

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

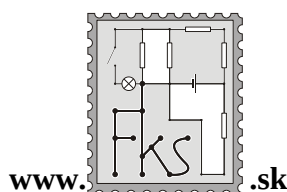
vzorové riešenia 1. série

B – kategória (mladší)

23. ročník

letný semester

školský rok 2007/2008



FKS, KTFDF FMFI UK

Mlynská dolina

842 48 Bratislava

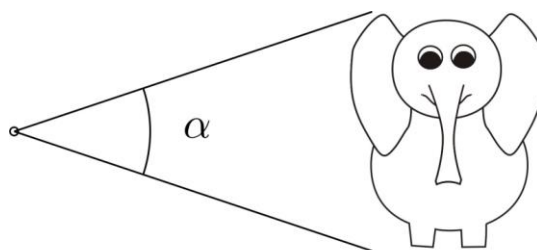
otazky@fks.sk

B-1.1 Gnozeologický problém zamestnanca ŽSR (opravoval Džony, obrázky Buggo)

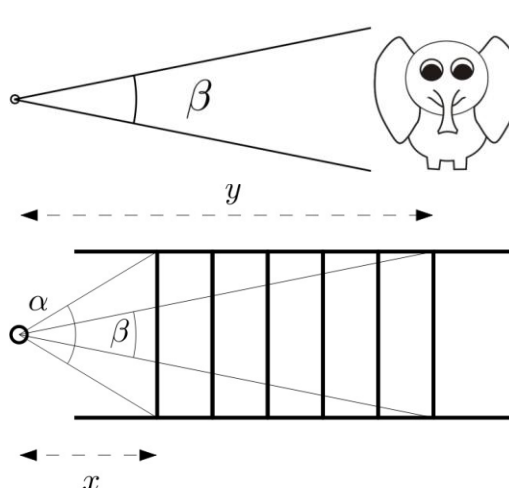
Stojac na koľajniciach, pozerajúc do diaľky na rovný úsek trate a meditujúc o zmysle života človeka napadne kopec páľčivých otázok. Napríklad, je zarážajúce, že dve rovnobežné koľaje vyzerajú na prvý pohľad tak nerovnobežne. Ešte šokujúcejšie je zistenie, že dve koľaje sa na horizonte opticky spájajú. Podobný, ale ešte o dosť presvedčivejší zrakový klam sa dá pozorovať na rovnobežno-nerovnobežných lúčoch slnka, ktoré občas vidno svietiť z mrakov, keď sú na to vhodné podmienky. Prečo je to tak?

Toto leto som sa vlakom vydal do Mongolska. Cesta to je dlhá s prestupmi v Košiciach, Čiernej nad Tisou, Čope, Moskve, Irkutsku a Nauškách. Prečo som sa trieskal až do Ulánbátaru? Jednoducho ma hnevalo, že keď predsa vidím, že sa koľajnice tam kdesi vpredu spájajú, tak by malo stačiť trochu pocestovať a pozriem si to miesto zblízka. Po deviatich dňoch pozorovania (cestovania) môžem zodpovedne prehlásiť: „Až po Ulánbátar sa nespoja“ Tento experimentálny fakt ma prinútil zamyslieť sa, čo to vlastne vidím.

Pozrime sa najprv na trochu iný prípad. Keď hľadáme na dva rôzne veľké objekty (povedzme slona a sloníča), ktoré sú od nás rovnako vzdialené, ako vieme, ktorý z nich je väčší? Slona vidíme pod uhlom α a sloníča pod uhlom β . Zrejme väčší objekt vidíme pod väčším uhlom ako malý. To znamená, že uhol, pod ktorým objekt vidíme nám môže čosi hovoriť o jeho veľkosti.

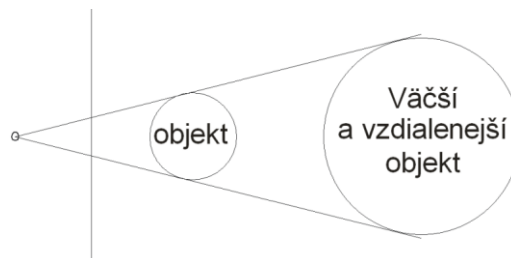


Zahľadáme sa teraz už na dve rovnobežné koľajnice na nejaké mieste vzdialené x od nás. Ako môžeme vidieť aj na obrázku, v tomto mieste vidím koľajnice pod nejakým uhlom α , ak sa však zahľadáme na vzdialenejšie miesto y , uhol β pod ktorým vidím koľajnice je menší ako predtým t.j. $\beta < \alpha$. Teda uhol pod ktorým vidíme daný objekt nám hovorí nie len o veľkosti daného objektu ale aj o jeho vzdialenosti. To znamená, že objekty, ktoré vidíme napr. pod malými uhlami môžeme vyhodnotiť ako veľmi vzdialené, ale aj ako veľmi malé. Teda v prípade koľajníc, čím ďalej hľadáme, tým vidím koľajnice pod menším uhlom a teda tým sa mi vzdialenosť medzi koľajnicami zdá menšia – zbiehajú sa.



Prípad vejárovitých slnečných lúčov je presne o tom istom. Lúče prichádzajúce z veľkej diaľky sú (temer) rovnobežné. Keď sa pozerám pozdĺž nich, vidím ich čím ďalej tým pod menším uhlom, čo moje oko vyhodnocuje ako menšiu vzdialenosť medzi nimi.

Teda nie vždy vieme správne vyhodnotiť, či je objekt menší a bližšie, alebo väčší a ďalej. Je to preto, že obraz, ktorý vidíme si premietame do roviny, a tak ho mozog aj vyhodnocuje. Takto sa



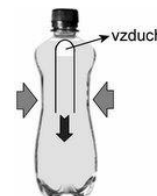
ale v našej hlave stáva z trojrozmerného originálu dvojrozmerný obraz, čím strácame nejakú informáciu a vzniká skreslenie. Treba ešte podotknúť, že pre malé vzdialenosti vieme určiť súčasne veľkosť aj vzdialenosť objektu, pretože na základe toho, že každým okom pozeráme na objekt pod iným uhlom, vieme odhadnúť vzdialenosť. Pre vzdialené objekty už ale obe oči pozerajú približne rovnobežne a tak sa táto informácia stráca. Kľúčovou ingredienciou pre tento zrakový klam je teda **stratiť schopnosť odhadnúť, do akej diaľky sa pozeráme** a uhlové zmenšenie vyhodnotiť ako zmenšenie objektu. Človek sa podvedome dosť dobre orientuje vo svojej izbe, a preto asi nikoho nenahovorím, že protiľahlé hrany obdĺžnikového stola nie sú rovnobežné. Pri koľajniciach je to stredne presvedčivé, úplne presvedčivé je to pri nerovnobežných lúčoch z neba, kde mozog nemá absolútne nič, pomocou čoho by odhalil, že uhlové zmenšenie má na zodpovednosti vzdialenosť. Všimnite si to niekedy, predstaviť si Slnko ako bodový zdroj svetla zhruba kilometer nad oblakmi nikdy nebolo také ľahké.

Pri experimentálnom overovaní zbiehavosti koľajníc v Mongolsku sme si s kolegami uvedomili, že stále jazdíme len po hlavných Ázijských železničných ťahoch, čo ubera nášmu pozorovaniu na všeobecnosti. Preto sme sa rozhodli, že za Ulánbátarom odbočíme na západ do menšej civilizácie. Pri jazere Caganúr síce už železnica neexistuje, no cesta prvej triedy začala javiť známky zbiehavosti. Ako dôkaz prikkladáme fotku. Za obrázky vďačím spolucestovateľovi Buggovi. (viac na <http://www.kms.sk/~buggo/fotky/index.php> sekcia *Vlakom do Mongolska a späť*.)



B-1.2 Potápač (opravovala Marcelka, vzorák Umaxo a Marcelka)

Do plastovej fľaše naplnenej vodou dajte hore dnom otočenú skúmavku (alebo podobnú nádobku), ktorá bude mať na vrchu vzduchovú bublinu. Vyrobite tak známu hračku, tzv. potápača. Ak má bublina vhodnú veľkosť, drží sa skúmavka pri vrchu fľaše, stačí však fľašu mierne rukami stlačiť a skúmavka klesá ku dnu. Fantastické! Ako to však funguje?



Najprv sa zrejme budeme musieť zamyslieť, prečo niektoré telesá plávajú na hladine a iné sa potopia. Zo skúsenosti každý vie, že napríklad železo, ktoré je ťažké, klesá nadol, zatiaľ čo ľahký polystyrén ostane plávať na hladine. Na prvý pohľad sa teda zdá, že ťažké veci klesajú nadol a ľahké plávajú. Ak sa však lepšie zamyslíme, zistíme, že toto vždy neplatí. Predsa obrovské lode ťažiacie mrte mrte ton plávajú, zatiaľ čo malé kamienky, ktoré ťažia sotva pár gramov, klesajú ku dnu. Ktorá vlastnosť telesa teda rozhoduje, či sa teleso potopí alebo nie?

