

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

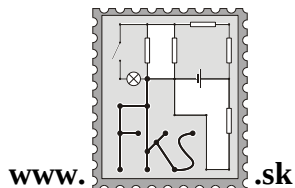
vzorové riešenia 2. série

B – kategória (mladší)

21. ročník

zimný semester

školský rok 2005/2006



FKS, KZDF FMFI UK

Mlynská dolina

842 48 Bratislava

riesenia@fks.sk

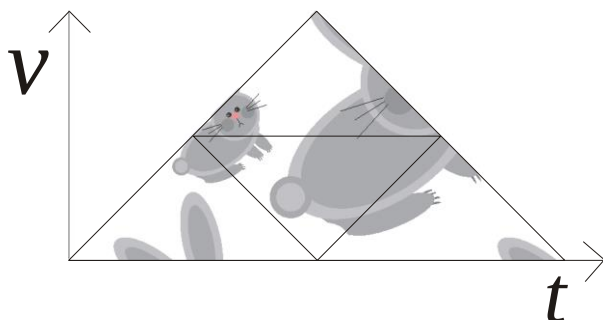
info@fks.sk

B-2.1 Kubko a Mat'ko (Opravoval Mat'ko a Ferko)

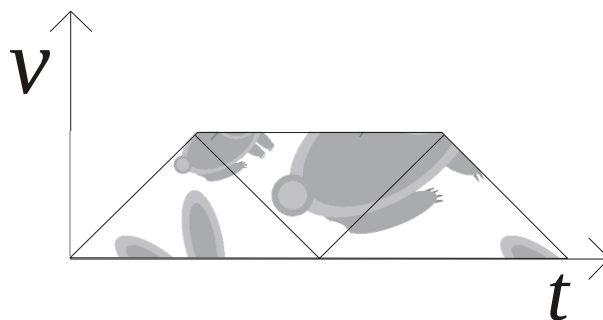
Dvaja fyzici - Mat'ko a Kubko sa rozhodli, že sa pôjdu prebehnúť, pričom každý bude bežať rovnaký čas T . Mat'ko prvú polovicu behu zrýchľoval so zrýchlením a , zvyšok času $T/2$ využil na brzdenie so spomalením veľkosti a . Kubko bol trochu opatrnejší - prvú štvrtinu času zrýchľoval so zrýchlením a , potom išiel polovicu svojho času konštantnou rýchlosťou a nakoniec spomaľoval so spomalením veľkosti a (spomaľovanie trvalo $T/4$). Akú vzdialenosť prebehol Kubko, ak sa Mat'kovi podarilo prebehnúť 1 km?

Čaute!

Tento jednoduchý príklad sa dal riešiť, napríklad osvedčeným postupom. Zapišem $s = v_0 t + at^2/2$, rátam, rátam, opravím 2 chyby a mám výsledok. Jednoduchším prístupom je v tomto prípade však grafický prístup. Nerobí totiž problém nakresliť si závislosť rýchlosti od času. Konkrétne, bude to vyzeráť takto:



Rýchly bežec Mat'ko.



Lama Kubko.

V tomto grafe odpovedá prebehnutá dráha vyzajačikovanej ploche pod grafom rýchlosti. Hneď vidíme, že K. prebehol $3/4$ toho čo M. teda $3/4$ km. pomer 3:4 pritom vôbec nezávisí od toho, aké veľké bude a , t.j. ako strmo nakreslíme graf.

B-2.2 Kofola (opravoval Džony)

Aj vám sa zdá kofola akási prisladá? Rozriedme si ju teda. Veľkú kofolu (0,5 l), vlejme do najbližšieho potoka. Počkajme dosť dlho na to, aby sa rovnomerne premiešala zo všetkou vodou na zemeguli a potom si nabermes pol litra späť. A to je tá správna chuť. Kým budete čakať, odhadnite, koľko molekúl z pôvodnej kofoly naberiete späť po dostatočne dlhom čase.

O deviatej mám byť na kofole, preto sa pokúsím rýchlo vysvetliť, ako porátať molekuly v pohári pre tých, ktorým sa čosi v príklade nepodarilo.

Objem kofoly V (0,5l) riedim vodou na celom svete. Na to aby sme zistili aké je toto riedenie, treba určiť koľko je tej vody na svete. Ak sa opýtate googla, povie vám $V_v = 1,337 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$. Ak mu neveríte, alebo ak nemáte internet, skúsime to odhadnúť (odmerať to je zrejme dosť ťažké). Povrch Zeme je približne zo 70% pokrytý vodou. Teda plocha vody na Zemi je $S = 4\pi R^2 \cdot 0,7$, kde samozrejme R je polomer Zeme. Asi akú priemernú hĺbku má

tento svetový vodný zdroj? To sa prakticky spočítať ani nedá, ale keď sa tak zadívate na dáku mapu s oceánmi, zistíte, že tých hlbokých miest (Mariánska priekopa okolo 11km) je len veľmi málo a teda hĺbka bude asi menšia ako polovica z 11km. Tu už nám nepomôže nič inšie, len si ozaj tipnúť: Nech je hĺbka $h=3\text{km}$. V_v môžeme vyrátať buď ako objem kvádra s podstavou S a výškou 3km, alebo ako objem medzigulia s rozdielom polomerov 3km. Ak si to premyslíte, zistíte, že vzhľadom na obrovskú plochu S je jedno, ktorým spôsobom budete počítať, aj tak sa veľmi nepomýlite (veď už hĺbka bola značne ‘strelená’). Oboma metódami dostaneme číslo približne $V_v=1.10^{18}\text{m}^3$. Dôležité je, že to rádovo sedí aj so ‘serióznou’ googlovou hodnotou.

Tak a úloha je už skoro vyriešená. Kofolu rozriedim v pomere $p = V/V_v$. Keďže čakám dosť dlho, všetka voda sveta sa úplne premiešala, môžem očakávať, že pomer kofoly ku vode sveta v novonabratom pohári bude práve $p = V/V_v$. Teda objem, ktorý zaberá momentálne kofola v pohári je

$$V_k = Vp = V^2/V_v \quad (1).$$

Takže teraz nám stačí určiť, koľko ‘molekúl kofoly’ sa nachádza v objeme V_k . Vieme, že v 1 móle látky je $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ častíc (Avogadrova konštanta). Počet častíc (N) v n móloch je teda $N = n \cdot N_A$. Látkové množstvo (počet mólov) kofoly je $n = m/M$, kde m je hmotnosť kofoly v pohári ($m_k = \rho \cdot V_k$) a M je mólová hmotnosť kofoly. Kofola je z väčšej časti voda, takže pre jej hustotu a mólovú hmotnosť môžeme použiť hodnoty vody ($\rho=1000\text{kg/m}^3, M=18 \cdot 10^{-3}\text{kg/mol}$). Teda:

$$N = \frac{\rho V_k}{M} N_A$$

Sem dosadíme nami odhadnutý objem kofoly v pohári V_k (1) a dostaneme:

$$N = \frac{\rho V^2}{M V_v} N_A$$

Ak dosadíme číselné hodnoty, dostávame, že po nabratí bude v pohári: $N=8363$ molekúl. Toto samozrejme závisí od určenia V_v , ale tak či onak, dostaneme hodnotu rádovo tisícky molekúl. Pre niekoho je to prekvapujúco veľké číslo, veď sa zdá, že kofola sa v oceáne stratí, ale aspoň to ukazuje, ako veľmi veľa je molekúl v takej pollitrovej kofole. Napriek tomu, veľké riedenie naozaj urobí svoje:

Dodatok pre ľudí užívajúcich homeopatiká. Skúste si podobným spôsobom zrátať, ako veľká by musela byť tabletká tohto ‘lieku’, aby ste mali šancu, v nej nájsť aspoň jednu molekulu účinnej látky (stačí položiť $N=1$ a vyjadriť V pri vhodnom p). Riedenia v homeopatikách bývajú až $1:10^{30}$ a dokonca aj $1:10^{200}$ (lebo vraj čím zriedenejšie tým lepšie). Pri tej prvej hodnote by sa vám do izby nezmestila. Pri tej druhej by bola aj naša slnečná sústava úzka. Ešte stále veríte, že homeopatiká fungujú? Dajte si radšej kofolu.

(Viac o homeopatikách a ich podvode v časopise Týždeň v niektorom z jarných čísel 2005)

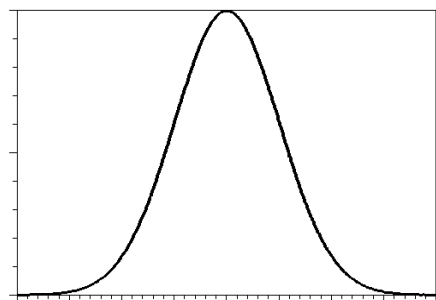
B-2.3 Zima (opravovala Efka)

Prečo je nám zima, keď vylezieme z vody? Všetky procesy čo najlepšie popíšte.

