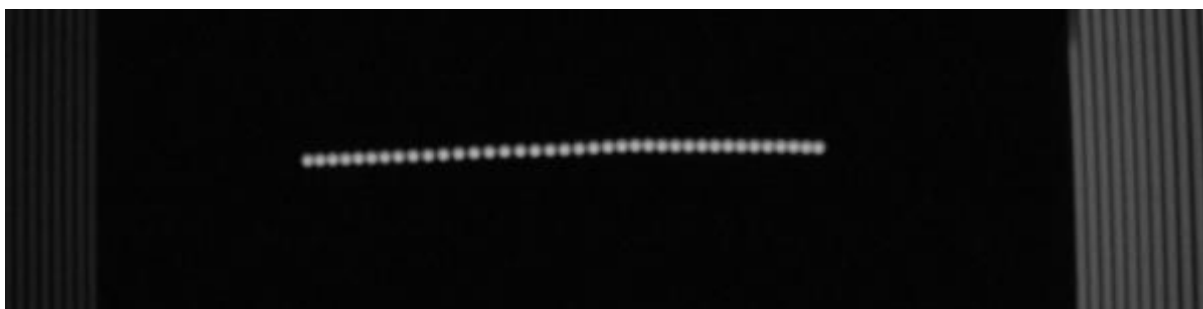


Čo ak máme foťák, pri ktorom expozičnú dobu nevieme zistiť? Nevadí, pomôžu nám stopky. Ak rozkrútime foťák tak, aby lampa vytvorila na fotke kruh, pričom zabezpečíme, aby sme krútili aspoň zhruba rovnomerne, napríklad jednu otáčku za sekundu, z výsledného obrázka nie je výslednú frekvenciu problém určiť. Samozrejme, chce to trochu cviku a výsledok nie je až tak presný.

Pri monitore na zábere neuvidíme sekvenciu „bodiek“, ale sekvenciu obrazov z obrazovky, v ktorom môže byť ťažšie odčítať počet obrazoviek. Nespornou výhodou monitoru je známa a nastaviteľná frekvencia monitora, čo nám umožňuje „odfotenú“ hodnotu frekvencie porovnať s nastavenou. Do vzoráku vyberám fotky z riešenia Michala Petrucha (vľavo expozičný čas 1/10 s, vpravo 1/20 s, odtiaľ frekvencia monitora 75 Hz)



Nakoniec si prihrejeme polievočku aj my, opravovatelia. Prečo sa trápiť s odčítavaním počtu obrazoviek, keď rovnaký výsledok získame aj fotografovaním bielej bodky na čiernom pozadí monitoru? Ajhľa, Mat'ov výtvor:



Na zábere sa nachádza 38 bodiek pri expozičnom čase 0,5 s. Chyba merania je ± 1 bodka, teda frekvencia je $76\text{Hz} \pm 2\text{Hz}$. Monitor bol nastavený na frekvenciu 75 Hz ;-)

Na záver chcem podotknúť, že ľudia, ktorí zmerali frekvenciu blikania monitora využívajú fakt, že monitor vlastne neblinká, ale sa periodicky prekresľuje odhora nadol, nedostali plný počet bodov. Totiž, keď si poriadne prečítate úlohu, monitor tam slúži len ako náhrada za výbojku – aby ste nemuseli behať po celom meste ako tubasi zháňajúc oranžové žiže. Ak teda vymyslíte riešenie, ktoré funguje LEN pre monitory... A na úplný záver: po prvé, neverte každému „číslu“, ku ktorému sa experimentovaním dopracujete, ale porovnajte ho s teoretickými úvahami a známymi poznatkami. Aplikované na túto úlohu, ak zistíte, že frekvencia monitora je 3 Hz, tak buď máte divný monitor, alebo, čo je pravdepodobnejšie, ste použili nevhodný spôsob merania. Po druhé, určená chyba merania je vec, ktorá vám pridá nielen body, ale aj status vzorného experimentátora.

Experimentovaniu zdar!

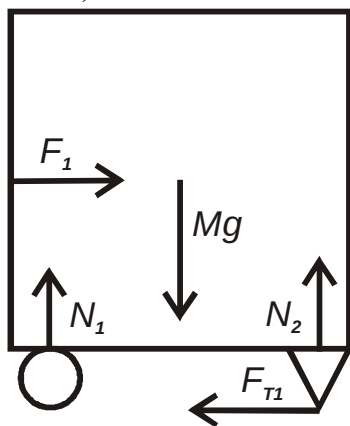
Poznámočka: Špeciálna vďaka patrí piešťanským dievčatám, ktoré nám poslali krásnu fotodokumentáciu pre istotu v dvoch identických kópiách. Ďakujeme.