Odpoveď na otázku nám pomôže nájsť zákon, ktorý objavil a sformuloval Archimedes. Tento zákon hovorí o tzv. vztlakovej sile, ktorá nadľahčuje teleso, ktoré je ponorené do vody. Veľkosť vztlakovej sily je rovná $V\rho g$, kde V je objem ponorenej časti telesa, ρ je hustota vody a g je gravitačné zrýchlenie. Môžeme si všimnúť, že vztlaková sila závisí len od objemu ponorenej časti telesa – čím väčší objem telesa je vo vode, tým väčšia vztlaková sila ho nadľahčuje.

Na teleso zároveň pôsobí gravitačná sila veľkosti mg . Teda čím ťažšie je teleso, tým väčšia gravitačná sila ho ťahá k zemi. Hmotnosť telesa môžeme vyjadriť ako $V\rho_t$, kde V je jeho objem a ρ_t je jeho hustota. Takže $mg = V\rho_t g$.

Porovnajme teraz tieto dve sily. Teleso padne na dno, ak bude nadľahčujúca vztlaková sila menšia ako gravitačná sila, ktorá ťahá teleso k zemi. To môžeme napísať takto: $V\rho g < gV\rho_t$. Po jednoduchšej úprave dostávame, že $\rho < \rho_t$. Podobne, teleso bude plávať na hladine, ak vztlaková sila bude väčšia ako gravitačná, teda ak $\rho > \rho_t$.

Dôležitá vlastnosť telesa je preto **hustota**. Hranica, pod ktorou sa musia nachádzať uchádzači o plávanie na hladine (napr. polystyrén), je hustota vody, teda 1000 kg/m^3 . Veci s väčšou hustotou (kamienky) sa potopia. Funguje to! Ešte sa zamyslíme nad nasledovným problémom: môžeme si všimnúť, že dutá plastová guľička pláva, zatiaľ čo rovnako veľká plná plastová guľička sa potopí. Prečo? Veď obe guľičky sú z rovnakého materiálu, teda majú rovnakú hustotu!

Na niečo sme zabudli. Dutá guľička nie je len z plastu, jej vnútro je naplnené vzduchom, ktorý má veľmi malú hustotu. Nás zaujíma akási *priemerná* hustota telesa, a tá je v prípade dutej guľičky oveľa menšia ako v prípade plnej guľičky. Pekné vysvetlenie ponúka i porovnanie síl. Vztlačková sila nadľahčujúca guľičku, je rovnaká v oboch prípadoch, lebo guľičky majú rovnaký objem. Dutá plastová guľička je však zreteľne ľahšia ako plná. Preto gravitačná sila pôsobiaca na dutú guľičku je menšia.

Keď už sme dobre vyzbrojení dôležitým poznatkom o hustotách, vrhnime sa na vysvetlenie javu potápača. Vieme, že keď skúmavka pláva, musí byť priemerná hustota celej skúmavky (čiže skla, vzduchu a vody v skúmavke) menšia ako hustota vody. To sa dá ľahko dosiahnuť: sklo má síce väčšiu hustotu ako voda, no v skúmavke je okrem vody i vzduchová bublina. Keď fľašu stlačíme, skúmavka klesá ku dnu a teda sa nejako musela zväčšiť jej hustota. Ako však obyčajným stlačením fľaše dosiahneme, že skúmavka má zrazu väčšiu hustotu?

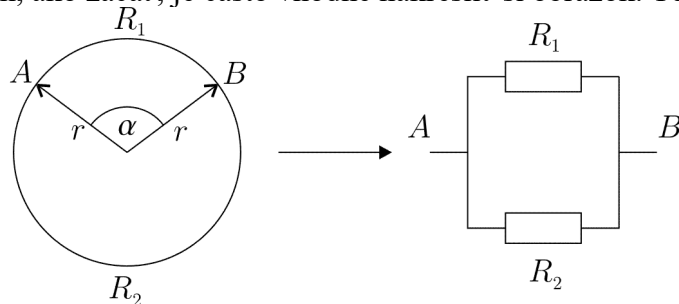
Ak ste si skúšali doma potápača vyrobiť, mohli ste si všimnúť jednu zaujímavú vec. Keď sa fľaša stlačí, vzduchová bublina v skúmavke sa zmenší. Prečo? Stláčaním fľaše znižujeme jej objem. Takže objem niečoho vo fľaši sa musel zmenšiť. Voda je skoro nestlačiteľná, takže svoj objem musel zmenšiť vzduch. Voda sa natlačila do skúmavky a chudáčiskovi vzduchu nechala len malý životný priestor.

V skúmavke sa zmenšil objem vzduchu a zväčšil objem vody, takže priemerná hustota skúmavky (čiže zase, skla, vzduchu a vody v skúmavke dokopy) narástla. Ak fľašu stlačíme dostatočne, hustota skúmavky prevýši hustotu vody a začne klesať ku dnu. Potápač dokáže byť citlivý aj na veľmi slabé stlačenie fľaše, pokiaľ je akurátne vybalancovaný – vzduchu nie je v skúmavke ani veľa, ani málo.

B – 1.3 Odporový kruh (opravoval Robo K.)

Máme kus drôtu, ktorý má odpor R . Vytvárame ho do kružnice a oba konce vodiča spojíme. Aký veľký bude odpor medzi dvoma svorkami, ktoré sú na kružnici umiestnené tak, aby uhol medzi jednou svorkou, stredom kružnice a druhou svorkou bol rovný α ?

Ahojte! Ak neviem, ako začať, je často vhodné nakresliť si obrázok. Teda hľadáme:



Na obrázku sú body na kružnici, v ktorých počítame napätie (t.j. svorky), označené písmenami A a B a uhol medzi svorkou A , stredom kružnice S a svorkou B ako α (ten poznáme zo zadania). Polomer našej vodivej kružnice si označme r . Celková dĺžka vodivého drôtu je daná obvodom kružnice, v našom značení $2\pi r$. Body A a B delia drôt na dva úseky (kružnicové oblúky), ktorých odpory si označme R_1 a R_2 , ako je tomu na obrázku. Apropo, obrázok. Je ľahké (z pekne načrtnutého obrázka ☺) všimnúť si, že našu „kružnicovú odporovú schému“ je možné prekresliť na paralelné zapojenie odporov R_1 a R_2 , ktorých výsledný odpor R_{AB} vypočítame pomocou známeho vzťahu

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{AB} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (1)$$

Na jednotku dĺžky kružnice pripadá odpor R /obvod kružnice. Odpor R_1 a R_2 vypočítame, ak tento jednotkový dĺžkový odpor vynásobíme dĺžkou prislúchajúceho kružnicového oblúka. Teda

$$R_1 = \frac{R}{2\pi \cdot r} \alpha \cdot r$$

$$R_2 = \frac{R}{2\pi \cdot r} (2\pi - \alpha) \cdot r \quad (2)$$

Môžeme si všimnúť, že veľkosti odporov R_1 a R_2 nezávisia od polomeru vodivej kružnice. Po dosadení vzťahov (2) do rovnice (1) získame výsledný vzťah pre hľadaný odpor R_{AB}

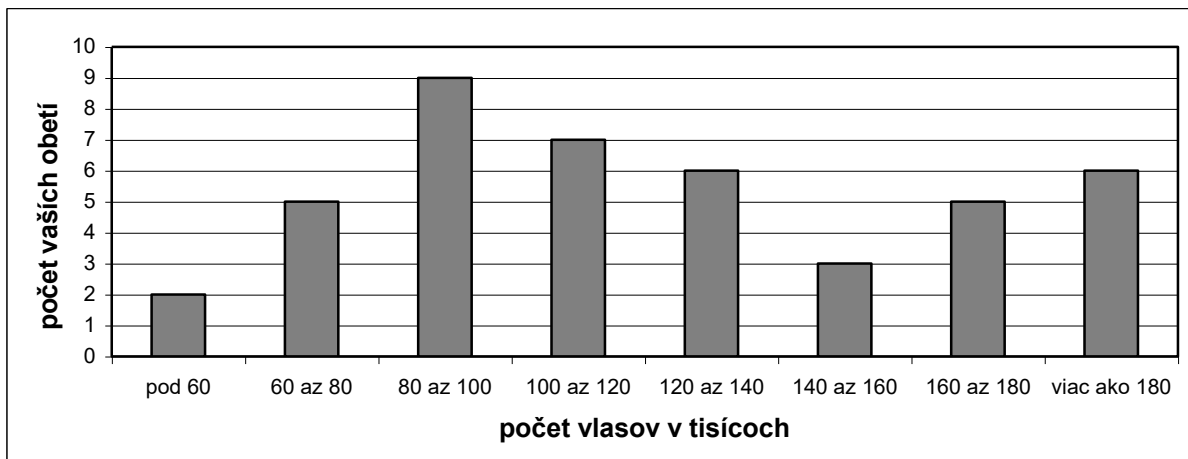
$$R_{AB} = \frac{R \cdot \alpha \cdot (2\pi - \alpha)}{4\pi^2} \quad (3)$$

Na záver rýchla kontrola správnosti výsledku. Pre špeciálny prípad $\alpha = \pi$ dostávam výsledok $R_{AB} = R/4$, čo sa zhoduje so známym výsledným odporom dvoch paralelne zapojených rezistorov s odpormi $R/2$. Citujúc slová istého klasika: Tot' vsio.