Hmmmm.... Taký perličkový kúpeľ s obláčikmi peny, k tomu relaxačná hudba, poprosím ešte kaviár so šampanským... A zapáľte niekto ešte zopár sviečok, to mi ich má 150 stačiť alebo čo? No, ale už by som mala končiť, treba písať vzorák... Takže sa vrátim do reality, zastavím sprchu... ale prečo je tu zrazu taká zima?...

Takže, vlezeme do vody, možno popritom spáchame nejakú hygienu (to už nechám na vás) a zase vylezieme. Ajhľa! Mám na sebe vrstvičku vody! Ako to ovplyvní výdaj tepla? Dajme tomu, že voda je chladnejšia ako naše...ehm, *moje* telo, napríklad 25°C . Koľko jej tak

môžeme mať na sebe? To dosť závisí od veľkosti povrchu a podobných srandičiek. Vezmime si jej tak 1 ml. Takže teplo, ktoré jej odovzdám je $Q = mc\Delta t$, teda asi 40 J. Voda z hľadiska svojej tepelnej kapacity teda spôsobí vcelku mizerný tepelný výdaj. Pozrime sa však dôkladne ako tá voda vyzerá. Nachádzajú sa v nej molekuly najrôznejších smerov, rýchlostí a náboženských presvedčení. Vo svojom hektickom pohybe občas nejaká molekula narazí



na hranicu voda/vzduch. Ak má molekula dostatočnú rýchlosť, prekoná príťažlivé sily, ktorými sa ju ostatné molekuly vody snažia udržať v kvapaline a vyletí do vzduchu ako vodná para. Časť svojej kinetickej energie stratí na to, aby príťažlivé sily prekonala, preto vodná para odparujúca sa z človeka nie je veľmi horúca (pokiaľ je molekula pomalá, nechá sa ukecať od okolitých molekúl a ostáva uväznená vo vodnej vrstve). Molekuly vody týmto stratili jedného rýchleho pioniera. Čo s tým? Graf ktorý vidíte na obrázku, je rozdelenie početnosti molekúl podľa ich rýchlosti. Na x-ovej osi si zadáte nejakú hodnotu rýchlosti a na y-ovej osi zistíte koľko molekúl má zhruba vami zadanú rýchlosť. Grafy získané z rôznych pokusov (voda na mne, voda na niekom inom, voda na spodku Mariánskej priekopy) sa budú líšiť iba naťahovaním v niektorom smere, alebo posunom v smere osi x. Naťahovanie odpovedá zmenám objemu, posun zmenám teploty. Ak z vody uberíme niekoľko veľmi rýchlych molekúl, je to akoby sme zrezali pravý cíp grafu. Rýchlosti molekúl sa preusporiadajú a molekuly zase vyformujú podobný kopček, akurát trochu viac vľavo (trochu chladnejší), kvôli zákonu zachovania energie. Týmto pádom sa voda ochladzuje a my máme na tele studenú vodu. To je dôvod, prečo nám je po vylezení z bazéna kosa. Tesne nad povrchom vody je molekúl vody veľmi veľa, zrážajú sa medzi sebou, zrážajú sa s molekulami vzduchu. Preto niet divu, že občas sa nejaká molekula vody vráti späť do vodnej vrstvy a spôsobí oteplenie, pretože pri vníkaní do vodnej vrstvy prudko zrýchli (zase kvôli príťažlivým silám) Čím skôr tieto molekuly dostaneme ďaleko preč, (čím minimalizujeme šancu, že sa vrátia späť), tým chladnejšie nám bude. Preto nám je po vylezení z bazéna kosa², keď fúka. Z uvedených úvah takisto vyplýva, prečo nám je o dosť menšia kosa, pokiaľ je vo vzduchu veľa vodnej pary (napríklad pri takom letnom daždi je skoro 100% vlhkosť vzduchu).

Úvahy z predošlého odstavca boli skôr kvalitatívne, celú vec však vieme jednoducho porátať. Vyparením 1 ml vody stratíme skupenskú teplo jej vyparovania $L_V = ml_V$, čo je asi 2600 J. Vidno, že je to podstatne viac, než pri jednoduchej tepelnej výmene. l_V (asi 2620 kJ.kg⁻¹) je totiž oveľa väčšie ako c (asi 4,2 kJ.kg⁻¹.K⁻¹). A voda tiež môže byť aj rovnako teplá alebo teplejšia, takže tepelnou výmenou nič nestratím, odparovať sa však bude vždy. Kým je teplejšia, využíva na odparovanie len svoju energiu (moje telo je chladnejšie a teplo nemôže tiecť z chladnejšieho telesa na teplejšie). Tým sa však ochladzuje a keď sa jej teplota vyrovná s mojou, začne mi odoberať teplo.

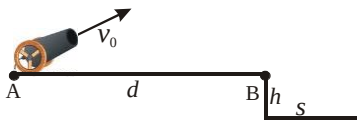
Ďalší faktor, ktorý sa tu uplatňuje, je už skôr biologický ako fyzikálny. Ak pravú ruku ponoríme do teplej vody a ľavú do studenej a potom ich obe strčíme do vlažnej vody, bude sa nám na pravej ruke zdať ako chladná a na ľavej ako teplá. Naše receptory totiž skôr ako absolútnu teplotu vnímajú zmeny teploty. Preto ak je voda, z ktorej vyjdeme, teplejšia ako vzduch, vnímame to ako pocit chladu. Keď naopak vyjdeme zo studenej vody, cítime teplo, ale iba na chvíľu, kým odparovanie vodu ešte viac ochladí.

Pár slov k vašim riešeniam: v zadaní je - popísať všetky procesy čo najlepšie, čiže podrobne, čiže nestačí napísať, že nám je zima, lebo sa z nás vyparuje voda. Chcelo by to popísať trochu podrobnejšie, čo sa pritom s tou vodou deje, ako sa správajú jej molekuly...

a tak. A ešte niečo: Pre naše telo vo vode rozhodne neplatí klasická kalorimetrická rovnica, naša teplota sa nevyrovná s teplotou vody, v ktorej sa nachádza! Veď by sme na plavárni zomreli na podchladenie... Ochladzujú sa len okrajové časti (ruky, nohy), inak si ľudské telo zachováva relatívne stabilných $36,5^{\circ}\text{C}$ (vyrába si vlastné teplo).

B–2.4 Delo (opravoval Juro)

Poľovník Hubert rád kráča s dobou. Na králiky je najlepšie delo, lebo s ním nemôže netrafiť. Delo postavil na kraj lúky (A), ale vo vzdialenosti $d = |AB|$ je zvislý zráz hlboký h . Delo strieľa strely s počiatočnou rýchlosťou v_0 , pod ľubovoľným uhlom. V akej vzdialenosti s od úpätia zrázu pod bodom B sa môže inteligentný králik skryť, aby nebol nikdy trafený? Predpokladajte, že šialený Hubert nasmeruje delo hocijako (hoci aj skoro kolmo dohora), len aby králika trafil.



Ahojte.

Na úvod sa pozrime, ako funguje šikmý vrh. Je zložením dvoch pohybov. Rovnomerného priamočiareho vo vodorovnom smere a rovnomerne zrýchleného, so zrýchlením g smerom nadol, vo zvislom smere. Ich počiatočné rýchlosti sú $v_x = v_0 \cos \alpha$ a $v_y = v_0 \sin \alpha$. Na základe princípu nezávislosti pohybov sa pohyby v x -ovom a y -ovom smere vôbec neovplyvňujú, a preto pre x -ovú a y -ovú súradnicu v čase t platí

$$x(t) = tv_0 \cos \alpha ; y(t) = tv_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

Vzdialenosť, do ktorej doletí vrhnuté teleso je x -ová súradnica v čase, keď $y = 0$, tj.

$$r = x(t_0) = \frac{2v_0 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

Ak je teleso vrhnuté z výšky h , čas za ktorý dopadne, bude spĺňať rovnicu

$$y(t_h) = -h = t_h v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt_h^2$$

Z jej riešenia nás zaujíma iba kladný čas, preto

$$t_h = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}$$

Vzdialenosť, do ktorej doletí teleso v tomto prípade je

$$r_h = x(t_h) = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Tak pristúpme konečne k tomu delu. Sú dve možnosti, ako sa králik môže ukryť pred poľovníkom. Môže zbabelo ujsť tak ďaleko, že poľovník na neho nedostrelí. Potrebujeme teda maximalizovať vzdialenosť r_h . To však nie je vôbec jednoduché nám bude stačiť, že dáka taká vzdialenosť existuje.

V druhom prípade môže králik využiť tienenie zrázu. Guľa letí rýchlosťou v_0 pod uhlom α . Tým, že sme ju vystrelili z kanóna, sme ju vlastne šikmo vrhli. Pred chvíľou sme si povedali, do akej vzdialenosti v hĺbke h doletí guľa. Pre vzdialenosť od začiatku priepasti potom platí $s = r_h - d$. Hľadáme najmenšie možné s pre zadané v_0 a d .