B-2.5 Kubusov kontajner (opravovala Janka, vzorák Marcelka)

Kubas našiel na parkovisku plný kontajner tvaru kocky. Tento kontajner mal na ľavom boku kolieska, na pravom obyčajné nožičky. Kubas zistil, že ak na kontajner tlačí v strede ľavej steny, potrebuje na jeho pohnutie silu F_1 , ak tlačí sprava (stále v strede steny), potrebuje silu F_2 . Aký ťažký je kontajner? Kolieska sa po zemi pohybujú bez trenia, nožičky trú s neznámym koeficientom trenia f .

Opäť tu máme príklad, kde je vašou hlavnou úlohou správne si nakresliť sily, ktoré na kontajner pôsobia. Poďme sa do toho teda pustiť.

Najprv zatlačme na kontajner zľava, ale nie veľmi, aby sa kontajner neposunul. Samozrejme, keďže tlačíme na kontajner, pôsobíme naň silou F_1 . Kontajner je priťahovaný k zemi silou Mg , kde M je jeho hmotnosť. Proti týmto silám pôsobia sily od podložky (naľavo, v mieste kolieska a napravo, v mieste nožičky) a tretia sila (v mieste nožičky).



Predstavme si, že sila F_1 je akurát taká, že sa kontajner už už pohne. To znamená, že ak zatlačíme len o kúsok viac, kontajner sa posunie alebo otočí. Zapišme si rovnice pre tento stav:

Rovnováha síl v horizontálnom a vertikálnom smere:

$$F_1 = F_{T1}$$

$$Mg = N_1 + N_2$$

Rovnováha momentov síl so stredom otáčania v mieste nožičky (dĺžku hrany kocky označíme a):

$$\frac{a}{2} F_1 + a N_1 = \frac{a}{2} Mg^5$$

Môžu nastať dva prípady: kontajner sa posunie, alebo otočí. Od toho závisia ďalšie rovnice, ktoré situáciu popisujú. Ak sa kontajner posunie, dostaneme ešte rovnicu pre tretiu silu:

$$F_{T1} = f N_2$$

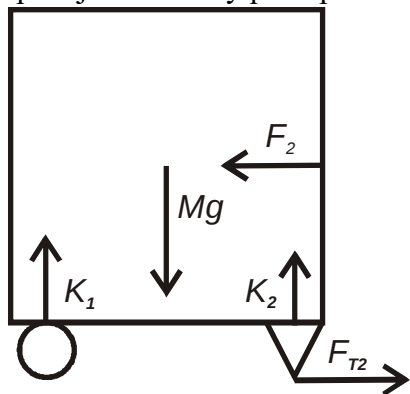
Ako vieme, že nadobúda svoju maximálnu hodnotu? Odpoveď je jednoduchá: zapisujeme rovnice pre stav, kedy stačí o máličko zväčšiť silu F_1 a kontajner sa posunie. To znamená, že sila F_{T1} už nemôže byť väčšia, ako je teraz.

Úpravou týchto rovníc sa vieme dopracovať k rovnici, kde ako neznáme vystupujú iba koeficient trenia f a hmotnosť kontajnera M :

$$F_1 = \frac{f}{2} (Mg + F_1)$$

⁵ Spomeňte si, že moment sily vzhľadom na nejaký bod je daný ako „veľkosť sily“ krát „rameno sily vzhľadom na daný bod“. Ak sa kontajner neotáča, musí byť celkový moment sily vzhľadom na ľubovoľný bod nulový.

Otáčanie kontajnera vyriešime až nakoniec. Teraz pre zmenu zatlačme na kontajner sprava. Zopakujeme ten istý postup – obrázok a rovnice.