B-1.4 Vlasý (5 bodov) (Opravovali Kika a Bzdušo)

Navrhnete metódu, ako odhadnúť, koľko vlasov má na hlave vami vybraný človek (napríklad brat alebo sestra, za plešatého dedka veľa bodov nečakajte). Môžete si zvoliť hlavu s dlhými alebo krátkymi vlasmi, ako vám to vyhovuje.

Čaute decká. Sme radi, že ste si úlohu užívali plnými dúškami. Začneme niekoľkými faktografickými údajmi. Podľa príručky mladých fyzikov má priemerný človek na hlave 80 až 120 tisíc vlasov, pričom blondávi ľudia majú viacej vlasov ako tmavovlasí. Vašími meraniami ste ponúkli vcelku veľký štatistický súbor. Pozrime sa, čo vyšlo vám:



Väčšina extrémnych hodnôt vznikala napríklad zlým prevodom jednotiek (napr. 278 štvorcových metrov vlasovej pokrývky hlavy Lenky Matejovičovej a podobne:). Toľko k úvodu. Dúfam, že už horíte zvedavosťou, ako sa s týmto problémom vysporiadali vaši kamaráti.

Začnime krátkou rozpravou na tému: „Čo sme pokladali za správne riešenie?“ V prvom rade, správne riešenie by malo byť prakticky zrealizovateľné, ideálne aj v domácich podmienkach. Osobne predpokladáme, že nemáte doma vreckové analytické váhy, fľašu kyseliny chlorovodíkovej, terárium na vši, urýchľovač elektrónov, 10 tonový nákladiak, 100 kilometrov koľajníc, ani superpočítač Deep Thought, ktorého sa stačí dotknúť a on vám

zobrazí počet vlasov na monitore.¹ Trochu zhovievavejší sme boli pri laserových ukazovákach, rozprávajúcích vlasoch, Veľkom Mamutovi či nekonečne presných odmerných valcoch. Veď uznajte sami...

1. metóda: Väčšina z vás zvolila nasledovný postup. Zakreslíme si na povrchu hlavy malý štvorček, v ktorom spočítame všetky vlasy. Nemal by byť príliš veľký, inak by nám v polovici počítania začalo preskakovať, ale ani príliš malý, aby sme ešte mali čo počítať a nemali veľkú odchýlku merania. Obvykle ste zvolili 1cm². Potom stačí odhadnúť povrch vlasovej pokrývky. Za predpokladu, že vlasmi sme obrastení zhruba rovnomerne stačí prenásobiť počet vlasov na 1cm² touto plochou v cm².

Táto metóda mala dve úskalia. Ad jedna, ako si niektorí z vás všimli, vlasy nerastú veľmi rovnomerne. Ad dva, rozumne odhadnúť povrch vlasovej pokrývky nie je ľahké. Prvý z týchto problémov sa dal obísť jednoducho tak, že ste sa zaujímali o počet vlasov na viacerých rôznych miestach hlavy a zistili akúsi priemernú hodnotu.

Pri určovaní plochy vlasovej pokrývky sa ukázalo, že aproximácia tvaru hlavy na guľu či kocku a jednoduché prehlásenie, že vlasy zaberajú *em* entín povrchu hlavy nie je veľmi presná metóda. Poslúžila však ako dobrý rádoový odhad. Presnejšie odhady boli také, kde si dobrovoľník nechal pokryť (pokresliť) hlavu dostatočne malými štvorčekmi či trojuholníkmi, ktoré môžeme prehlásiť za rovinné útvary a ich obsah už vieme veľmi presne spočítať.

Touto metódou sme zisťovali počet vlasov na hlave nemenovaného Tomáša K. Na rôznych miestach sme zvolili 10 štvorčekov so stranou 0,5 cm a napočítali sme na nich postupne toľkoto vlasov:

meranie	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
počet vlasov	49	34	42	21	19	27	39	35	35	21

Z tejto tabuľky vieme určiť priemerný nameraný počet vlasov a tiež nejakú odchýlku, v ktorej sa skutočný priemerný počet vlasov bude nachádzať. Nečakám od vás znalosť zložitých štatistických metód, preto sa teraz (ako aj v celom vzorovom riešení) uspokojíme s *odhadom* spomínanej odchýlky.

$$n = 32 \pm 8 \text{ vlasov/štv orček}$$

Náš štvorček mal stranu dĺžky 0,5 cm, takže výsledok sa dá prepočítať ako

$$n = 128 \pm 32 \text{ vlasov/cm}^2.$$

Obsah vlasovej pokrývky sme odhadli vyššie spomínanou metódou na

$$S = 570 \pm 50 \text{ cm}^2.$$

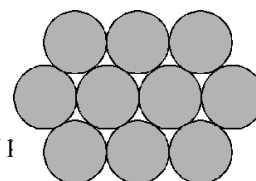
Výsledný počet vlasov je súčin $nS \pm$ nejaká tá odchýlka. Ak si vezmete možné minimum a maximum tohto súčinu, tak výsledný počet vlasov na hlave Tomáša K. je

$$75\,000 \pm 25\,000.$$

2. metóda: Tiež veľmi populárna. Táto je použiteľná len pri dlhovlasých ľuďoch. Je založená na tom, že porovnáme polomer vlasu s polomerom celého copu.² Potom ste uvádzali, že počet vlasov v cope možno určiť podľa vzťahu:

$$N = \frac{S_{\text{copu}}}{S_{\text{vlasu}}} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

Určiť rozmery copu nie je problém, určiť priemer vlasu sa dá napríklad mikrometrom. V domácich podmienkach stačilo vziať nejaký tenký predmet (tuhu od pera) a zisťovať, koľkokrát treba namotať vlas vedľa seba, aby celková šírka namotaného pásu bola 1 mm.



¹ Ak áno a nebudaj sme vám za to strhli body, pošlite čím skôr reklamáciu a do obálky i materiál. Vši prosím priložte do špeciálneho sáčku.

² A sme pevne presvedčení, že sa v ňom nachádzajú všetky naše vlasy. To však nie je pravda, pretože prirodzená lámavosť vlasov patrí k životu.

Čuduj sa svete, tento výsledok nie je kóšer. Ak vlasy akokoľvek silno stlačíme do gumičky, stále medzi nimi ostanú vzduchové medzery. Je to kvôli tomu, že vlasy majú približne tvar valca a najtesnejšie usporiadanie vyzerá podobne ako na obrázku.³ Ak by ste sa pohrali s geometriou, môžete sa presvedčiť, že skutočný počet vlasov v cope by bol $\pi/(2\sqrt{3})$ -násobný. To predstavuje rozdiel asi 10% od pôvodného počtu.

Tento problém sa dal so šťastím obísť, ak ste porovnávali celý cop s menším copíkom so známym množstvom vlasov. Ale porovnateľnú či dokonca väčšiu chybu tiež spôsobujú rôzne hrúbky a nepravidelný tvar vlasov, alebo ich nepravidelné usporiadanie v cope.

3. metóda: Síce menej presná, ale zrealizovateľná aj v električke. Rovnako ako v predošlom prípade si potrebujeme zohnať dlhovlasého dobrovoľníka, ktorého vlasy dáme do copu. Cop „od oka“ rozdelíme na dve rovnaké časti a v hrsti si ponecháme len jednu z nich. Tú znova rozdelíme napoly. Toto spravíme celkove asi 11 až 13 ráz, kým v rukách nemáme tenučký copík, ktorého počet vlasov vieme spočítať priamo. Tento počet stačí vynásobiť príslušnou mocninou dvojky.

Žiaľ, nie vždy sa nám podarí rozdeliť vlasy úplne napoly a pri toľkých deleniach môže chyba drasticky narastať. Našťastie je táto metóda veľmi rýchla, čo nám umožňuje ju viackrát zopakovať a zistiť nejakú priemernú hodnotu.