Pozrime sa na moment, v ktorom sa guľa z kanóna dostane na úroveň zrázu. Bude mať vektor rýchlosti v_1 tak, ako na obrázku. V prípade minimálnej vzdialenosti s bude táto rýchlosť smerovať najviac k zemi. Vtedy totiž guľa najrýchlejšie padne a v x -ovom smere preletí najmenej. To bude vtedy, keď guľa pri svojom lete preletí priamo cez okraj priepasti. Takáto situácia nastane pre dva rôzne uhly, ale nás zaujíma väčší z týchto dvoch uhlov. Vtedy platí

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{dg}{v_0^2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{dg}{2v_0^2 \cos \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 = \cos^2 \alpha + \left(\frac{dg}{2v_0^2} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Toto je zakuklená kvadratická rovnica, ktorá sa odkuklí substitúciou $\cos^2 \alpha = z$ a doráta

$$z + \left(\frac{dg}{2v_0^2} \right)^2 \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow z^2 - z + \left(\frac{dg}{2v_0^2} \right)^2 = 0$$

$$z_{1;2} = \cos^2 \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \left(\frac{dg}{2v_0^2} \right)^2}}{2} = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - d^2 g^2}}{2v_0^2}$$

Už spomínaný väčší uhol predstavuje riešenie s mínusom. Vtedy bude kosínus uhla menší a tým pádom uhol väčší. A to je presne to, čo potrebujeme. Predtým, ako sa pustíme počítat' s si uvedomme, že

$$\frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{1}{2} \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{d}{2}$$

Už nič nebráni dorátať s ako $r_h - d$, a teda

$$s = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2 + \frac{2h}{g} v_0^2 \cos^2 \alpha - d}$$

$$s = \sqrt{\left(\frac{d}{2} \right)^2 + \frac{2h}{g} v_0^2 \frac{v_0^2 - \sqrt{v_0^4 - d^2 g^2}}{2v_0^2}} - \frac{d}{2}$$

$$s = \sqrt{\left(\frac{d}{2} \right)^2 + \frac{h}{g} \left(v_0^2 - \sqrt{v_0^4 - d^2 g^2} \right)} - \frac{d}{2}$$

A to je konečný výsledok. Delom nedostrelíme v žiadnom prípade bližšie k päte priekopy, ako je táto hodnota. Neskutočné.

Pár slov k vašim riešeniam. Aby som bol úprimný čakal som viac. Často ste zabúdali na to, že existujú dva uhly, pre ktoré to preletí cez bod B. Mnohí ste potom, ako guľa preletela cez bod B považovali jej pohyb za rovnomerný priamočiary, čím čím ste „vypli“ gravitáciu a nechávali ste guľu letieť bodom B bez toho, aby ste vysvetlili prečo. A tak bolo len jedno bezchybné riešenie.

Tak sme sa úspešne prestrieľali až na koniec. Koniec koncov, čo viac sme mohli čakať? A tak sa len s povzdychmi „Za Kráľa“ a „Bohu dušu, a nám všetky tie oné“ lúčim, prajem krásny zvyšok jesene, teším sa na sústredko a v naozaj priamom, bratskom cite, otvoriac sa vám do korán, víta vás Koliba Kormorán ... majte sa krásne.

B-1.5 Ty-ta-nyc (vzorák Tomáš, opravoval Robo)

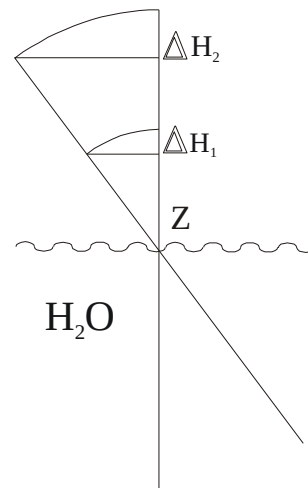
Určite ste videli film o Titanicu. V ňom ukazovali, ako loď narazila na ľadovec a cez dieru v lodi začala do jeho trupu natekať voda. Po čase sa zrazu začala loď dvíhať. Spravme si model, ktorý nám pomôže tento jav pochopiť. Predstavme si Titanic ako veľmi tenkú paličku, plávajúcu na vode, pre jednoduchosť s polovičnou hustotou ako voda. Na jeden jej koniec zavesíme závažie na nitke. Postupne zväčšujeme hmotnosť tohto závažia, až kým sa palička nevzpriami. Pre akú hmotnosť závažia M to nastane? Hustota závažia je oveľa väčšia ako hustota vody.

Milé deti. Tento príklad vás trochu pomotal, čo je dobre, pretože ste (niektorí) až prekvapivo dobrí a kazíte nám pekné rozvrstvenie na výsledkovke. Preto tí, čo ste na ňom pohoreli, neutápajte žiaľ v alkohole, jedná sa o skutočne dosť ťažký príklad.

Pointou príkladu bolo správne pochopiť hint, ktorý pre vás Juro napísal. Tí, ktorí toto morálne prednaučenie k príkladu preskočili, dostanú poslednú šancu, aby si ho ešte raz prečítali.

Úlohu budeme riešiť od konca. Predstavíme si, že palička je už stabilizovaná vo vzpriamenom smere (ako tatranské smreký pred víchricou) a ideme skúmať, či je táto poloha stabilná.

Majme paličku ako na obrázku a zo zvislej polohy ju odchýlime o nejaký uhol, pričom pomer dĺžok vynorenej a ponorenej časti ostáva zachovaný. Tým pádom sa všetky body paličky trochu priblížia k hladine. Z podobnosti trojuholníkov pritom ľahko dostaneme, že ak máme bod paličky, ktorý je vzdialený x od bodu Z (bod paličky priamo na hladine), tento bod sa priblíži k hladine o hodnotu $k \cdot x$, kde k je nejaká konštanta (slabšie povahy si zapchajú uši, pre malé hodnoty α je to $\alpha^2/2$).



Trochu problémov nám narobí ponorená časť paličky. Pri jej pootočení sa totiž nepreskupuje len samotná hmotnosť paličky, ale aj voda, ktorá dômyselne vyplňa priestor tam, kde palička akurát nieje. Z Archimedovho zákona však vieme, že ponorená časť paličky sa správa presne tak, ako keby nebolo žiadnej vody, ale spodok paličky by sa nachádzal v priestore s obrátenou gravitáciou, teda v priestore, kde gravitačné zrýchlenie je rovnako veľké, ale orientované hore. (vďaka tomu, že hustota vody je dvojnásobok hustoty paličky). V ďalších výpočtoch budeme teda počítať s touto analógiou.

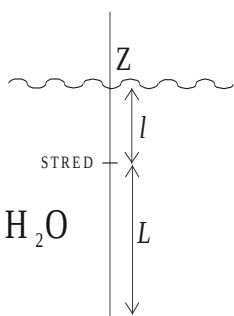
Po pol strane nevynechateľných úvah sa teda dostávame k samotnému výpočtu. Pootočíme paličku o nejaký uhol. Toto pootočenie môžeme charakterizovať pomocou konštanty k (viď vyššie). Nech L je polovica dĺžky paličky a l je vzdialenosť stredu paličky od hladiny. Dĺžkovú hustotu paličky označme γ . Vynorená časť paličky má ťažisko vzdialené $(L + l)/2$ od Z , pričom jej hmotnosť je $(L + l)\gamma$. Podľa vzorca $\Delta E_{pot} = mg\Delta h$ dostaneme zmenu potenciálnej energie vykúkajúcej časti paličky ako

$$\Delta E_{pot1} = -(L + l)^2 \gamma g / 2.$$

Podobne pre potenciálnu energiu ponorenej časti paličky máme

$$\Delta E_{pot2} = -(L - l)^2 \gamma g / 2.$$

Mínusy pred vzorcami odzrkadľujú známy fakt, že pohyb v smere g znižuje potenciálnu energiu telesa. Nakoniec pre potenciálnu energiu



kameňa máme

$$\Delta E_{pot3} = (L - l)mg,$$

kde m je hmotnosť kameňa. Keď je palička v stabilnej polohe, ponorí sa práve toľko, aby vztlaková sila vykompenzovala tiaž kameňa. Preto $m = 2l\gamma$. Keďže nám dochádza toner, do vzorca pre ΔE_{pot3} si to už každý dosadí sám. Zvislá poloha bude pre paličku stabilná, práve ak

$$\Delta E_{pot1} + \Delta E_{pot2} + \Delta E_{pot3} > 0.$$

Z tonerového dôvodu nechám dorátanie na vás, prezradím akurát, že všetky parametre, od ktorých výsledok zjavne nezávisí, sa vykrátia (prekvapčo) a po vyriešení kvadratickej rovnice (pár šikovnými úpravami sa jej vyhnute) máme: $l > (\sqrt{2} - 1)L$. Minimálnu hmotnosť kameňa m_{min} získame dosadením do $m = 2l\gamma$.