Rovnováha síl v horizontálnom a vertikálnom smere:

$$F_2 = F_{T2}$$

$$Mg = K_1 + K_2$$

Rovnováha momentov síl so stredom otáčania v mieste nožičky:

$$aK_1 = \frac{a}{2}Mg + \frac{a}{2}F_2$$

Všimnite si, že teraz sa kontajner môže iba posunúť. Je to intuitívne – medzi kolieskom a podložkou nie je trenie, teda by sa nemal o čo „zaprieť“. Dostávame teda ešte rovnicu pre treciu silu:

$$F_{T2} = fK_2$$

Úpravou rovníc dostávame:

$$F_2 = \frac{f}{2}(Mg - F_2)$$

Získali sme sústavu dvoch rovníc s neznámymi M a f . Ich riešením dostávame hmotnosť kontajnera:

$$M = \frac{2F_1F_2}{g(F_1 - F_2)}$$

Vráťme sa k tlačeniu na kontajner zľava a položíme si otázku: čo ak sa kontajner otočí? V takom prípade trecia sila nemusí nadobudnúť svoju maximálnu hodnotu, takže o nej vieme povedať iba to, že je zhora ohraničená veľkosťou fN_2 . Našťastie však získavame novú rovnicu. Ak sa má kontajner už-už začať otáčať, koliesko a podložka na seba už nemôžu pôsobiť silami:

$$N_1 = 0$$

Použitím rovnice pre rovnováhu momentov síl v hraničnom prípade potom dostávame:

$$M = \frac{F_1}{g}$$

Ešte sa treba zamyslieť, kedy sa kontajner začne otáčať a kedy posúvať. Všimnite si, že s rastúcou silou F_1 sila N_1 klesá a sila F_{T1} rastie. Rovnováha sa poruší, ak F_{T1} dosiahne hranicu fN_2 , alebo ak sila N_1 klesne na nulu. Podľa toho, čo sa stane skôr, sa kontajner otočí, alebo posunie. Hranica bude tam, kde obe situácie nastanú naraz. Ak do našej sústavy troch rovníc (pre rovnováhu síl a momentov síl) dosadíme $F_{T1} = fN_2$ a $N_1 = 0$, dostaneme $f = 1$. Pre menšie koeficienty trenia sa kontajner posunie, pre väčšie sa otočí.

Tí z vás, ktorí príklad vyriešili s tým, že neuvažovali o otáčaní kontajnera, dostali 4,5 bodu. Zvláštnu pozornosť si zasluhujú dievčatá z Piešťan, ktoré sa kamarátsky podelili o svoje body – každá dostala tretinu.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

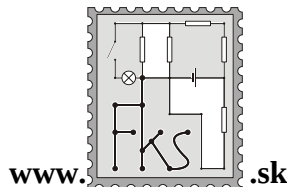
vzorové riešenia 2. série

A – kategória (starší)

23. ročník

letný semester

školský rok 2007/2008



FKS, KTFDF FMFI UK

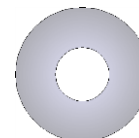
Mlynská dolina

842 48 Bratislava

otazky@fks.sk

A-2.1 Kruh (vzorák Tomáš)

Je známe, že zahrievaním sa väčšina materiálov roztahuje. Napríklad koľajnice musia mať v sebe pravidelné medzery, inak by sa v lete mohli „pokrčiť“. Čo však, keď z tenkého plechu vyrežeme kruh, ktorý má vo svojom strede otvor? Čo sa stane s veľkosťou otvoru, keď plech zahrejeme? Zväčší sa, alebo sa zmenší?



Pri zahriatí sa všetky rozmery predmetu natiahnu k -krát ($k > 1$, keďže kruh sa zväčšuje). To znamená, že vzdialenosť ľubovoľných dvoch bodov sa zväčší k -násobne. Alebo, inými slovami, roztiahnutím dostávame útvar podobný s pôvodným s koeficientom podobnosti k .

Prečo je to práve tak? Tu je dobré zamyslieť sa nad tým, ako taký plech (ale vlastne aj hociká iná podobná pevná látka) vlastne funguje. Za týmto účelom si plech predstavíme ako veľa malých hmotných bodov, pričom každý sa drží so susednými pomocou akýchsi paličiek (väzieb), ktoré pri izbovej teplote majú istú dĺžku. Takýto model hmoty, čo ako triviálny, je dobrý na kopec vecí – od numerických simulácií až po nasledujúcu úvahu: Čo ak si všetky väzby (paličky) v istom okamihu povedia, že by rady boli k -krát dlhšie? Túto požiadavku im vie zabezpečiť (iba) útvar, ktorý je presne podobný s pôvodným útvarom s koeficientom podobnosti k .

A ako to bude s našim kruhom? Všetky rozmery kruhu sa zväčšia k -krát. Konkrétne aj rozmery jeho vnútorného okraja, čiže rozmery diery, sa zväčšia k -krát. Takže diera sa zväčší. Tiež môžeme použiť názornú predstavu s bodmi a paličkami: keby sa diera v kruhu chcela zmrštiť, tyčky spájajúce body na jej obode by sa nielenže nenatiahli, ale boli by ešte kratšie, ako pri izbovej teplote.