Samozrejme, zrealizovateľných nápadov bolo viac. Väčšinou si to, žiaľ, žiadalo dotyčnú osobu radikálne ostrihať. Iné postupy sa do vzoráku nedostali kvôli nedostatku miesta. Čo sa týka hodnotenia, boli sme citliví na uvádzanie zdrojov nepresností a v Áčku sme očakávali aj nejaký rozumný odhad chyby merania.

Napokon by sme radi uviedli pár zrníek múdrosti zo siene slávy aj so svojimi autormi:

- 1.) Celú hlavu ostrihám a vlasy hodím do lekáru. Počet vlasov určím podľa nechuti taký lekárskejší. (*Jakub Konečný*)
- 2.) Nenápadne sa k niekomu prikradneme a vytrhneme mu jeden vlas. Nalejeme naň HCl a zachytíme všetky molekuly plynu, ktoré sa uvoľnia. Teraz nenápadne vylejeme HCl dotyčnej osobe na hlavu a tiež zachytíme uvoľnený plyn. Nameraný objem podelíme objemom pri jednom vlase a máme výsledok. (*Michal Hagara*)
- 3.) Odmeriame intenzitu hlasitosti človeka, ktorému vytrhneme jeden, dva, tri,... vlasy. Z výsledkov určíme funkciu, podľa ktorej hlasitosť rastie. Potom zavesíme človeka s ruksakom za vlasy a pridáme závažia. Z nameranej hodnoty hlasitosti už ľahko určíme počet vlasov, lebo daná funkcia je prostá na celom definičnom obore. (*Filip Kubina*)
- 4.) Vytrhneme obeť vlas. Obeť zakričí: „Au, už mi ostáva iba x vlasov!“ Vlasov bolo $x+1$. (*Jakub Konečný*)

...

B-1.5 Sprcha (opravovala aj vzorák písala Bea:-D)

Po dvoch hodinách v sprche už Reného prestalo baviť púšťať bublinky do vody a začal experimentovať. Keď pustil studenú (10°C) vodu a sprchu natočil tak, aby striekala nahor, striekala do výšky 0,5m. Keď potom pridal teplú vodu (predpokladajte, že to neovplyvnilo prítok studenej vody) s teplotou 50°C, striekala sprcha do výšky 1m. Aká bola teplota takto získanej vody?

Ja som toto leto bola v Cardiffe, čo je hlavné mesto Walesu. Mali tam sprchy s prítokovými ohrievačmi. My sme skrz-naskrz nevedeli, prečo sa tá voda neohrieva a stačilo len zapnúť poistky. V inom cardiffskom dome zase prítokový ohrievač nefungoval, keď kdekoľvek v dome tiekla voda. Zrazu začala tiecť studená a to sa dotýčny sprchujúci pustil do veľkého kriku, že nech teraz neumývajú riad:-D

³ Pre zjednodušenie predpokladáme, že všetky vlasy majú približne rovnaký polomer. Teší nás fakt, že v skutočnosti to tak celkom dobre funguje.

No dost' bolo zmätočných rečí. Od vás sme chceli iné. Prestavme si sprchu. Máme. Naša sprcha má veľa dierok, z ktorých strieka studená vodička (použijme pre ňu index s). Máme. Zoberme si jednu dierku. Máme (Viete čo? Odteraz majme všetko. Dobré?). Jedna dierka má nejaký prierez obsahu AS . Keď voda prúdi cez dierku tak, že za nejaký čas At prejde dráhu As (inak povedané prúdi rýchlosťou $v_s = AS / At$), potom za tento čas At cez ňu pretečie objem $V_s = AS \cdot As$. "Objemovú rýchlosť" vytekania, teda objem vytečenej vody na nejaký čas, nazývame prietokom, označme ho Q_s :

Vidíme, že voda má pri ústí sprchy nejakú počiatočnú rýchlosť v_s . Ak René natočí sprchu tak, aby voda striekala priamo hore ako fontána, v protismere gravitačného zrýchlenia, kvapky si pekne letia vzduchom, rovnako ako vyhodené loptičky pri zvislom vrhu. Keďže poznáme maximálnu výšku, do ktorej sa voda dostane, z nej dostaneme:

$$v_s = \sqrt{2h_s g} . \quad (2)$$

Pokrúťme teraz aj kohútikom teplej vody. Prietok sa zvýši o nejakú hodnotu Q_t . Cez tú istú dierku musí prejsť za rovnaký čas väčší objem. Prietoky sa teda sčítajú a rýchlosť vytekania sa musí zväčšiť tiež, lebo AS zostalo rovnaké (viď. (1)). Rýchlosť v_s sa zmení na v_z a voda bude striekať vyššie.

Čo s tým môžeme spraviť my? Môžeme zistiť, v akom pomere sú prietoky studenej a zmiešanej vody. Tým zistíme aj pomer objemov studenej a teplej vody, ktoré prechádzajú dierkou za jednotkový čas (alebo hocikaký čas At). Vieme, že výška sa zväčšila 2krát, teda $h_z = 2h_s$. Z rovnice (2) zistíme pomer rýchlostí a z rovnice (1) pomer prietokov:

$$\frac{Q_s}{Q_s + Q_t} = \frac{Sv_s}{Sv_z} = \frac{\sqrt{2h_s g}}{\sqrt{2h_z g}} = \sqrt{\frac{h_s}{h_z}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Takže

$$\begin{aligned} \sqrt{2}Q_s &= Q_s + Q_t, \\ Q_t &= (\sqrt{2} - 1)Q_s, \text{ z čoho} \quad V_t = (\sqrt{2} - 1)V_s \end{aligned} \quad (4)$$

Teraz sa zamerajme na zmiešavanie studenej a teplej vody a ich výslednej teploty T . Poznáme ich pôvodné objemy a teploty. Z kalorimetrickej rovnice si ľahko vyrobíme rovnicu

$$c(T_t - T)V_t \rho = c(T - T_s)V_s \rho. \quad (5)$$

Žiadna mágia, hovorí to akurát to, že keď sa obe vody zmieria na teplote T , musí byť teplo, ktoré teplá voda stratila, rovnaké ako teplo, ktoré studená voda prijala. (Straty do okolia neuvažujeme.)

Hustota ρ je pre obe vody rovnaká, aj merná tepelná kapacita c . Pre výslednú teplotu T dostávame vzťah:

$$T = \frac{V_s T_s + V_t T_t}{V_s + V_t} = \frac{T_s + (\sqrt{2} - 1)T_t}{\sqrt{2}}. \quad (6)$$

Dosadením dostávame

$$T = \frac{10 + (\sqrt{2} - 1) \cdot 50}{\sqrt{2}} ^\circ\text{C} = 21,71573 ^\circ\text{C}, \quad (7)$$

Čo je približne $21,72 ^\circ\text{C}$.

Niečo k vašim riešeniam. Buď ste to mali dobre alebo úplne zle. Zle ste to mali spôsobom, že ste si povedali, že hmotnosti studenej aj teplej vody sú rovnaké. A toto ste si nemohli dovoliť tvrdiť, lebo hmotnosť je zložkou prietoku a prietok je závislý od rýchlosti. Pomer hmotností a teda potom rýchlostí, ktoré vieme vyrátať je vo vzťahu (3), čo zjavne nie je priamo úmerne závislé na výške, ako ste si často mysleli. Ďalej vám trochu robilo problémy indexovanie. Je dobré dávať veciam indexy čo najlogickejšie (studená-S, teplá-T, zmiešaná-ni, alebo nejak obdobne), lebo si to môžete popliesť.

A tak strašne šikovní ste. Som na vás Marcelkino priesvisko ☺

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

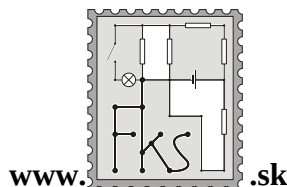
vzorové riešenia 1. série

A– kategória (starší)

23. ročník

letný semester

školský rok 2007/2008



FKS, KTFDF FMFI UK

Mlynská dolina

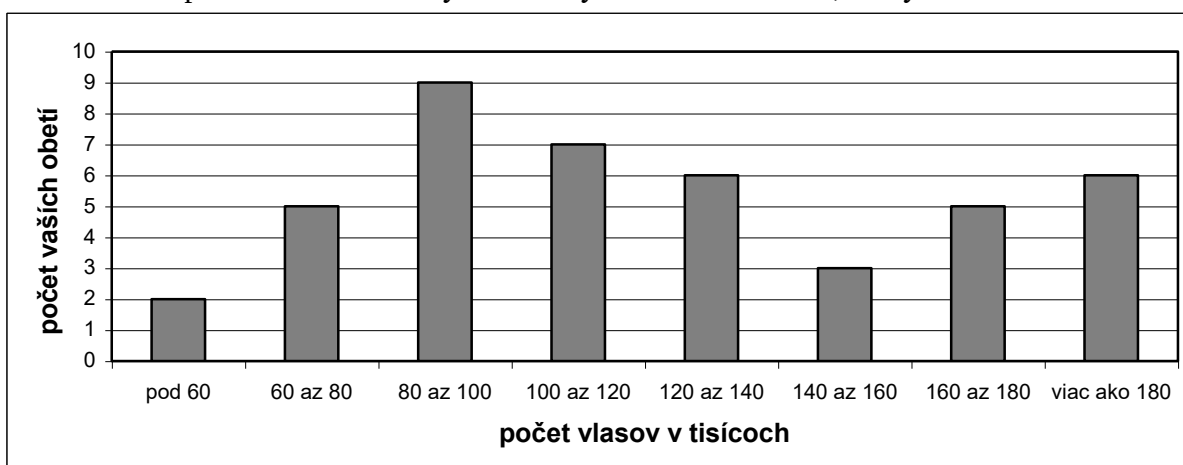
842 48 Bratislava

otazky@fks.sk

A-1.1 Vlasý (5 bodov) (Opravovali Kika a Bzdušo)

Navrhnete metódu, ako odhadnúť, koľko vlasov má na hlave vami vybraný človek (napríklad brat alebo sestra, za plešatého dedka veľa bodov nečakajte). Môžete si zvoliť hlavu s dlhými alebo krátkymi vlasmi, ako vám to vyhovuje.