No a dostávame sa ku kľúčovej otázke: Ako to vlastne celé je? Dôležitým pozorovaním je, že okrem všeličoho, čo sa v predchádzajúcich vzorcoch vykrátilo, vykrátilo sa aj k . To znamená, že pre hmotnosť závažia väčšiu než m_{min} je zvislá poloha jedinou možnou stabilnou polohou. Aby sme boli sebakritický, treba si priznať, že náš výpočet nie celkom funguje pre ležiacu alebo skoro ležiacu paličku (ako tatranské smreký po víchrici). Vtedy zo zrejmých dôvodov vyjadrenia E_{pot} nie sú presné. Táto poloha teoreticky môže byť rovnovážna, a pre nejaké veľmi, veľmi malé výchylky aj stabilná. Hocijaká trochu väčšia nestabilita (výkyv do strany) uvedie náš výpočet do platnosti a paličke teda neostáva nič, než sa vzpriamiť.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina B – kategórie po 2. sérii zimného semestra 21. ročníka

Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	①	B-2.1	B-2.2	B-2.3	B-2.4	B-2.5	Σ	Σ
1. Boža	Vladimír	2 C	G Poprad Tatarku	20,0	-	5,0	3,5	5,0	5,0		38,50
2. Branický	Juraj			20,0	-	5,0	3,0	3,5	5,0		37,66
3. Tureková	Katarína	2 F	G BB Tajovského	20,0	-	5,0	3,0	3,0	5,0		36,00
4. Vendel	Dávid	1 A	G KE Poštová	18,4	5,0	5,0	5,0	0,5	-		35,28
5. Fecko	Miroslav	kv A	G Pankúchova	20,0	5,0	5,0	3,0	-	-		34,82
6. Bogár	Ján	9 D	9. ZŠ L. Novomeského	19,4	4,0	4,5	2,5	2,0	-		34,20
7. Batmendiynová	Kristína	kv	G T. Vansovej	20,0	5,0	1,5	4,0	0,5	-		32,98
8. Kubina	Filip	sx.	G POH	17,0	-	5,0	3,0	4,0	3,0		32,00
9. Bakula	Andrej	1 A	G Želiezovce	15,3	5,0	5,0	5,0	-	-		31,76
10. Rybák	Matúš	sx.	OG Kukučínova	17,0	-	5,0	1,0	3,5	3,0		29,50
11. Demčáková	Ivona	1 A	G Želiezovce	15,3	5,0	5,0	0,5	0,5	-		28,24
12. Jursa	Jakub	kv A	G KE Alejová	13,0	3,5	5,0	5,0	-	-		28,24
13. Kuzma	Tomáš	kv A	G KE Alejová	12,0	5,0	4,5	5,0	-	-		28,10
14. Hudák	Jozef	2 B	G LS Bardejov	15,0	-	5,0	2,0	3,5	3,0	-1	27,50
15. Konečný	Lukáš	sx.	G Piešťany	13,5	-	5,0	5,0	3,0	1,0		27,50
16. Rohál'	Branislav	2 B	G Považská Bystrica	16,0	-	4,5	2,0	3,5	1,5		27,50
17. Vano	Jakub	1 D	G Prešov J A Raymana	14,7	2,5	2,5	2,5	3,0	-		27,18
18. Zatkalík	Michal	sx.	G sv. Františka	18,5	-	2,5	1,5	3,5	2,0	-1	27,00
19. Boško	Lukáš	1 B	G Považská Bystrica	13,5	2,5	5,0	2,0	2,0	-		26,91
20. Ondáč	Peter	2 C	G Humenné	16,5	-	5,0	1,0	2,5	1,5		26,50
21. Hojčka	Michal	kv D	G Partizánske	12,5	5,0	5,0	0,3	1,5	-		26,23
22. Opavský	Ján	1 A	G Želiezovce	15,7	5,0	0,0	1,5	0,5	-		24,50
23. Baxová	Katarína	1 E	G LŠ Trenčín	11,0	3,0	1,0	3,0	-	1,0		20,90
24. Petrucha	Michal	2 A	G BA Metodova	10,5	2,0	4,0	3,0	-	-		17,50
25. Keruľ	Lukáš	sx. A	OG BA Tilgnerova	9,8	-	1,0	1,0	2,0	1,0		14,80
26. Labant	Tomáš	2 Ag	G Kráľovnej pokoja	5,5	-	4,0	2,5	2,0	0,5		14,50
27. Suchá	Nina	1 F	G VPT Martin	6,5	2,5	0,5	2,5	0,5	-		14,18
28. Koreňová	Nikola	2 E	G PH Michalovce	6,5	-	5,0	0,5	2,0	-		14,00
29. Marhefka	Eduard		G Spišská Stará Ves		2,5	5,0	3,0	2,5	1,0	-1	13,82
30. Pažický	Martin	1 C	G BA J. Hronca	7,1	2,0	1,5	1,0	1,5	0,5		13,78
31. Matejovičová	Lenka	sx.	G BA Grösslingova	7,0	-	4,0	2,0	-	-		13,00
32. Točená	Rozália			12,5	-	-	-	-	-		12,50
33. Šafárik	Marek	2 A	G Revúca	5,5	-	3,5	2,5	-	-		11,50
34. Černeková	Alžbeta	1 E	G Považská Bystrica	11,5	-	-	-	-	-		11,50
35. Vanya	Peter	kv	G LŠ Trenčín	5,3	1,5	2,0	0,5	0,5	-		11,18
36. Tóth	Štefan	2 A	G Revúca	9,0	-	-	-	-	-		9,00

37. Baxová	Jana	9 C	ZŠ Dlhé Hory, Trenčín	8,3	-	-	-	-	-	8,26
38. Kobza	Vladimír	2 F	G BB Tajovského	4,0	-	1,0	0,5	2,5	-	8,00
39. Nagy	Jakub	2 C	G KE STA	4,0	-	-	-	-	-	4,00
40. Nemčeková	Ivana			3,0	-	-	-	-	-	3,02
41. Kunová	Miroslava			0,7	-	-	-	-	-	0,70
42. Purgatová	Hana	2 B	G Skalica	0,0	-	-	-	-	-	0,00

Milý riešiteľ/ka. Pripravili sme pre vás prekvapenie. Pre viac informácií pozri

www.fks.sk/FX

§ E = mc² (2.časť)

„Objekt Pravoslav Prestrelil, boli ste uznaný vinným z porušenia Zákona 3466884/67 899 344 p.n.l., § δκμΘΕ, ktorý ustanovuje rýchlosť svetla za maximálnu povolenú rýchlosť v tomto vesmíre. Vzhľadom na minulé priestupky ste odsúdený na doživotnú izoláciu, aby ste nemohli nabádať iné objekty k porušovaniu zákona.“

Vzápätí sa ho chopili dvaja strážcovia, čo bol dosť zvláštny pocit – nie žeby to bolo akoby sa vás dotýkal niekto neskutočný, práve naopak. Bolo to, ako by sa vás dotýkal niekto skutočnejší ako vy. A tak dokonalú súdnu sieň vystriedalo dokonalé väzenie. Bolo... jednoducho väzenské, väzenskejšie ako akékoľvek väzenie, ktoré by podľa zdravého rozumu mohlo existovať. Cela bola maximálne celovitá, mreže mrežovité, až oči prechádzali, jediné, čo tak trochu rušilo celkový dojem, boli väzni. Nebolo ich veľa a nevyzerali až tak väžňovito, ako by mohli. Keď bol Pravoslav s efektným postrčením dovedený do cely, nevidel žiadneho spoluväzňa. Dvere sa zatvorili s nutným tresknutím a diabolským smiechom strážcu, ktorý znel, akoby ho trénoval minimálne dve hodiny denne. Rozhliadol sa po cele. Jej celovitosť bola takmer dokonalá. Rušila ju len jediná vec – na jednej priči stála klieť s tarbikom. Vôbec sem síce nezapadala, ale pôsobila podivuhodne príjemne a nedokonalu. Pravoslav Prestrelil bol s prehliadkou cely rýchlo hotový - všetko bolo tam, kde by ste to očakávali, a tak sa začal venovať klieť. Tarbík si ho nevšímal a zaryto pochodoval vo svojom kolese. Vtedy Pravoslav urobil tradičnú chybu ľudí, ktorí prišli do styku s niečím malým a chlpatým: automaticky predpokladal, že je to aj milé... Zaťukal na klieť:

„No ahó! Ty si ale pekný....“

Tarbík naňho vrhol vražedný pohľad.

„Si myslíš, že si výkvet živočíšnej ríše, ty samčí šovinista?!“

Pravoslav si to síce doteraz skutočne myslel, ale nepovažoval za múdre sa o tom zmieňovať. Vlastne nenašiel nič múdre, čo by mohol v tejto situácii povedať a zatváril sa nepríliš inteligentne.

