



Fyzikálny korešpondenčný seminár

31. ročník, 2015/2016

FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava

e-mail: otazky@fks.sk

web: <http://fks.sk>

Vzorové riešenia 2. kola zimnej časti 2015/2016

1. Fínska sauna (opravovala Natália, vzorák Jaro)

Lukaf si na potulkách severom vyskúšal fínsku saunu. Bola vyhrievaná kachľami, na ktorých ležali horúce kamene. Lukafovi bolo akosi príliš teplo. Vzal teda priloženú studenú vodu a polial ňou kamene. Ale ako na potvoru sa potom cítil ešte horšie. Viete to vysvetliť?

Vyliať vodu na horúce kamene sa môže zdať ako dobrý nápad. Veď voda má predsa obrovskú mernú tepelnú kapacitu, takže by mala byť schopná absorbovať veľké množstvo tepla už pri malej teplotnej zmene. Tak prečo to nefungovalo? Aby sme si zodpovedali túto otázku, musíme sa zamyslieť nad nasledujúcimi tromi bodmi:

- ako funguje termoregulácia človeka, presnejšie povedané, akým spôsobom odvádza teplo
- ako funguje fínska sauna
- ako prebiehajú fázové premeny medzi kvapalnou a plynnou fázou (vyparovanie, var, kondenzácia).

Upozorňujeme čitateľov, že naše zamýšľanie sa bude podrobnejšie, než sme čakali vo vašich riešeniach.

Čo sa týka prvého bodu, treba si uvedomiť, že ľudské telo spotrebúva veľké množstvo energie. Je v podstate prepracovaným biologickým mechanizmom, ktorý ako vedľajší produkt uvoľňuje teplo ako každý iný stroj. Fyziologické funkcie človeka fungujú optimálne len pri istej teplote, približne 37°C , a tú sa snaží telo udržať. Ale čo ak je takého tepla viac? To sa musí nejakým spôsobom dostať von. A deje sa tak prostredníctvom potu. Pot sa vylučuje z tela cez pokožku a odvádza so sebou aj prebytočné teplo, čím významne prispieva k ochladzovaniu tela. Pot sa následne z povrchu kože odparuje. Pri jeho nadmernej produkcii (pri veľkej fyzickej záťaži) odparovanie nestačí a pot steká po tele.

Prejdime teraz k druhému bodu. Fínska sauna je tradične malá drevená konštrukcia vykurovaná kachľami, na ktorých bývajú poukladané kamene, o ktorých je v zadaní reč. Vykúrená sauna môže pokojne dosiahnuť aj teplotu vyše 100°C . To má za následok nízku relatívnu vlhkosť vzduchu¹, pretože teplý vzduch dokáže obsiahnuť väčšie množstvo pár než chladnejší.

¹Relatívna vlhkosť vzduchu je pomer medzi množstvom vodných pár pripadajúcich na jednotku vzduchu k maximálnemu možnému množstvu pár, ktoré môžu byť vo vzduchu pri danej teplote obsiahnuté.

Generálny partner



Partneri



PosAm



Mediálny partner



GRATEX
INTERNATIONAL

No a teraz už poďme konečne k samotným fázovým premenám. Majme uzavretú nádobu s vodou teploty T . To neznamená, že teraz všetky molekuly vody majú energiu zodpovedajúcu danej teplote. To je len priemerná hodnota. V skutočnosti sa tam nachádzajú molekuly s vyššou i nižšou energiou. Ak sa nejaká molekula s dostatočne veľkou energiou dostane blízko vodnej hladiny, tak môže vodu opustiť, vypariť sa. Všimnime si však, že takto môžu uniknúť len molekuly s najvyššou energiou, teda kvapalina sa ako celok ochladzuje².

Samozrejme, niekedy sa môže stať, že molekula vodnej pary sa vráti späť do kvapalnej fázy (jednoducho vletí do kvapaliny). Ak sa za jednotku času vráti do kvapaliny rovnaké množstvo pár, ako ju za tento čas opustí, tak je sústava v stave rovnováhy. Ak kvapalinu mierne zahrejeme, zvýši sa rýchlosť vyparovania, pretože v priemere viac molekúl má potrebnú energiu na opustenie kvapaliny. Zároveň však aj narastá koncentrácia pár, a teda rastie pravdepodobnosť, že sa nejaká molekula vráti, až sa postupne rýchlosť vyparovania a kondenzácie ustáli. To je dôvodom, prečo relatívna vlhkosť vzduchu klesá s rastúcou teplotou pri zachovanej absolútnej vlhkosti.

Toto všetko má ešte jeden, pre nás dôležitý, dôsledok. Ak je vysoká relatívna vlhkosť vzduchu, tak vyparovanie prebieha pomalšie, pretože veľa pár sa vracia späť do kvapaliny.

Vyzbrojení týmito poznatkami sa konečne môžeme vrhnúť na zodpovedanie otázky, prečo voda Lukafovi nepomohla. Čo sa vlastne deje?

Lukaf si myslel, že keď vyleje vodu na kamene, tak tá absorbuje teplo a vzduch sa minimálne prestane ďalej zahrievať. To sa aj stalo, ale nie presne tak, ako očakával. Akonáhle sa molekuly vody dostali do kontaktu s horúcimi kameňmi, tak prijali dostatočné množstvo tepla na to, aby sa vyparili. Možno sa nevyparila všetka voda, ale väčšinu energie získala tá časť vody, ktorá prišla do kontaktu s kameňmi ako prvá a ten zvyšok zostal relatívne chladný. Možno konštatovať, že keby voda neprišla do priameho styku s kameňmi, tak by Lukafova stratégia mohla fungovať. Lenže takto sa teplo z kameňov odvieďlo prostredníctvom vodných pár do vzduchu. A tu nastal problém.