Čaute decká. Sme radi, že ste si úlohu užívali plnými dúškami. Začneme niekoľkými faktografickými údajmi. Podľa príručky mladých fyzikov má priemerný človek na hlave 80 až 120 tisíc vlasov, pričom blondávi ľudia majú viac vlasov ako tmavovlasí. Vašími meraniami ste ponúkli vcelku veľký štatistický súbor. Pozrime sa, čo vyšlo vám:



Väčšina extrémnych hodnôt vznikala napríklad zlým prevodom jednotiek (napr. 278 štvorcových metrov vlasovej pokrývky hlavy Lenky Matejovičovej a podobne:). Toľko k úvodu. Dúfam, že už horíte zvedavosťou, ako sa s týmto problémom vysporiadali vaši kamaráti.

Začnime krátkou rozpravou na tému: „Čo sme pokladali za správne riešenie?“ V prvom rade, správne riešenie by malo byť prakticky zrealizovateľné, ideálne aj v domácich podmienkach. Osobne predpokladáme, že nemáte doma vreckové analytické váhy, fľašu kyseliny chlorovodíkovej, terárium na vši, urýchľovač elektrónov, 10 tonový nákladiak, 100 kilometrov koľajníc, ani superpočítač Deep Thought, ktorého sa stačí dotknúť a on vám zobrazí počet vlasov na monitore.¹ Trochu zhovievavejší sme boli pri laserových ukazovátkach, rozprávajúcich vlasoch, Veľkom Mamutovi či nekonečne presných odmerných valcoch. Veď uznajte sami...

1. metóda: Väčšina z vás zvolila nasledovný postup. Zakreslíme si na povrchu hlavy malý štvorček, v ktorom spočítame všetky vlasy. Nemal by byť príliš veľký, inak by nám v polovici počítania začalo preskakovať, ale ani príliš malý, aby sme ešte mali čo počítať a nemali veľkú odchýlku merania. Obvykle ste zvolili 1cm^2 . Potom stačí odhadnúť povrch vlasovej pokrývky. Za predpokladu, že vlasmi sme obrastení zhruba rovnomerne stačí prenásobiť počet vlasov na 1cm^2 touto plochou v cm^2 .

¹ Ak áno a nebudaj sme vám za to strhli body, pošlite čím skôr reklamáciu a do obálky priložte dôkazový materiál. Vši prosím priložte do špeciálneho sáčku.

Táto metóda mala dve úskalía. Ad jedna, ako si niektorí z vás všimli, vlasy nerastú veľmi rovnomerne. Ad dva, rozumne odhadnúť povrch vlasovej pokrývky nie je ľahké. Prvý z týchto problémov sa dal obísť jednoducho tak, že ste sa zaujímali o počet vlasov na viacerých rôznych miestach hlavy a zistili akúsi priemernú hodnotu.

Pri určovaní plochy vlasovej pokrývky sa ukázalo, že aproximácia tvaru hlavy na guľu či kocku a jednoduché prehlásenie, že vlasy zaberajú *em* entín povrchu hlavy nie je veľmi presná metóda. Poslúžila však ako dobrý rádový odhad. Presnejšie odhady boli také, kde si dobrovoľník nechal pokryť (pokresliť) hlavu dostatočne malými štvorčekmi či trojuholníkmi, ktoré môžeme prehlásiť za rovinné útvary a ich obsah už vieme veľmi presne spočítať.

Touto metódou sme zisťovali počet vlasov na hlave nemenovaného Tomáša K. Na rôznych miestach sme zvolili 10 štvorčekov so stranou 0,5 cm a napočítali sme na nich postupne toľkoto vlasov:

meranie	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
počet vlasov	49	34	42	21	19	27	39	35	35	21

Z tejto tabuľky vieme určiť priemerný nameraný počet vlasov a tiež nejakú odchýlku, v ktorej sa skutočný priemerný počet vlasov bude nachádzať. Nečakám od vás znalosť zložitých štatistických metód, preto sa teraz (ako aj v celom vzorovom riešení) uspokojíme s *odhadom* spomínanej odchýlky.

$$n = 32 \pm 8 \text{ vlasov/štv orček}$$

Náš štvorček mal stranu dĺžky 0,5 cm, takže výsledok sa dá prepočítať ako

$$n = 128 \pm 32 \text{ vlasov/cm}^2.$$

Obsah vlasovej pokrývky sme odhadli vyššie spomínanou metódou na

$$S = 570 \pm 50 \text{ cm}^2.$$

Výsledný počet vlasov je súčin $nS \pm$ nejaká tá odchýlka. Ak si vezmete možné minimum a maximum tohto súčinu, tak výsledný počet vlasov na hlave Tomáša K. je

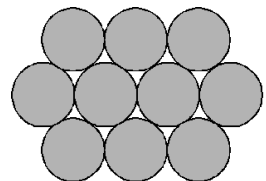
$$75\,000 \pm 25\,000.$$

2. metóda: Tiež veľmi populárna. Táto je použiteľná len pri dlhovlasých ľuďoch. Je založená na tom, že porovnáme polomer vlasu s polomerom celého copu.² Potom ste uvádzali, že počet vlasov v cope možno určiť podľa vzťahu:

$$N = \frac{S_{\text{copu}}}{S_{\text{vlasu}}} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

Určiť rozmery copu nie je problém, určiť priemer vlasu sa dá napríklad mikrometrom. V domácich podmienkach stačilo vziať nejaký tenký predmet (tuha od pera) a zisťovať, koľkokrát treba namotať vlas vedľa seba, aby celková šírka namotaného pásu bola 1 mm.

Čuduj sa svete, tento výsledok nie je kóšer. Ak vlasy akokoľvek silno stlačíme do gumičky, stále medzi nimi ostanú vzduchové medzery. Je to kvôli tomu, že vlasy majú približne tvar valca a najtesnejšie usporiadanie vyzerá podobne ako na obrázku.³ Ak by ste sa pohrali s geometriou, môžete sa presvedčiť, že skutočný počet vlasov v cope by bol $\pi/(2\sqrt{3})$ -násobný. To predstavuje rozdiel asi 10% od pôvodného počtu.



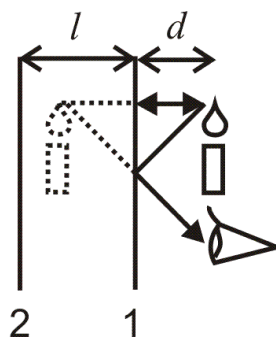
Tento problém sa dal so šťastím obísť, ak ste porovnávali celý cop s menším copíkom so známym množstvom vlasov. Ale porovnateľnú či dokonca väčšiu chybu tiež spôsobujú rôzne hrúbky a nepravidelný tvar vlasov, alebo ich nepravidelné usporiadanie v cope.

² A sme pevne presvedčení, že sa v ňom nachádzajú všetky naše vlasy. To však nie je pravda, pretože prirodzená lámavosť vlasov patrí k životu.

³ Pre zjednodušenie predpokladáme, že všetky vlasy majú približne rovnaký polomer. Teší nás fakt, že v skutočnosti to tak celkom dobre funguje.

3. metóda: Síce menej presná, ale zrealizovateľná aj v električke. Rovnako ako v predošlom prípade si potrebujeme zohnať dlhovlasého dobrovoľníka, ktorého vlasy dáme do copu. Cop „od oka“ rozdelíme na dve rovnaké časti a v hrsti si ponecháme len jednu z nich. Tú znova rozdelíme napoly. Toto spravíme celkove asi 11 až 13 ráz, kým v rukách nemáme tenučký copík, ktorého počet vlasov vieme spočítať priamo. Tento počet stačí vynásobiť príslušnou mocninou dvojky.