„No čo čumiš? A to „pekný“ si vyprosím! Ešte si nevidel tarbíčku, či čo?“

„Čauko, Pufino! Jeho si nevšímaj, je trochu mimo. Však vieš, ako pôsobia ONI na Homo sapiens...“

Vtedy toho už mal Pravoslav tak akurát dosť:

„Hej! Smiem vás upozorniť na svoju prítomnosť? Toto je už vrchol! Dobré! Nejakí ONI ma strčia do basy, že prekračujem rýchlosť svetla. OK. Ale že sa moje vlastné podvedomie baví radšej s nejakým tarbikom ako so mnou, to už fakt prekračuje všetky medze! Požadujem vysvetlenie!“

Upreli sa naňho dva kritické pohľady: jeden u drôtenej klieť a druhý zvnútra jeho hlavy.

„Tarbíčkou. Som samička, jasné? Nemôžem za to, že ten čo mi dával meno, mal zoologické znalosti končiacie pri hot-dogoch. No, tak Pravo, mal by si začať, lebo sa nám tu ešte rozčúli...“

Pravo vo vnútri jeho hlavy si vzdychol.

„No dobre, keď myslíš... Počul si už o zvinutých rozmeroch? No, tak tam teraz sme. V jednom zvinutom rozmere, kde majú úrady ONI – Ostražití Nekompromisní Inšpektori. Ja som ti radil, aby si si nezačínal s tým fyzikom. Ale ty nie, využívaš len 10% mozgu, ale stále musíš byť ten najmúdrejší... A tak si tu a ja tu trčím s tebou. ONI si fakt potrpia na dodržiavanie tých ich Zákonov. A majú fakt dobrý systém, väčšina ľudí v živote ani nepríde na to, že sa vôbec dajú porušiť...“

(pokračovanie nabadúce)

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

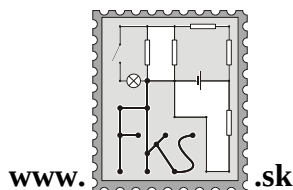
vzorové riešenia 2. série

B – kategória (mladší)

21. ročník

zimný semester

školský rok 2005/2006



FKS, KZDF FMFI UK

Mlynská dolina

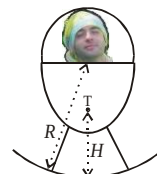
842 48 Bratislava

riesenia@fks.sk

info@fks.sk

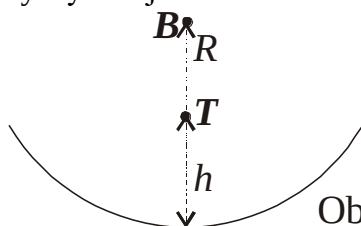
A-2.1 Decko (opravoval Škrek)

Keď decko reve, umiestnime ho do kolisky. Kolísanie zľava doprava pripomína morské vlny a decko sa vo vode cíti ako doma. Horšie je to však s jeho matkou. Tá musí dávať pozor, aby malý mlgúň z kolisky nevypadol. Kolíska vyzerá tak, ako na obrázku. Polomer krivosti tých sránd po ktorých sa kolisa je R . Ťažisko celej sústavy T sa nachádza vo výške H nad zemou. Bude táto poloha stabilná?



Prirodzene, škriekajúci mlgúň je nepríjemná vec. Táto nepríjemnosť sa dá riešiť radikálne¹ alebo menej radikálne. Zvoľme si z hygienických dôvodov riešenie to menej radikálne – kolísku. Samozrejme istým úskaliam riešenia problému sa týmto nevyhneme. Menovite, naše riešenie sa môže veľmi rýchlo zvrhnúť (priam až prevrhnúť) na riešenie radikálne. Tak sa naskytla otázka, bude poloha mlgúňa v koliske ako na obrázku stabilná?

Tuto sa ukáže kto číta hinty k úlohám. Lebo úloha to veľmi ľahká. Na konci hintu bolo spomenuté dačo ohľadom toho že, o aký typ rovnovážnej polohy sa jedná tiež ľahko zistíme pohľadom na potenciálnu energiu telesa pri malých výchylkách. Z guľčového analógu vidíme že ak sa nám pri malom záškodníckom drgnutí potenciálna energia zvýši nezávisle od smeru drgnutia (hociktorým smerom kam drgnem je kopček), poloha je stabilná (guľčeka je v dolinke), a naopak ak existuje smer v ktorom sa nám po drgnutí potenciálna energia zníži (týmto smerom je pravdepodobne krásny výhľad), poloha je labilná (guľčeka je na vršku, aspoň z časti). Čiže nám stačí zistiť ako sa správa potenciálna energia sústavy pri malom vychýlení tj. ako sa zmení výška ťažiska.



Obr. 1

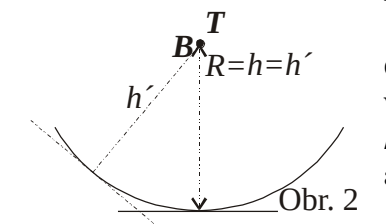
Začneme tým že si nakreslíme obrázok zjednodušenú verziu našej kolisky z mlgúňom

Teraz si treba iba uvedomiť čo je to kolísanie. Áno správne uvedomili sme si že kolísanie je to isté ako otáčanie sa okolo stredu krivosti tých chobotiniek na spodu kolisky.

Môžu nastať 3 prípady : a) $R > h$, b) $R = h$, c) $R < h$.

Prípad a)

To je prípad mlgúňa na obrázku. Nuž otočme si našu kolísku o malý uhol ako na obrázku 2. Keďže sme otáčali kolísku vlastne okolo bodu pracovne nazvaného B je z obrázku jasné že h' tj. výška ťažiska po otočení je vyššia ako h . Toto isté sa stane ak kolísku vychýlime druhým smerom.



Obr. 2

¹Dve veci tu v krvi leží –

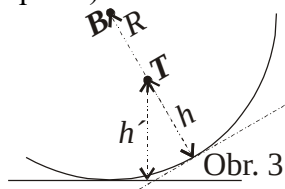
mráz po tele hrúzou beží:

detská hlava bez telička

a teličko bez hlavy.

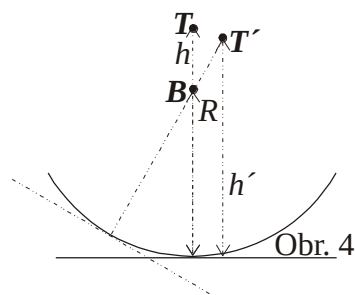
Výsledok: výška ťažiska sa pri ľubovolnom smere (sú iba dva) vychýlení zvýši $\rightarrow$ potenciálna energia ($E_{Pot} = mgh$) sa tiež zvýši $\rightarrow$ poloha je stabilná. Aby som citoval slová ostrieľaného kovboje z divokého západu : „Měl těžište proklatě nízko!“

Prípad b)



Ťažisko sa nachádza v našom pracovnom bode s názvom B a otáča sa okolo neho (tj otáča sa okolo seba) a tým pádom ani nemení svoju výšku od zeme. Pre kontrolu obrázok 3. Evidentne poloha je indiferentná. Indián Plešivé Kopyto povedal : „Hmm.“.

Prípad c)



Situáciu znázorňuje obrázok č. 4. Už z obrázka je jasné že poloha ktorá nám ako jediná ešte ostala nepoužitá tu sedí. Pri každom malom (pochopteľne ak ho vychýlite o 360° tak sa nič nezmení, aby bolo jasno) vychýlení sa potenciálna energia zmenší a teda teleso sa rado tadiaľ spustí a poloha je značne nestabilná. Tentoraz slová slávneho kovboja z divokého východu : „Ja sa asi pretočím!!!“.

Tak tuto končím, pokiaľ sa chcete ešte dačo viac dozvedieť o rôznych polohách, doporučujem Kamasútru.

A-2.2 Romantický západ slnka (Opravoval Robo)

Slnko vysoko nad našimi hlavami má kruhový tvar, pri svojom západe však „šišatie“ – z kruhu sa stáva elipsa. Vysvetlite prečo. Skúste tiež odhadnúť sploštenie Slnka, teda pomer jeho zdanlivej výšky a šírky tesne pred západom.