Ospravedlňujem sa za strohý tón vzoráku, môžete si mentálne natiahnuť každý jeho rozmer k -krát, ja sa lúčim s pokrikom somtakýhľadnýžeodsmäduužanineviemakýsomnevyspatýdobrúnoc.

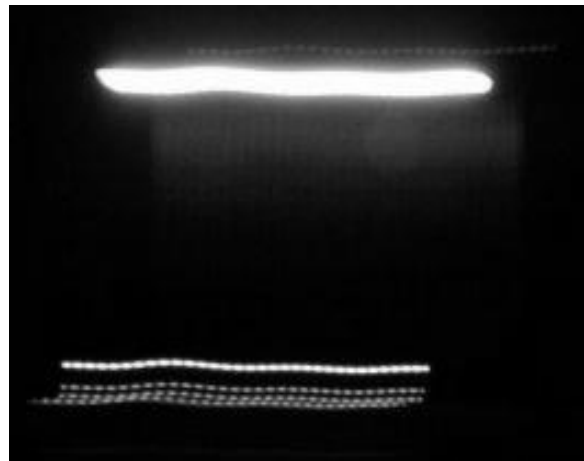
A-2.2 Blik (vzorák Robo)

Predstavte si rodinnú atmosféru, rozprestretý obruš, strieborný príbor a bravčové karé. A zrazu....Crrr a dcéra kráča ku dverám. No nazdar, stará mama, prejde, čo sa robí? Pre Kristove rany neuveríte, až teraz som si všimla, máme na ulici takú tú žltú sodíkovú výbojku a tá síce svieti, ale to sa len pomalému oku zdá, pretože v skutočnosti bliká s frekvenciou f . A mne sa f podarilo zmerať len použitím zastaraného digitálneho fotoaparátu a stopiek.

Skúste to aj vy! Pokiaľ pri riešení fotoaparát skutočne využijete, všetok fotografický materiál, ktorý vyprodukuje a pri riešení využijete, treba (vytlačení, nie nutne vo farbe) poslať spolu s riešením. Ak vo vašom okolí nie sú sodíkové výbojky (to je také to úplne najklasickejšie pouličné osvetlenie), môžete namiesto nich merať frekvenciu blikania klasického (nie LCD) monitoru.

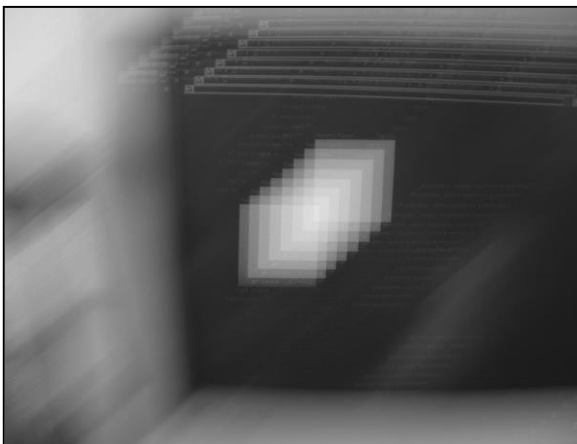
Čaute blikáči. Úvodom Vás chcem pochváliť za všetky pekné fotografie, ktoré ste priložili k riešeniam. Aj vďaka nim vznikol tento vzorák ☺. Po slovách chvály poďme na vec. Na istom stupni zovšeobecnenia možno tvrdiť, že ste všetci použili rovnaký prístup, len s rôznym stupňom esteticnosti výsledku a na rôznom experimentálnom materiáli (výbojka, monitor, dokonca i LED dióda na predĺžovačke). Pointou je, že pri fotení foťákom pohneme. Takto sa fotografovaný vzor (pokiaľ je blikajúci) zobrazí ako séria viacerých obrazov, pričom každý zodpovedá jednému „bliknutiu“ vzoru. Ak poznáme expozičnú dobu fotografie t (pri digitálnych fotoaparátoch zistiteľná softvérovo) a pohybuje záberom, v ktorom sa

nachádza „bodka“ reprezentujúca vzdialenú výbojku, z počtu bodiek na fotografii N je možné zistiť frekvenciu výbojky ako N/t . Z mnohých vašich záberov vyberám dva od Filipa Kubinu (expozičná doba $1/3$ s, frekvencia výbojok 93- 96 Hz, čiary z bodiek zodpovedajú viacerým výbojkám zachytených v jednom zábere):