Žiaľ, nie vždy sa nám podarí rozdeliť vlasy úplne napoly a pri toľkých deleniach môže chyba drasticky narastať. Našťastie je táto metóda veľmi rýchla, čo nám umožňuje ju viackrát zopakovať a zistiť nejakú priemernú hodnotu.



Samozrejme, zrealizovateľných nápadov bolo viac. Väčšinou si to, žiaľ, žiadalo dotyčnú osobu radikálne ostrihať. Iné postupy sa do vzoráku nedostali kvôli nedostatku miesta. Čo sa týka hodnotenia, boli sme citliví na uvádzanie zdrojov nepresností a v Áčku sme očakávali aj nejaký rozumný odhad chyby merania.

Napokon by sme radi uviedli pár zrníek múdrosti zo siene slávy aj so svojimi autormi:

- 1.) Celú hlavu ostrihám a vlasy hodím do lekváru. Počet vlasov určím podľa nechuti taký lekvár ješť. (*Jakub Konečný*)
- 2.) Nenápadne sa k niekomu prikradneme a vytrhneme mu jeden vlas. Nalejeme naň HCl a zachytíme všetky molekuly plynu, ktoré sa uvoľnia. Teraz nenápadne vylejeme HCl dotyčnej osobe na hlavu a tiež zachytíme uvoľnený plyn. Nameraný objem podelíme objemom pri jednom vlase a máme výsledok. (*Michal Hagara*)
- 3.) Odmeriame intenzitu hlasitosti človeka, ktorému vytrhneme jeden, dva, tri,... vlasy. Z výsledkov určíme funkciu, podľa ktorej hlasitosť rastie. Potom zavesíme človeka s ruksakom za vlasy a pridáme závažia. Z nameranej hodnoty hlasitosti už ľahko určíme počet vlasov, lebo daná funkcia je prostá na celom definičnom obore. (*Filip Kubina*)
- 4.) Vytrhneme obeť vlas. Obeť zakričí: „Au, už mi ostáva iba x vlasov!“ Vlasov bolo $x+1$. (*Jakub Konečný*)

...

A-1.2 Dvojité sklo (opravovala Janka)

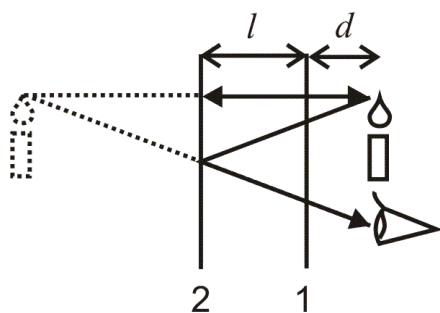
Na oknách, ktoré sú tvorené dvoma tabuľami skla, sa dá pozorovať zaujímavý jav. Pokiaľ je okno tak akurát špinavé na to, aby sa správalo ako polopriepustné zrkadlo (t.j. časť svetla prepustí, časť odrazí ako zrkadlo) a priblížite sa k nemu so sviečkou, uvidíte za oknom rovnomerný zástup (postupne sa zoslabujúcich) obrazov. Ako vzdialené budú dva susedné obrazy, ak vzdialenosť oboch tabuľ skla je l ? Hrúbku samotného skla zanedbajte.

Neviem ako veľmi špinavé musia byť okná, aby to takto fungovalo, ale u nás na intráku to fičí celkom pekne☺.

Ták sa pozrime, čo sa to tam vlastne deje. Označíme si sklo bližšie k sviečke ako sklo1 a sklo ďalej od sviečky nazveme sklo2. Vzdialenosť sviečky od skla1 si označíme d .

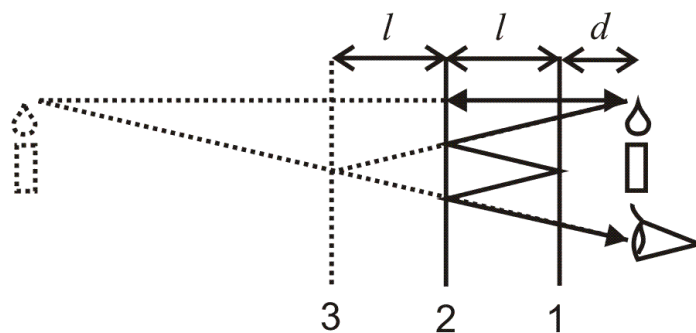
Ako nájdeme obrazy? Vyšleme zo sviečky dva rôznobežné pokusné lúče. Tieto budú prechádzať, alebo sa odrážať od skiel, ako chceme (v praxi budú robiť vždy oboje, odraz aj prechod). Keďže pozorovateľ stojí na tej istej strane skla, ako sa nachádza sviečka a keďže nás nezaujímá obraz vytvorený niekde na tienidle (tienidlo nikde nie je), potrebujeme, aby lúče po odrazoch skončili pri pozorovateľovi (na správnej strane skiel) a stále boli rôznobežné. Ich predĺžením do opačnej strany (u nás bodkované čiary) získavame potom imaginárny obraz. Pre pohodlnosť budeme jeden lúč vždy brať ako kolmý na rovinu zrkadiel, ale vyšlo by to aj s hocíjakým iným.

Tak, poďme na to, prvý obraz: Ten vznikne, keď sa svetlo odrazí hneď od skla1. Sklo v tomto prípade funguje ako zrkadlo. Teda, ak je sviečka od skla1 vzdialená o d , obraz bude vzdialený od sviečky o $2d$.



Druhý obraz vznikne podobne. Svetlo si bezstarostne prejde cez sklo1, odrazí sa od skla2 a opäť prejde cez sklo1. Teraz sa sklo2 hrá na zrkadlo, od ktorého je sviečka vzdialená o $l + d$. Takže druhý obraz bude vzdialený od sviečky o $2(l + d)$.

obrazom to začína byť zaujímavé. Lúč sa trikrát odrazí medzi sklami (podrobne: prejde cez sklo1, odrazí sa od skla2, odrazí sa od skla1, druhýkrát sa odrazí od skla2 a nakoniec prejde cez sklo1). Ak by sa odrazil len dvakrát, nevrátil by sa k pozorovateľovi, ale odišiel by cez sklo2 a to nechceme.



Keď sa lepšie pozrieme na tretí obrázok, môžeme si všimnúť jednu zaujímavú vec. Našu situáciu vníma pozorovateľ úplne rovnako, akoby sa lúč odrazil len od takého „imaginárneho“ skla3 vo vzdialenosti $2l+d$ od sviečky. Odtiaľ si už ľahko odvodíme, že obraz bude od sviečky vzdialený o $2(2l+d)$.

Každý ďalší obraz vznikne pridaním 2 odrazov medzi sklom1 a sklom2. Tým sa posunie „imaginárne sklo“, ktorým môžeme nahradiť naše okno pri zobrazovaní, o l oproti predchádzajúcemu „imaginárnemu sklu“. Takže obraz sa posunie o $2l$ oproti predchádzajúcemu obrazu. Vzdialenosti medzi obrazmi sú teda $2l$.

A-1.3 Lyžiar (5 bodov) (opravoval Marcel, vzorák Kubus)

...sa spustil zo svahu so sklonom 20° . Po tom, ako po prejení vzdialenosti l dosiahol najnižší bod dráhy, zotrvačnosťou vybehol do protisvahu, tiež so sklonom 20° . Tam sa otočil a pustil sa naspäť, pričom zotrvačnosťou zase vybehol do pôvodného svahu, a tak ďalej. Koľko metrov takto lyžiar najazdí, kým nadobro neskonečí v údolí medzi oboma svahmi, ak koeficient trenia medzi lyžami a snehom je $f = 0.1$ a hmotnosť lyžiara je $m = 80\text{kg}$? Predpokladajte, že prechod z jedného svahu na druhý sa deje úplne hladko, prechodové „údolíčko“ je zanedbateľne krátke a pri prechode sa nestráca žiadna jeho pohybová energia.

Tento príkladík už na prvý pohľad zaváňa nekonečným počtom stále sa zmenšujúcich vybehnutí a zbehnutí z kopca. Pán lyžiar má totiž pri každom zbehnutí vždy ešte daku energiu na to, aby vybehol do protisvahu. Stále síce nejakú stráca trením o sneh, ale vždy, keď do najspodnejšieho bodu príde nejakou rýchlosťou, rovnakou z neho odíde. (Keďže podľa predpokladu zo zadania nestratí žiadnu energiu.) Označme si ešte uhol sklonu oboch svahov ako α , najspodnejší bod dráhy nazvime B , a pustime sa do analýzy problému.