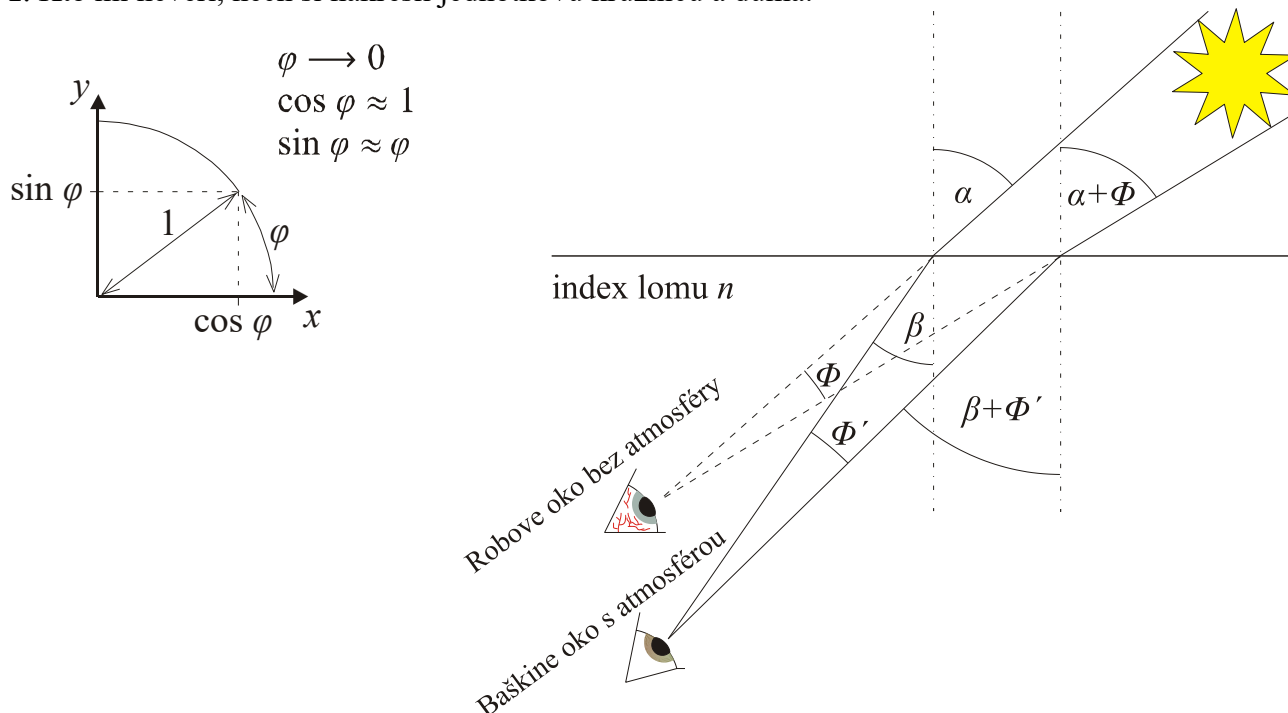
„Cherchez la femme“, hovoria Francúzi. Riešiteľ FKS hovorí: „Za všetko môže index lomu“. Áno, nemýlite sa. Uvažujme: Zem má atmosféru. Atmosféra ale nie je homogénna, v závislosti od výšky, v ktorej sa vzhľadom na zemský povrch nachádzame, sa v nej mení množstvo veličín, napr. hustota vzduchu. V zmysle stredovekých predstáv si úlohu zjednodušíme: Zem je plochá a v jednej výške nadzemou má vzduch rovnaké parametre (tlak, teplotu a z toho vyplývajúci index lomu) Lúč prichádzajúci zo Slnka musí pred jeho dopadom na sietnicu nášho oka prejsť zemskou atmosférou, ktorú si teda môžeme predstaviť ako obrovské množstvo vrstvičiek s rovnakou hustotou vzduchu. Lúč sa na každej z týchto vrstvičiek láme a jeho trajektória sa zakrivuje. A keď konečne „padne“ do nášho zrakového orgánu, vidíme objekty na oblohe tam a také, kde a aké v skutočnosti nie sú. Tento jav dostal svoje pomenovanie, odborné sa mu hovorí astronomická refrakcia

Tolko kvalitatívne vysvetlenie, poďme rátať. Lom svetla popisuje Snellov zákon, podľa ktorého pri lome lúča platí $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$. Trochu upravená podoba pre i po sebe idúcich lomov je nasledovná: $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = n_3 \sin \alpha_3 = \dots = n_i \sin \alpha_i$. Všimnime si začiatok a koniec, t.j.:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_i \sin \alpha_i. \quad (1)$$

Tento výsledok má veľa príjemných stránok: vôbec nezáleží na tom, ako sa index lomu mení s výškou, kládne si teda môžeme predstaviť, že atmosféra začína „odrazu“ čím sa všetky výpočty zjavne zjednodušia.

Porátať presne astronomickú refrakciu je dosť obtiažne a je pri tom veľa drsnej matiky (odporúčané raňajky pre masochistov sú dve–tri difky + refrakcia). Preto uvedený výpočet, ktorý vám tu o chvíľu ukážem, bude len približný, aj keď bude dávať pomerne slušné výsledky pre „slušné“ rozmedzie uhlov dopadu lúčov. Napriek tomu sa však istej matematike predsa len nevyhneme. Konkrétnejšie, zaujíma nás problém, ako vyjadriť hodnoty goniometrických funkcií pre malé argumenty. Pre malé uhly φ (rádovo do 5°) môžeme $\sin(\varphi)$ nahradiť hodnotou φ (meranej v radiánoch); podobne pre malé uhly $\cos(\varphi)$ môžeme nahradiť 1. Kto mi neverí, nech si nakreslí jednotkovú kružnicu a dumá.



Taak ... dúfam, že sme už zdatne pripravení znášať útrapy výpočtov, tak sem s nimi. Nakreslime si obrázok, ako naša situácia vyzerá. V obrázku sú znázornené dva prípady („dvoj očí“). Do prvého z nich vchádzajú lúče, pri ktorých neuvažujeme ich zmenu dráhy vplyvom atmosféry. Do druhého oka už vchádzajú lúče zlomené. V obrázku sú ďalej znázornené všetky potrebné uhly a rozhranie vesmír (index lomu $n = 1$) – zemský povrch.

Z obrázka môžeme napísať:

$$\sin(\alpha + \theta) = n \sin(\beta + \theta') \quad (2)$$

$$\sin \alpha = n \sin \beta \quad (3)$$

Použitím goniometrických súčtových vzťahov pre sínus súčtu uhlov upravíme (2) do nasledovného tvaru:

$$\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta = n \sin \beta \cos \theta' + n \cos \beta \sin \theta' \quad (4)$$

Ďalej nahradíme $\sin \alpha$ podľa vzťahu (3) a $n \sin \beta$ vyjmeme pred zátvorku, následne dostávame:

$$n \sin \beta (\cos \theta - \cos \theta') = n \cos \beta \sin \theta' - \cos \alpha \sin \theta \quad (5)$$

Teraz použijeme predpripravené matematické okienko – všimneme si výraz $(\cos \theta - \cos \theta')$. Uhol θ je uhlový priemer Slnka, keď sa pozrieme do tabuliek, je to rádovo $0,5'$. Podobne aj θ' . Oba kosínusy nahradíme jednotkou a ľavá strana rovnice (5) nám vypadne. Na pravej strane zasa $\sin \theta$ a $\sin \theta'$ nahradíme θ a θ' . Po týchto úpravách a priblíženiach dostanem:

$$\theta' = \frac{\cos \alpha}{n \cos \beta} \theta. \quad (6)$$

Ďalej: $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$, použijem (3) a po menších úpravách môžem napísať výsledok:

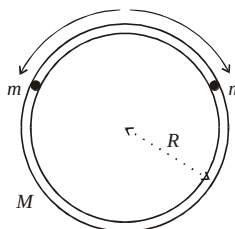
$$\theta' \approx \frac{n \cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \theta. \quad (7)$$

Stačí už len dosadiť vhodné hodnoty. Index lomu n je konštanta, z tabuliek sa dočítame, že pre prízemnú vrstvu atmosféry je jeho hodnota 1,005. Uhol α si zvolíme 80° . Zistíme, že $\theta' \approx 0,87 \theta$. Opäť nahliadneme do tabuliek a zistíme, že uhlový priemer Slnka je približne (už spomínaných) $32''$. Teda kým hlavná polos elipsy bude mať uhlový priemer $32''$, vedľajšia bude menšia, približne $28''$. Ak nahliadneme do múdrych meteorologických alebo astrofyzikálnych kníh, alebo jednoducho zagooglíme, zistíme, že sa nemýlime a nemusíme náš výpočet hádzať do koša.

Na záver pár určite nie nevýznamných poznámok. Tak napr. presnosť modelu, t.j. či nám vôbec dáva nejaké rozumné výsledky pre limitné hodnoty uhla α . Keď si do výsledného vzťahu (7) dosadíme alfa blízke 90° (teda slnko zapadá veľmi tesne nad obzorom), θ' ide do nuly. Keďže však západy slnka vplyvom nerovností zemského povrchu pozorujeme 5° - 10° nad horizontom, riešenie tejto „zvrhlosti“ môžeme kľudne prenechať už spomínaným masochistom ako výdatnú porciu k obedu. Tot' vsio.

A-2.3 Hula Hoop (Vzorák by Kubus, opravoval Juro)

V tenkej dutej obruči s polomerom R a hmotnosťou M sa môžu bez trenia pohybovať dve guľičky. Každá z nich má hmotnosť m . Obruč je na začiatku vo zvislej polohe, pekne položená na podložke, pričom guľičky sa nachádzajú tesne pri sebe v jej najvyššom bode. Z tohto bodu ich necháme voľne klesať vo vnútri obruče. Čuduj sa svete, keď budú guľičky asi v takej polohe ako na obrázku, obruč trochu podskočí. Pre aké M, m , tento jav nastane?