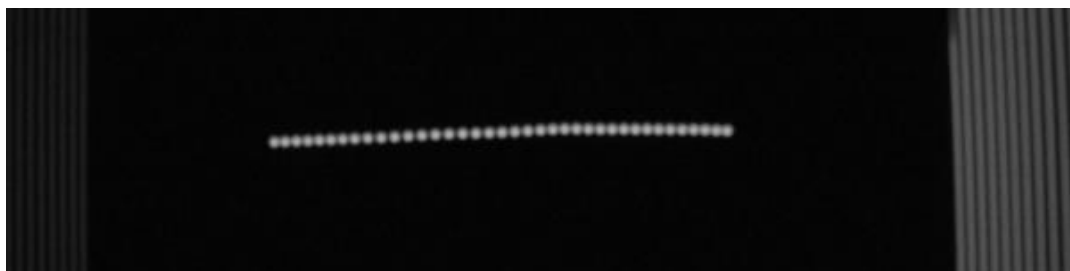


Čo ak máme foťák, pri ktorom expozičnú dobu nevieme zistiť? Nevadí, pomôžu nám stopky. Ak rozkrútime foťák tak, aby lampa vytvorila na fotke kruh, pričom zabezpečíme, aby sme krútili aspoň zhruba rovnomerne, napríklad jednu otáčku za sekundu, z výsledného obrázka nie je výslednú frekvenciu problém určiť. Samozrejme, chce to trochu cviku a výsledok nie je až tak presný.

Pri monitore na zábere nevidíme sekvenciu „bodiek“, ale sekvenciu obrazov z obrazovky, v ktorom môže byť ťažšie odčítať počet obrazoviek. Nespornou výhodou monitoru je známa a nastaviteľná frekvencia monitora, čo nám umožňuje „odfotenú“ hodnotu frekvencie porovnať s nastavenou. Do vzoráku vyberám fotky z riešenia Michala Petrucha (vľavo expozičný čas $1/10$ s, vpravo $1/20$ s, odtiaľ frekvencia monitora 75 Hz)



Nakoniec si prihrejeme polievočku aj my, opravovatelia. Prečo sa trápiť s odčítavaním počtu obrazoviek, keď rovnaký výsledok získame aj fotografovaním bielej bodky na čiernom pozadí monitoru? Ajhľ'a, Maťov výtvor:



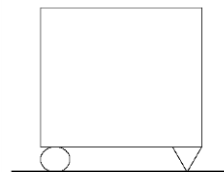
Na zábere sa nachádza 38 bodiek pri expozičnom čase 0,5 s. Chyba merania je ± 1 bodka, teda frekvencia je $76\text{Hz} \pm 2\text{Hz}$. Monitor bol nastavený na frekvenciu 75 Hz ;-)

Na záver chcem podotknúť, že ľudia, ktorí zmerali frekvenciu blikania monitora využijú fakt, že monitor vlastne neblinká, ale sa periodicky prekresľuje odhora nadol, nedostali plný počet bodov. Totiž, keď si poriadne prečítate úlohu, monitor tam slúži len ako náhrada za výbojku – aby ste nemuseli behať po celom meste ako tubasi zháňajúc oranžové žiže. Ak teda vymyslíte riešenie, ktoré funguje LEN pre monitory... A na úplný záver: po prvé, neverte každému „číslu“, ku ktorému sa experimentovaním dopracujete, ale porovnajte ho s teoretickými úvahami a známymi poznatkami. Aplikované na túto úlohu, ak zistíte, že frekvencia monitora je 3 Hz, tak buď máte divný monitor, alebo, čo je pravdepodobnejšie, ste použili nevhodný spôsob merania. Po druhé, určená chyba merania je vec, ktorá vám pridá nielen body, ale aj status vzorného experimentátora.

Experimentovaniu zdar!