Striedajú sa nám dve situácie: „lyžiar ide dole kopcom“ a „lyžiar ide hore kopcom.“ V oboch vieme veľmi jednoducho popísať všetky pôsobiace sily. Prvou z nich je v oboch prípadoch tiažová o veľkosti $F_g = m \cdot g$, a v oboch prípadoch ju vieme rozložiť na prenaševýpočtyvhodnepoužiteľné zložky: silu pôsobiacu kolmo na sneh $F_N = m \cdot g \cdot \cos \alpha$, a silu pôsobiacu rovnobežne, smerom dole z kopca, o veľkosti $F_D = m \cdot g \cdot \sin \alpha$. Prítláčná sila F_N je samozrejme kompenzovaná rovnako veľkou (len opačnou) reakčnou silou snehu F_R (vieme predsa, že lyžiar nezrýchľuje smerom do zeme). Nakoniec je tu tretia sila. Tá pôsobí vždy proti pohybu lyžiara a jej veľkosť je $F_T = f \cdot F_N = f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$.

Ak teda lyžiar fičí dole kopcom, je zrýchľovaný dopredu silou

$$F_1 = F_D - F_T = m \cdot g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha).$$

Sami si skontrolujte, že $\sin \alpha > f \cdot \cos \alpha$, teda že táto sila bude naozaj kladná a lyžiar sa bude šmýkať dole! Z Newtonovho zákona dostaneme lyžiarove zrýchlenie $a_1 = F_1/m = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)$. Podobne, keď lyžiar ide hore kopcom, je spomaľovaný silou

$$F_2 = F_D + F_T = m \cdot g \cdot (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)$$

(pôsobiacou proti smeru pohybu), jeho zrýchlenie bude teda záporné a bude mať veľkosť $a_2 = g \cdot (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)$.

Na začiatku sa lyžiar nachádza vo vzdialenosti l od bodu B , bude k nemu zrýchľovať zrýchlením a_1 , bude mu to trvať čas t , a dosiahne pritom rýchlosť v . Oprášiac poznatky z kinematiky vieme, že pri takomto rovnomerne zrýchlenom pohybe platí $l = \frac{1}{2} \cdot a_1 t^2$ a $v = a_1 \cdot t$, z čoho dostaneme $v = \sqrt{2a_1 l}$. Takouto rýchlosťou lyžiar vybehne na protisvah, kde bude spomaľovať zrýchlením $-a_2$. Z podobných kinematických rovníc zistíme, že kým sa znova zastaví v najvyššom bode svojej dráhy, prejde vzdialenosť

$$l_2 = \frac{1}{2} a_2 \left(\frac{\sqrt{2a_1 l}}{a_2} \right)^2 = \frac{a_1}{a_2} l = ql$$

Kde q označuje pomer zrýchlení a_1 a a_2 . A čo sa s lyžiarom udeje potom? Začne sa šmýkať naspäť, zase príde do bodu B , zase nabehne do protisvahu a zase sa v ňom v nejakej výške zastaví. Ale počkať. Veď presne túto situáciu sme práve spočítali. Prvý „zbeh a výbeh“ sa ničím nelíši od tých nasledujúcich, počiatočná vzdialenosť l bola ľubovoľná. To znamená, že po druhom „zbehu a výbehu“ vyjde lyžiar do vzdialenosti $ql_2 = q^2 l$. Po treťom do vzdialenosti $q^3 l$, a tak ďalej, po každom zbehuí dole kopcom vyjde naspäť len do q -násobnej výšky.

Celkovú prejdenú dráhu už zrátame jednoducho. Od začiatku po prvé zastavenie prejde lyžiar vzdialenosť $l(1 + q)$, od prvého po druhé zastavenie $l(1 + q)q$, atď.. Spolu prejde teda vzdialenosť

$$L = l(1 + q)(1 + q + q^2 + \dots) = l(1 + q)/(1 - q).$$

Použili sme pri tom vzorec pre súčet geometrického radu, $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = 1/(1 - x)$. Už len dosadíme za a_1 a a_2 a máme to:

$$L = (l \cdot \tan \alpha) / f.$$

Pýtajme sa teda, sami seba: beda, bolo nám to všetko treba, táto ťažká veda? Odpoveď znie – nie. Hľa, vykúpenie:

(Koniec poetického okienka.)

Porátať dve zrýchlenia a jeden geometrický radík nebolo až také bolestivé, ale predsa len, nebolo to nutné. Pozrime sa na celú situáciu energicky. Pardon, energeticky. Normálová sila F_N a reakčná sila F_R na lyžiarovi nekonajú žiadnu prácu, lebo sú v každom momente kolmé na smer jeho rýchlosti. Zložka gravitačnej sily rovnobežná so svahom, ktorej veľkosť sme si označili F_D , je o dačo zložitejšia. Keď ide lyžiar dole kopcom, na každom kuse dráhy s dĺžkou s mu dodá energiu (na ňom vykoná prácu) $s \cdot F_D$. Keď ide do kopca, tak ho naopak spomaľuje, a na dráhe s mu uberie energiu $s \cdot F_D$. Nás našťastie nemusí zaujímať, koľko presne sa lyžiar nabehá do kopca a koľko z kopca – vieme, že na začiatku je hore, a na konci celého cirkusu je dole. Takže smerom dole prejde presne o l viac ako smerom hore. A teda sila F_D mu celkovo dodá o $l \cdot F_D$ viac energie ako mu uberie. No a nakoniec máme treciu silu F_T , ktorá pôsobí vždy proti smeru pohybu, a preto pri prejdení dráhy s lyžiarovi uberie $s \cdot F_T$ energie, bez ohľadu na to, či práve ide hore alebo dole.

Na začiatku aj na konci celého tohto cirkusu lyžiar stojí, takže všetku energiu, ktorú mu sila F_D dodala, mu musela sila F_T zobrať. Ak prešiel celkovú dráhu L , môžeme napísať

$$l \cdot F_D = L \cdot F_T$$

$$l \cdot m \cdot g \cdot \sin \alpha = L \cdot f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$L = (l \cdot \sin \alpha) / (f \cdot \cos \alpha) = (l \cdot \tan \alpha) / f.$$

A máme správny výsledok. A aj by som už skončil, ale niektorým možno vŕta v hlave otázka, čo sa v tomto druhom postupe stalo s potenciálnou energiou. Hráme sa na energie, ale potenciálnu energiu sme nezapočítali?

Započítali. Treba si uvedomiť, že potenciálna energia je len akýmsi meradlom, koľko práce vieme vyžmýkať z gravitačnej sily. A my sme v našej úvahe s gravitačnou silou počítali. Ba čo viac, odvodili sme si, že ak prejdeme po svahu vzdialenosť s nadol, stratíme energiu $s \cdot F_D = s \cdot m \cdot g \cdot \sin \alpha$, čo je presne $m \cdot g \cdot h$, kde h je prejdená zvislá vzdialenosť. Toto je tá potenciálna energia, páni! A dámy!

Dostávame tak dvojvetové riešenie príkladu: lyžiar pri svojom pohybe zide o $l \cdot \sin \alpha$ nižšie a nakoniec zastane, takže svoju potenciálnu energiu $m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha$ musel minúť na trenie. Tretia sila je vždy $f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$, preto ak prešiel dráhu L , na trenie minul $L \cdot f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$, a z rovnosti týchto energií dostaneme $L = (l \cdot \tan \alpha) / f$.

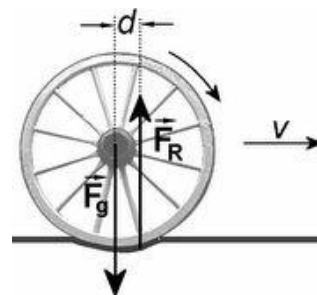
A to je už naozaj všetko.

A-1.4 Koleso (opravoval Jakub)

s polomerom R sa kotúľa po ceste rýchlosťou v . Stala sa však nepríjemná vec: podložka pod kolesom sa mierne deformuje tak, že reakčná sila od podložky nepôsobí smerom do osi otáčania, ale je posunutá o vodorovnú vzdialenosť d . Tejto vzdialenosti sa odborné zvykne hovoriť aj „rameno valivého odporu“ a pod týmto pseudonymom sa s ňou stretnete napríklad na FO. Aký to bude mať vplyv na pohyb kolesa? Konkrétne:

- Akou silou musíme koleso ťahať za stred, aby nespomaľovalo?
- Ako bude koleso spomaľovať, ak žiadnou silou pôsobiť nebudeme?

Predpokladajte, že koleso po podložke neprešmykuje.



Situáciu budeme analyzovať zo vzťažnej sústavy spojennej so stolom, ktorú budeme považovať za inerciálnu. Momenty síl a moment zotrvačnosti I uvažujem v celom príklade vždy vzhľadom na stred kolesa (kde sa nachádza súčasne aj ťažisko).