Pozrime sa, ako to vlastne v tej obruči funguje. (Čítaj: „Rozanalyzujeme si pôsobiacie sily.“) Jediné sily, ktoré na obruč pôsobia, sú tiažová sila a kontaktné sily od guľičiek. Tiažovú silu vieme hneď, ako však na obruč tlačia/ťahajú guľičky? Toto zistíme najlepšie tak, že sa pozrieme na guľičky samotné:

Znova, na každú guľičku pôsobí tiažová sila $G = mg$, a takisto nejaká reakčná sila T od obruče. No a keďže tu nie je žiadne trenie, táto sila môže pôsobiť iba v smere kolmom na jej povrch. Aby sme zistili veľkosť tejto sily, napíšme si 2. Newtonov zákon, $F = m \cdot a$. Konkrétne si napíšeme len tie zložky, ktoré pôsobia v smere kolmom na obruč, pretože práve tam sa skrýva naše T . (Pozor: často pracujeme s tým, že sila F je vektor, ale aj zrýchlenie a je vektor, na čo často zabúdame!) Predpokladajme, že obruč je ešte stále na svojom mieste, a zavedme si nejakú súradnicu popisujúcu polohu guľičiek – napríklad uhol φ . (t.j. obvodový uhol, ktorý každá z guľičiek už prešla po obruči.)

$$T + G \cdot \cos \varphi = m \cdot a_{\text{kolmé}}.$$

A s akým zrýchlením sa pohybujú guľičky? Okamžitú rýchlosť guľičiek dostaneme zo zákona zachovania energie (nemáme trenie):

$$v^2 = 2gR(1 - \cos \varphi),$$

a keďže guľičky sa pohybujú po kružnici, okamžité zrýchlenie bude rovné

$$a_{\text{kolmé}} = v^2/R.$$

Podosadzovaním do prvej rovnice dostávame výraz pre reakčnú silu T :

$$T = m \cdot 2gR(1 - \cos \varphi)/R - mg \cdot \cos \varphi,$$

$$T = mg(2 - 3\cos \varphi).$$

Toto je veľkosť sily, ktorou pôsobí každá guľička na obruč (alebo obruč na guľičku, to je to isté!), keď je práve v polohe φ . Horizontálne zložky týchto dvoch síl sa navzájom vyrušia.

V zvislom smere sú tu dve zvislé zložky T , každá o veľkosti $T \cos \varphi$ a ešte tiaž obruče o veľkosti Mg . Kým prevláda tiažová sila, reakcia od podložky drží obruč na mieste; keď však prevládnu guľičky, nemá ju čo držať a hop! Túto podmienku môžeme teda zapísať ako

$$\begin{aligned} Mg &< 2T \cos \varphi, \\ Mg &< 2mg(2 - 3 \cos \varphi) \cos \varphi, \\ M/m &< 2 \cos \varphi (2 - 3 \cos \varphi) = f(\varphi). \end{aligned}$$

Našou otázkou teraz je, aké hodnoty M a m je toto možné aspoň pre nejaké φ ? Funkcia f má deriváciu

$$\begin{aligned} f'(\varphi) &= -2 \sin \varphi (2 - 3 \cos \varphi) + 2 \cos \varphi (3 \sin \varphi), \\ f'(\varphi) &= 12 \sin \varphi \cos \varphi - 4 \sin \varphi = 12 \sin \varphi (\cos \varphi - 1/3), \end{aligned}$$

$f'(\varphi) = 0$ v intervale $[0, \pi]$ keď $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ (minimá f) alebo keď $\cos \varphi = 1/3$, vtedy bude $f(\varphi)$ maximálne. Dostávame sa (dosadením $\cos \varphi = 1/3$) nakoniec k rovnici

$$\begin{aligned} M/m &< 2 \cos \varphi (2 - 3 \cos \varphi) < 2(1/3)(2 - 3(1/3)), \\ M/m &< 2/3. \end{aligned}$$

(Inými slovami, guľičky musia vážiť spolu aspoň trikrát toľko, čo obruč.) Toto je jediná podmienka na to, aby obruč aspoň trochu podskočila – musí byť dostatočne ľahká, aby ju šmýkajúce sa guľičky zvnútra postrčili.

A-2.4 Piestovisko (Opravoval Robo A.)

Vo valcovej nádobe vo vertikálnej polohe sa nachádza piest, ktorý ju rozdeľuje na dve časti. Každá z nich obsahuje rovnaké množstvo vzduchu. V rovnovážnej polohe pri teplote T je pomer objemov (resp. výšok) rovný η . Odvtedy sa teplota zmenila na T' . Aká je jej hodnota ak je nový pomer objemov rovný η' .

Takže zdravím všetkých skalných milovníkov FKS. Tento príklad bol fakt ľahký, aj keď sa vám to mnohým nezdalo. Takže poďme bez obkecov k riešeniu.

Keď je pomer objemov valcov pri teplote T rovný η , tak by sa mal zachovať pri ľubovoľnej teplote T' (aspoň v slušných valcoch to tak býva). Podľa zadania sa však musí zmeniť. Potom rýchlo dôjdeme k záveru, že hmotnosť piesta vo valci nemožno zanedbať. Označme V_1 , p_1 objem a tlak vzduchu v hornej časti valca, V_2 , p_2 v dolnej časti pri teplote T . Analogicky označme V'_1 , p'_1 , V'_2 , p'_2 veličiny po zmene teploty na T' . V rovnovážnej polohe je logicky piest v pokoji, teda výslednica síl na neho pôsobiacich sa musí rovnať 0. Potom pre obidve teploty dostaneme vzťahy:

$$\begin{aligned} p_1 S + mg &= p_2 S, \\ p'_1 S + mg &= p'_2 S, \end{aligned}$$

(kde S , m sú plocha a hmotnosť piesta a g je tiažové zrýchlenie). Z týchto rovníc dostaneme vyradením parametrov m , g , S krásny vzťah:

$$p_1 - p_2 = p'_1 - p'_2.$$

Ihneď si spomenieme na stavovú rovnicu, z ktorej vyjadríme všetky neznáme tlaky a z predošlej rovnice dostaneme:

$$NkT/V_1 - NkT/V_2 = NkT'/V'_1 - NkT'/V'_2,$$

kde N je počet molekúl vzduchu, k Boltzmanova konštanta. Po vykrátení veličín, ktoré sme si práve zaviedli, dostaneme:

$$T/V_1 - T/V_2 = T'/V'_1 - T'/V'_2.$$

Podľa zadania si onačíme napríklad $V_1 = \eta V_2$, potom analogicky $V'_1 = \eta' V'_2$. Po niekoľkých algebraických úpravách dostaneme:

$$T' = T \frac{V'_2}{V'_1} \frac{\eta' (1 - \eta)}{\eta (1 - \eta')}.$$

Nášou jedinou úlohou je už teda len určiť pomer V_2'/V_1' . Keďže náš valec je slušný, nemá vo zvyku často meniť objem, preto platí:

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= V_1' + V_2', \\ (\eta + 1)V_2 &= (\eta' + 1)V_2', \\ V_2'/V_2 &= (\eta + 1)/(\eta' + 1). \end{aligned}$$

Dosadením nášho triumfálneho výsledku do nášho čiastočného vzťahu dostaneme dlho očakávaný výsledok:

$$T' = T \frac{\eta' \frac{1-\eta}{\eta} \frac{\eta+1}{\eta'+1}}{\eta \frac{\eta-1}{\eta'-1} \frac{\eta+1}{\eta'+1}} = T \frac{\eta' \frac{\eta-1}{\eta'-1} \frac{\eta+1}{\eta'+1}}{\eta \frac{\eta-1}{\eta'-1} \frac{\eta+1}{\eta'+1}}.$$

Pripomeniem, že niektorí z vás boli zmätení z toho, ako si majú zvoliť pomer objemov. Je zrejmé, že táto voľba výsledok nijak neovplyvní (ak by som si zvolil $V_2 = \eta V_1$ došiel by som rovno k 2. výsledku). Väčšina z vás príklad vystihla, občas sa vyskytli nejaké chyby v úpravách, za tie som strhával málo bodov (veď mýliť sa je ľudské). Niektorý ste príklad vystihli sčasti, pričom vám chýbala nejaká tá rovnica, aby ste to vedeli dopočítať. Vtedy som zohľadnil, koľko z vášho postupu bolo správne. Na záver by som vám chcel popriať mnoho úspechov v škole, vo vašom živote a pri riešení FKS.