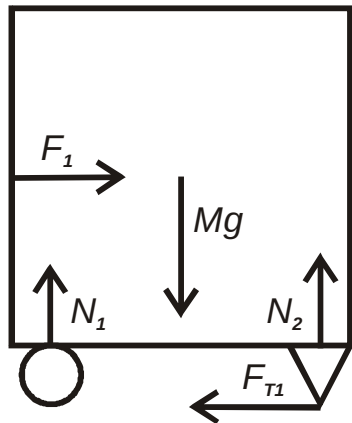
A-2.3 Kubusov kontajner (opravovala Janka, vzorák Marcelka)

Kubas našiel na parkovisku plný kontajner tvaru kocky. Tento kontajner mal na ľavom boku kolieska, na pravom obyčajné nožičky. Kubas zistil, že ak na kontajner tlačí v strede ľavej steny, potrebuje na jeho pohnutie silu F_1 , ak tlačí sprava (stále v strede steny), potrebuje silu F_2 . Aký ťažký je kontajner? Kolieska sa po zemi pohybujú bez trenia, nožičky trú s neznámym koeficientom trenia f .



Opäť tu máme príklad, kde je vašou hlavnou úlohou správne si nakresliť sily, ktoré na kontajner pôsobia. Poďme sa do toho teda pustiť.

Najprv zatlačme na kontajner zľava, ale nie veľmi, aby sa kontajner neposunul. Samozrejme, keďže tlačíme na kontajner, pôsobíme naň silou F_1 . Kontajner je priťahovaný k zemi silou Mg , kde M je jeho hmotnosť. Proti týmto silám pôsobia sily od podložky (naľavo, v mieste kolieska a napravo, v mieste nožičky) a trecia sila (v mieste nožičky).



Predstavme si, že sila F_1 je akurát taká, že sa kontajner už už pohne. To znamená, že ak zatlačíme len o kúsok viac, kontajner sa posunie alebo otočí. Zapišme si rovnice pre tento stav:

Rovnováha síl v horizontálnom a vertikálnom smere:

$$F_1 = F_{T1}$$

$$Mg = N_1 + N_2$$

Rovnováha momentov síl so stredom otáčania v mieste nožičky (dĺžku hrany kocky označíme a):

$$\frac{a}{2} F_1 + a N_1 = \frac{a}{2} Mg^1$$

Môžu nastať dva prípady: kontajner sa posunie, alebo otočí. Od toho závisia ďalšie rovnice, ktoré situáciu popisujú. Ak sa kontajner posunie, dostaneme ešte rovnicu pre treciu silu:

$$F_{T1} = f N_2$$

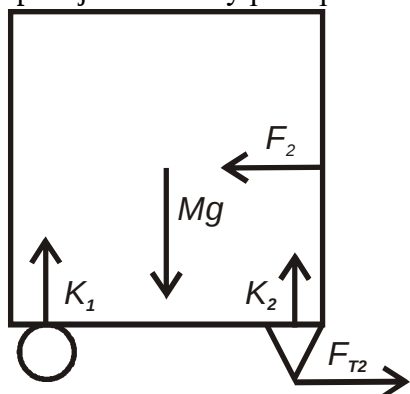
Ako vieme, že nadobúda svoju maximálnu hodnotu? Odpoveď je jednoduchá: zapisujeme rovnice pre stav, kedy stačí o máličko zväčšiť silu F_1 a kontajner sa posunie. To znamená, že sila F_{T1} už nemôže byť väčšia, ako je teraz.

Úpravou týchto rovníc sa vieme dopracovať k rovnici, kde ako neznáme vystupujú iba koeficient trenia f a hmotnosť kontajnera M :

$$F_1 = \frac{f}{2} (Mg + F_1)$$

¹ Spomeňte si, že moment sily vzhľadom na nejaký bod je daný ako „veľkosť sily“ krát „rameno sily vzhľadom na daný bod“. Ak sa kontajner neotáča, musí byť celkový moment sily vzhľadom na ľubovoľný bod nulový.

Otáčanie kontajnera vyriešime až nakoniec. Teraz pre zmenu zatlačme na kontajner sprava. Zopakujeme ten istý postup – obrázok a rovnice.



Rovnováha síl v horizontálnom a vertikálnom smere:

$$F_2 = F_{T2}$$

$$Mg = K_1 + K_2$$

Rovnováha momentov síl so stredom otáčania v mieste nožičky:

$$aK_1 = \frac{a}{2}Mg + \frac{a}{2}F_2$$

Všimnite si, že teraz sa kontajner môže iba posunúť. Je to intuitívne – medzi kolieskom a podložkou nie je trenie, teda by sa nemal o čo „zaprieť“. Dostávame teda ešte rovnicu pre treciu silu:

$$F_{T2} = fK_2$$

Úpravou rovníc dostávame:

$$F_2 = \frac{f}{2}(Mg - F_2)$$

Získali sme sústavu dvoch rovníc s neznámymi M a f . Ich riešením dostávame hmotnosť kontajnera:

$$M = \frac{2F_1F_2}{g(F_1 - F_2)}$$

Vráťme sa k tlačeniu na kontajner zľava a položíme si otázku: čo ak sa kontajner otočí? V takom prípade trecia sila nemusí nadobudnúť svoju maximálnu hodnotu, takže o nej vieme povedať iba to, že je zhora ohraničená veľkosťou fN_2 . Našťastie však získavame novú rovnicu. Ak sa má kontajner už-už začať otáčať, koliesko a podložka na seba už nemôžu pôsobiť silami:

$$N_1 = 0$$

Použitím rovnice pre rovnováhu momentov síl v hraničnom prípade potom dostávame:

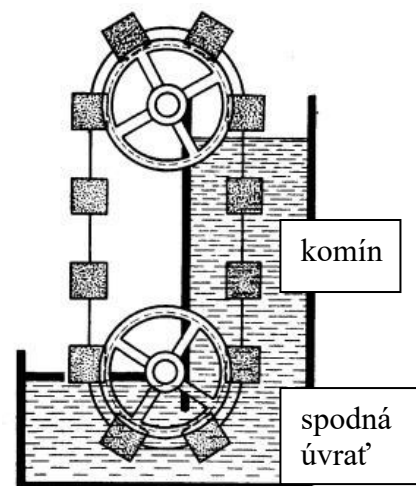
$$M = \frac{F_1}{g}$$

Ešte sa treba zamyslieť, kedy sa kontajner začne otáčať a kedy posúvať. Všimnite si, že s rastúcou silou F_1 sila N_1 klesá a sila F_{T1} rastie. Rovnováha sa poruší, ak F_{T1} dosiahne hranicu fN_2 , alebo ak sila N_1 klesne na nulu. Podľa toho, čo sa stane skôr, sa kontajner otočí, alebo posunie. Hranica bude tam, kde obe situácie nastanú naraz. Ak do našej sústavy troch rovníc (pre rovnováhu síl a momentov síl) dosadíme $F_{T1} = fN_2$ a $N_1 = 0$, dostaneme $f = 1$. Pre menšie koeficienty trenia sa kontajner posunie, pre väčšie sa otočí.

Tí z vás, ktorí príklad vyriešili s tým, že neuvažovali o otáčaní kontajnera, dostali 4,5 bodu.

A-2.4 Samov samochod (opravovala Tinka, vzorák Jakub)

Na obrázku je nakreslený jeden z mnohých patetických pokusov ľudskej rasy o hacknutie prírodných zákonov a zostrojenie prístroja, ktorý vyrába energiu doslova z ničoho. Ako to presne funguje? Jednoducho: Vzduchom naplnené bandasky sú pevne pripevnené na lano. Voda ich nadľahčuje vztlakovou silou, a keďže väčšina bandasiiek sa nachádza vo vysokom komíne vpravo, vztlakové sily spôsobia, že sa lano s bandaskami roztočí proti smeru chodu hodinových ručičiek. Trochu problematický je „vstup“ bandasky do vody vľavo dole, ten však technicky zvládneme napríklad takto: Vodná hladina je za normálnych okolností uzavretá odsunutelnými dvierkami akurát o veľkosti bandasky. Keď sa bandaska priblíži na veľmi malú vzdialenosť, dvierka prudko odskočia do strany a vzniknutý otvor sa v okamihu zapcháva prichádzajúcou bandaskou. Hneď, ako bandaska prejde, dvierka zaskočia na miesto. Nádherná! Prečo to však celé nebude fungovať? Ako by ste vyriešili podobnú úlohu, keby sme namiesto lana s bandaskami použili len samotné lano (z materiálu s menšou hustotou, ako má voda)?



Ách, opäť jedna z tých chabých konštrukcií, ktoré ma ešte tak ako 10-ročného dokázali zaujať. Neskôr som totiž akosi intuitívne začal chápať, že mi nikto v živote nič nedá zadarmo ☹. Romantické čaro všemožných perpetuum mobile ochablo. Ostal po nich iba prechavý závan dômyselných bludov snílkov mnohých období.