Úvodom sa pozastavím pri pojme **rameno valivého odporu** (d), ktoré býva zvyčajne definované ako materiálový parameter na určenie veľkosti valivého trenia vo vzťahu

$$F_{\text{valivé}} = d \frac{F_{\text{normálnová}}}{R} \quad (\text{I})$$

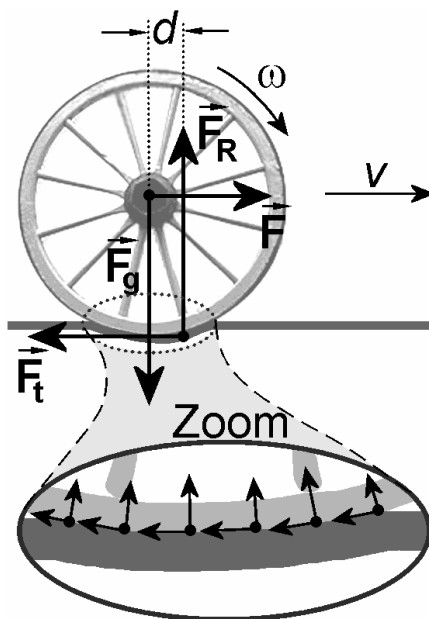
bez názornejšieho priblíženia tejto veličiny. Časť a) nás presvedčí, že vzdialenosť d zo zadania plní skutočne funkciu parametra d z rovnice (I).

Podme analyzovať časť a) príkladu:

- **A:** Ťažisko kolesa má konať rovnomerný pohyb, čiže celková pôsobiaca sila na koleso musí byť nulový vektor, čo zapíšeme jednoducho $F_{\text{výsl}} = 0$.
- **B:** Keďže sa ani jeho uhlová rýchlosť $\omega = v/R$ evidentne nemení, musí byť aj otáčavý účinok síl pôsobiacich na koleso nulový, čo znamená $M_{\text{výsl}} = 0$.

Teraz prišiel ten čas, aby sme sa zamysleli nad tým, aké sily budú na koleso vlastne pôsobiť. Okrem tých 2 síl, ktoré máme už aj na obrázku v zadaní, bude na stred pôsobiť sila⁴ F , ktorou koleso ťaháme, a taktiež naň zrejme bude pôsobiť aj trecia sila F_t v mieste styku kolesa s podložkou, ktorá zabezpečí jeho neprešmykovanie⁵.

Na chvíľu sa pozastavím ešte pri tretej sile F_t . Táto, podobne ako gravitačná alebo reakčná sila, je len myslenou výslednicou mnohých menších síl, v tomto prípade trecích síl pôsobiacich pozdĺž celej styčnej plochy kolesa s podložkou. Keďže zvyčajne deformácie podložky kolesom nebývajú veľké, tak výsledný smer trecej sily môžeme s dostatočnou presnosťou považovať za vodorovný, ako to máme na **obr.** Moment trecej sily⁶ pôsobiacej na koleso počítaný vzhľadom na stred kolesa je pre málo deformované koleso rovný $M = F_t R$.



⁴ Pre jednoduchosť uvažujeme F pôsobiacu vo vodorovnom smere. Ak by sila F pôsobila šikmo (ale stále v rovine obrázka), tak by sa situácia skomplikovala iba nepatrne. Stačilo by totiž rozložiť F do zvislého a vodorovného smeru a ďalej pracovať s príslušne zväčšenou/zmenšenou reakčnou silou F_R .

⁵ Bez nej by sme rovnice **A.** a **B.** nedokázali uspokojiť.

⁶ Na **obr.** máme F_t nakreslenú s pôsobiskom v mieste pôsobenia reakčnej výslednice F_R , čo však vôbec nemusí byť tak. Trecia sila F_t môže mať pôsobisko kdekoľvek na styčnej ploche a pohybový (t.j. posuvný a otáčavý) účinok bude mať rovnaký. Je preto jedno, kde na styčnú plochu umiestnim jej pôsobisko.

Jediná možnosť, ako splniť $F_{výsl} = 0$ je taká, že vodorovné zložky sa vyrušia, čiže F je opačná k F_t a tiež zvislé zložky dajú dokopy nulu, čiže $F_g = F_R$.

Ešte treba splniť požiadavku $M_{výsl} = 0$, čiže rovnicu

$$M_{výsl} = 0F_g + 0F - RF_t + dF_R = 0$$

odkiaľ už poľahky dostaneme
$$F_t = \frac{d}{R} F_R = \frac{d}{R} F_g$$

a aj výsledok
$$F = \frac{d}{R} mg = F_t$$

Keď sme už prvú časť príkladu elegantne vyriešili, všimnime si ešte, že sme dostali zhodu s formulou (I). Pre zaujímavosť si môžeme uviesť zopár experimentálnych hodnôt tohto parametra valivého trenia pre nejaké dvojice materiálov:

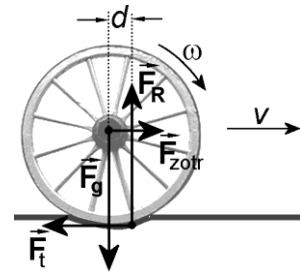
Rozhranie	drevo-drevo	oceľové koleso-kol'ajnice	pneumatika-asfalt
d [mm]	0,8	0,5	1,6

Rozanalyzujeme teraz časť b). Platí $F = 0$ a očakávame, že koleso bude spomaľovať so spomalením a . Pre posuvný pohyb potom musí platiť rovnica (druhý Newtonov zákon)

$$\vec{F}_{výsl} = \vec{F}_g + \vec{F}_R + \vec{F}_t = m\vec{a}$$

Splniť ju môžeme iba vtedy, ak sa zvislé sily navzájom vyrušia. Potom musí platiť $F_t = ma$.

V zadaní mám však napísané, že koleso neprešmykuje. Takže ak sa časom zmení rýchlosť o nejaké Δv , tak sa mi musí adekvátne zmeniť aj uhlová rýchlosť otáčania o $\Delta\omega = \Delta v/R$. Inak povedané, ak sa mi rýchlosť kolesa mení v čase so spomalením $a = \Delta v/\Delta t$, musí sa mi meniť aj jeho uhlová rýchlosť s uhlovým spomalením $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{R \Delta t} = \frac{a}{R}$. Aby však bolo kolesu takéto uhlové spomalenie skutočne



vnútené, tak naň musí pôsobiť moment sily o veľkosti $M = I\varepsilon$, kde M je opäť moment síl pôsobiacich na koleso určený vzhľadom na stred kolesa a I je moment zotrvačnosti kolesa vzhľadom na os prechádzajúcu stredom kolesa kolmo na papier (či monitor).⁷

Pôsobiaci moment sily:
$$M = 0F_{zotr} + 0F_g + dF_R - RF_t = mgd - Rma$$

Potrebný moment sily:
$$M = I\varepsilon = I \frac{a}{R}$$

Porovnaním týchto dvoch rovníc viem vyjadriť spomalenie kolesa

$$a = \frac{mdR}{mR^2 + I} g \quad (II)$$

Vidím, že toto spomalenie závisí iba od charakteristík kolesa (m , R , I), parametra d určeného rozhraním materiálov a tiažového zrýchlenia g . Teda počas celého pohybu sa toto spomalenie nebude meniť a môžeme spokojne prehlásiť, že koleso sa bude pohybovať rovnomerne spomaleným pohybom so spomalením a daným rovnicou (II).

Hodnotenie: za každú časť sa dalo získať 2.5b. Kto v časti a) len dosadil do vygoogleného vzorca (I), tak mohol dostať za túto časť najviac 1b.

Poznámka o energetickej bilancii: Keďže teleso neprešmykuje, tak trecia sila nekoná žiadnu prácu (posunutie trecích plôch voči sebe je stále nulové). V časti a) kolesu dodávame výkon $P = Fv$ a ten sa spotrebúva na deformáciu podložky – sila F_R zatláča povrch podložky nadol. V časti b) sa na deformáciu spotrebúva kinetická energia kolesa.

Poznámka o ramene valivého odporu d : Keď koleso zastane, tak by sa nemalo roztočiť samo od seba. Preto sa pri zastavení musí d zmeniť na nulu.

⁷ POZOR! Ak v tejto rovnici uvažujeme výsledný moment síl M určený vzhľadom na iný bod ako ťažisko, tak od neho treba odpočítať moment výslednice síl pôsobiacich v ťažisku (čosi ako moment zotrvačnej sily) a naďalej uvažovať moment zotrvačnosti I vzhľadom na ťažisko. Ľahko sa dá ukázať, že špeciálne pre neprešmykúce teleso platí rovnosť medzi momentom pôsobiacich síl vzhľadom na dotykový bod (bez odpočítania momentu výslednice) a $I'\varepsilon$, kde I' je moment zotrvačnosti vzhľadom na ten istý dotykový bod.