FYZIKÁLNY KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR

výsledková listina A – kategórie po 2. sérii zimného semestra 21. ročníka

Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	①	A-2.1	A-2.2	A-2.3	A-2.4	Σ	Σ
1. Hrdá	Marcela	4IB	G BA J. Hronca	20,0	5,0	5,0	5,0	5,0		40,00
2. Imriška	Jakub	4 A	G BA J. Hronca	19,5	5,0	5,0	5,0	5,0		39,50
3. Bzdušek	Tomáš	sp A	G Piešťany	18,0	5,0	5,0	5,0	5,0		38,02
4. Fačkovec	Boris	se. A	G Piešťany	19,7	5,0	4,0	5,0	3,0		37,72
5. Kajtár	Gergely	ok.	G Hansa Selyeho VJM	18,5	5,0	2,5	5,0	5,0		36,50
6. Kucharík	Marcel	4D	G MRŠ NMV	20,0	5,0	3,5	2,5	5,0		36,00
7. Perešíni	Peter	4F	G BB Tajovského	16,0	5,0	5,0	4,0	5,0		35,00
8. Fecko	Stanislav	se. A	G Pankúchova	18,0	5,0	-	5,0	4,5		34,12
9. Bogár	Ondrej	3 E	G LŠ Trenčín	15,7	5,0	3,5	3,5	5,0		33,70
10. Takács	Michal	4F	G BB Tajovského	17,0	3,0	4,0	4,0	5,0		33,00
11. Zámečník	Peter	4D	G MRŠ NMV	16,0	5,0	2,5	2,5	5,0		31,00
12. Škrovinová	Eva	sp	G Nitra Párovská	15,7	5,0	2,5	2,0	3,0		30,06
13. Kaniansky	Miroslav	ok. A	G Piaristické Nitra	13,5	5,0	2,0	3,5	4,0		28,00
14. Kravec	Martin	4 A	G PH Michalovce	13,0	2,5	2,0	5,0	5,0		27,50
15. Szabadoš	Michal	sp	ŠpMNDaG	14,8	5,0	1,5	-	3,5		26,82
16. Póbišová	Zuzana	4 F	G BB Tajovského	14,0	5,0	2,0	2,5	3,0		26,50
17. Sudolský	Michal	3 F	G BB Tajovského	11,5	2,0	1,0	5,0	5,0		26,32
18. Danko	Juraj	4	G BA J. Hronca	13,5	5,0	2,5	3,0	2,0		26,00
19. Genzor	Jozef	3 A	G sv. Františka	13,0	2,5	1,5	2,0	5,0		25,96
20. Hreha	Ján	3	G Liptovský Hrádok	14,4	2,5	5,0	2,0	-		25,87
21. Mikuláš	Ján	ok.	G BST Lučenec	15,5	5,0	1,0	3,0	5,0	-4	25,50
22. Piterka	Tomáš	ok. A	G Piaristické Nitra	11,5	1,5	3,5	2,0	4,5		23,00
Štolcová	Jana	4	G Piaristické Nitra	10,5	5,0	1,5	1,0	5,0		23,00
24. Berta	Peter	3 A	G Veľké Kapušany	10,1	2,5	-	3,0	5,0		22,59
Hergelová	Beáta	4 B	G BST Lučenec	8,0	5,0	3,0	2,5	5,0	-3	20,50
26. Pozník	Michal	3 B	G BA A. Einsteina	7,5	5,0	2,0	2,5	1,5		20,48

27. Rehák	Matúš	sp	G Skalica	8,0	5,0	1,5	2,5	-	18,96
28. Galica	Tomáš			11,5	2,5	2,0	-	2,0	18,00
29. Magyarová	Katarína	se.	G BST Lučenec	12,0	2,5	1,5	-	0,5	17,90
30. Švihorík	Róbert	sp	G Nitra Párovská	7,7	2,0	2,0	1,0	3,0	17,60
31. Korch	Jakub	ok. A	G Piaristické Nitra	10,0	1,5	2,0	2,0	2,0	17,50
32. Salaj	Michal	3 A	G Snina	9,7	-	-	3,0	2,5	16,80
33. Basista	Peter	4 A	G PH Michalovce	9,5	4,0	2,5	-	-	16,00
34. Foltin	Miroslav	4 C	G Jána Hollého	13,5	-	-	-	-	13,50
35. Pálenkár	Michal	3 A	G BA A. Einsteina	7,4	-	-	-	-	7,45
36. Herman	Peter	3 B	G BA J. Hronca	6,5	-	-	-	-	6,50
37. Miňo	Lukáš	4 E	G PH Michalovce	1,8	1,5	1,0	1,5	0,5	6,30
38. Pavlíček	Tomáš			4,5	-	-	-	-	4,50
39. Šinko	Martin	3 C	G BA A. Einsteina	2,1	-	-	-	-	2,10
40. Kocun	Miroslav	3 A	G BA A. Einsteina	0,7	-	-	-	-	0,65
41. Luptáková	Paula	4 F	G BB Tajovského	0,3	-	-	-	-	0,30

Milý riešiteľ/ka. Pripravili sme pre vás prekvapenie. Pre viac informácií pozri www.fks.sk/FX

§ E = mc² (2.časť)

„Objekt Pravoslav Prestrelil, boli ste uznaný vinným z porušenia Zákona 3466884/67 899 344 p.n.l., § δκμΘΕ, ktorý ustanovuje rýchlosť svetla za maximálnu povolenú rýchlosť v tomto vesmíre. Vzhľadom na minulé priestupky ste odsúdený na doživotnú izoláciu, aby ste nemohli nabádať iné objekty k porušovaniu zákona.“

Vzápätí sa ho chopili dvaja strážcovia, čo bol dosť zvláštny pocit – nie žeby to bolo akoby sa vás dotýkal niekto neskutočný, práve naopak. Bolo to, ako by sa vás dotýkal niekto skutočnejší ako vy. A tak dokonalú súdnu sieň vystriedalo dokonalé väzenie. Bolo... jednoducho väzenské, väzenskejšie ako akékoľvek väzenie, ktoré by podľa zdravého rozumu mohlo existovať. Cela bola maximálne celovitá, mreže mrežovité, až oči prechádzali, jediné, čo tak trochu rušilo celkový dojem, boli väzni. Nebolo ich veľa a nevyzerali až tak väžňovito, ako by mohli. Keď bol Pravoslav s efektným postrčením dovedený do cely, nevidel žiadneho spoluväzňa. Dvere sa zatvorili s nutným tresknutím a diabolským smiechom strážcu, ktorý znel, akoby ho trénoval minimálne dve hodiny denne. Rozhliadol sa po cele. Jej celovitosť bola takmer dokonalá. Rušila ju len jediná vec – na jednej priči stála klieťka s tarbík. Vôbec sem síce nezapadala, ale pôsobila podivuhodne príjemne a nedokonalo. Pravoslav Prestrelil bol s prehliadkou cely rýchlo hotový - všetko bolo tam, kde by ste to očakávali, a tak sa začal venovať klieťke. Tarbík si ho nevšimol a zaryto pochodoval vo svojom kolese. Vtedy Pravoslav urobil tradičnú chybu ľudí, ktorí prišli do styku s niečím malým a chlpatým: automaticky predpokladal, že je to aj milé... Zaľukal na klieťku:

„No ahó! Ty si ale pekný....“

Tarbík naňho vrhol vražedný pohľad.

„Si myslíš, že si výkvet živočíšnej ríše, ty samčí šovinista?!“

Pravoslav si to síce doteraz skutočne myslel, ale nepovažoval za múdre sa o tom zmieňovať. Vlastne nenašiel nič múdre, čo by mohol v tejto situácii povedať a zatváril sa nepríliš inteligentne.

„No čo čumíš? A to „pekný“ si vyprosím! Ešte si nevidel tarbíčku, či čo?“

„Čauko, Pufino! Jeho si nevšímaj, je trochu mimo. Však vieš, ako pôsobia ONI na Homo sapiens...“

Vtedy toho už mal Pravoslav tak akurát dosť:

„Hej! Smiem vás upozorniť na svoju prítomnosť? Toto je už vrchol! Dobre! Nejakí ONI ma strčia do basy, že prekračujem rýchlosť svetla. OK. Ale že sa moje vlastné podvedomie baví radšej s nejakým tarbíkcom ako so mnou, to už fakt prekračuje všetky medze! Požadujem vysvetlenie!“

Upreli sa naňho dva kritické pohľady: jeden u drôtenej klietky a druhý zvnútra jeho hlavy.

„Tarbíčkou. Som samička, jasné? Nemôžem za to, že ten čo mi dával meno, mal zoologické znalosti končiace pri hot-dogoch. No, tak Pravo, mal by si začať, lebo sa nám tu ešte rozčúli...“

Pravo vo vnútri jeho hlavy si vzdychol.

„No dobre, keď myslíš... Počul si už o zvinutých rozmeroch? No, tak tam teraz sme. V jednom zvinutom rozmere, kde majú úrady ONI – Ostražití Nekompromisní Inšpektori. Ja som ti radil, aby si si nezačínal s tým fyzikom. Ale ty nie, využívaš len 10% mozgu, ale stále musíš byť ten najmúdrejší... A tak si tu a ja tu trčím s tebou. ONI si fakt potrpia na dodržiavanie tých ich Zákonov. A majú fakt dobrý systém, väčšina ľudí v živote ani nepríde na to, že sa vôbec dajú porušiť...“

(pokračovanie nabudúce)