Kameň úrazu tkvie samozrejme v tom, že keď bandaska vchádza inteligentnými dvierkami² tak na ňu pôsobí voda kvôli hydrostatickému tlaku smerom nahor a to **oveľa väčšou silou, ako by sa na prvý pohľad zdalo**. Normálne totiž tlak vo vode tesne pod dvierkami nie je atmosférický, ale voda sa vcelku silno tlačí von. No a bandaska sa musí vtlačiť dnu proti tomuto tlaku!

Tým sme našli zádrhel, o ktorom sa ešte musíme presvedčiť, že potopí funkčnosť tohoto samochodu aj kvantitatívne.

Kvôli jednoduchosti budem predpokladať, že bandasky sú umiestnené v rovnakých rozostupoch.³ Potom je jasné, že tiažová sila pôsobiaca na bandasky nemôže za otočenie o 1 bandasku poskytnúť žiadnu prácu. To je zrejme, lebo situáciu bude pred a po otočení úplne zhodná, teda polohová energia sústavy v tiažovom poli sa nezmenila.⁴ Taktiež vztlaková sila pôsobiaca na bandasky, resp. ich časti nachádzajúce sa v spodnom oblúku dolného kolesa, t.j. pod úrovňou dvierok, bude mať v priemere nulový účinok. Lebo ak aj existuje situácia, keď vztlakové sily spôsobujú moment sily na lano v kladnom/zápornom zmysle, tak existuje situácia zrkadlovo symetrická podľa zvislej osi, keď vztlakové sily spôsobujú presne rovnaký moment sily, ale v opačnom zmysle.

Ostáva nám účinok hydrostatického tlaku v komíne a v dvierkach. Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že bandasky sú veľmi maličké v porovnaní s výškou komína vpravo, ktorú označíme h . Zrátajme teraz, koľko energie nám jedna bandaska pri stúpaní komínom dá: vztlaková sila $V\rho g$ pôsobí na dráhe h , teda $W_1 = V\rho gh$. Na druhej strane, do bandasky musím zainvestovať prácu W_2 , aby som ju dostal cez našu „Stargate“ dovnútra. Ak výška bandasky je H a jej prierez S , musím pri „vtlačaní“ pôsobiť silou $Sh\rho g$ na dráhe H . Toto nám dáva prácu $W_2 = -SH\rho gh = -W_1$. A už sme doma! Jedna bandaska spraví dokopy nič, n bandasiiek spraví n ničov.

Oki, bandasky nám nepomôžu. Pomôže nám lano? Nie! To je rovnaká pesnička. Nikto vám nič nedá zadarmo, ani len tie body za príklad A-2.4... [To je apel na Tinku.]

² Tieto mimochodom podľa teórie informácie principiálne nemôžu pracovať úplne zadarmo, lebo informácia je istým spôsobom ekvivalentná energii. Ak chceš o tom vedieť viac, klikni si na populárny článok o **Maxwellovom démonovi** na stránke: <http://www.quniverse.sk/rcqi/index.php?x=popular&y=eng>.

³ Ak by to tak nebolo, tak by sa nám riešenie iba trochu zahumusilo. Stačilo by uvažovať celú otáčku zariadenia a previesť rovnaké úvahy.

⁴ Tento argument rozšírený na celkovú potenciálnu energiu sústavy je dôkazom nefunkčnosti tohoto zariadenia.

Na lano pôsobí hydrostatický tlak kolmo cez styčné plochy. Na zvislý kus lana pôsobí teda zo všetkých strán rovnako veľká sila (lebo veľkosť hydrostatického tlaku je iba funkcia hĺbky) smerom do stredu lana. Výsledný silový účinok bude zjavne nulový. Nuž a silový účinok tlaku pôsobiaci na lano v spodnej úvrati cez jeho povrch, ktorý je v kontakte s vodným živlom, nemôže lanom pohnúť už len kvôli symetrii. Ak by totiž chcel pohnúť lano **v ľubovoľnom smere**, tak by z tej symetrie musel **zároveň** chcieť pohnúť aj **v opačnom smere**. To je spor a teda tlak na lano v spodnej úvrati nechce sústavou pohnúť ani náznakom.

Tak nám to teda vyšlo v poriadku. Uvedomme si, že otočením lana o 1 obrátku je situácia presne rovnaká, ako bola predtým. Tak odkiaľ by sa tá energia, ktorú má stroj poskytovať vo forme užitočnej práce, mala vziať? V podstate je úplne nelogické skúšať skonštruovať perpetuum mobile a overiť jeho funkčnosť pomocou rovníc, o ktorých viem, že vedú k zákonu zachovania mechanickej energie... Hm, sme my ale trdlá.