Vzduch v saune nemá vo všetkých jej zákutiach rovnakú teplotu. Najteplejší je pri kachliach a so vzrastajúcou vzdialenosťou od nich chladne. To má ale, ako sme si uviedli, za následok, že relatívna vlhkosť vzduchu vo väčšej vzdialenosti je väčšia, no a to spôsobuje, že odparovanie potu z tela je pomalšie, a tak sa spomaľuje odvádzanie tepla z tela.

No má to ešte jeden, možno povedať významnejší, dopad na prehrievanie tela. Ľudské telo je s jeho teplotou 37°C relatívne najchladnejším objektom v saune, preto na ňom budú vodné pary kondenzovať. Tento jav dobre poznáte, keď dýchnete na okno v chladný deň. Okno sa zarsí, lebo na ňom skondenzujú vodné pary, ktoré sú obsiahnuté v teplom dychu. V prípade sauny vodné pary skondenzujú na „studenom“ tele, pričom mu odovzdajú svoje latentné teplo.

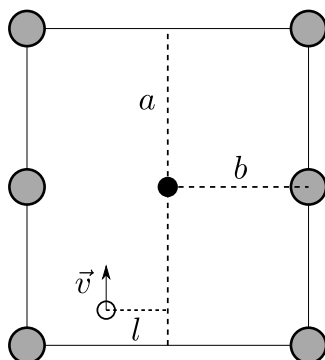
Vodné pary tak spôsobujú zohrievanie tela dvojako, jednak spomaľujú prirodzené odvádzanie tepla potením a dvak vlastnou kondenzáciou na tele odovzdávajú telu svoje latentné teplo. Nabudúce si Lukaf už určite rozmyslí, či bude v saune liať vodu na horúce kamene.

2. Ľadový biliard (opravoval Jaro)

Samec a Kubo majú radi biliard a zimu. Raz si povedali, prečo to neskombinovať? Vyšli si na najbližšie zamrznuté jazero a vysekali doň diery ako na biliardovom stole, pričom ich hracia plocha mala rozmery $2a \times 2b$. Potom si vzali dva hladké kamene, biely a čierny, oba s polomerom R . Čierny položili do stredu

²volá sa to latentné teplo vyparovania

hracej plochy, biely položili do vzdialenosti l od hlavnej osi tejto plochy. Na to sa Samec rozbehol (alebo skôr rozkláľ) na ľade, narazil do bieleho kameňa a poslal ho rýchlosťou v pozdĺž hracej plochy. Biely kameň narazil do čierneho, ten sa pohol a po chvíľke padol rovno do jednej z vyhlíbených dier. Aká musela byť vzdialenosť l , aby sa mu to podarilo? Akú mal kameň rýchlosť?



Obr. 1: Hracia plocha

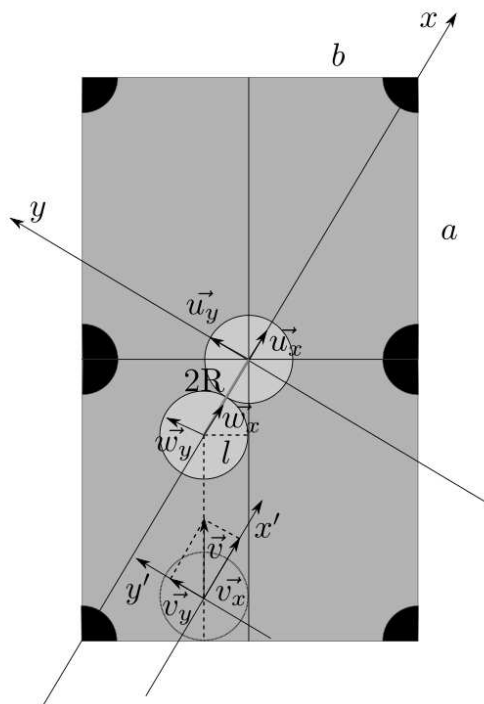
Uvažujte, že sa pri pohybe na ľade ani pri zrážke kameňov energia nestráca. Taktiež predpokladajte, že kamene nerotujú.

Prv než sa pustíme do počítania, popíšme si celú situáciu, aby sme vedeli, čo sa presne deje. Čierny kameň je umiestnený v strede klziska, biely vo vzdialenosti l od jeho osi. Biely uvedieme do pohybu pozdĺž osi klziska. Aby sme vôbec mali šancu zasiahnuť čierny kameň, musí byť vzdialenosť $l \leq 2R$. Nech je biely kameň naľavo od osi klziska, aby sme boli konzistentní s obrázkom zo zadania. V takom prípade máme šancu poslať čierny kameň len do pravej hornej diery.³

Zavedíme vhodnú súradnicovú sústavu, aby sme vedeli popísať polohu a pohyb kameňov. Ako vhodná sa zdá byť sústava s počiatkom v strede hracej plochy a osou x orientovanou do pravej hornej diery. Táto sústava má hneď niekoľko výhod, ktoré odhalíme neskôr, napríklad čierny kameň bude mať po zrážke nenulovú zložku rýchlosti len v smere osi x .⁴

³Pokiaľ nie je hracia plocha nejako ohraničená a kamene sa môžu odrážať.

⁴Je to nutná podmienka toho, aby sme sa trafili do diery.



Obr. 2: Rozbor situácie na ploche

Ale kam musíme zasiahnuť čierny kameň, aby sa pohyboval v smere osi x ? Dá sa ľahko nahliadnuť, že čierny kameň sa bude pohybovať po priamke určenej bodom, v ktorom do seba kamene narazili, a stredom čierneho kameňa.⁵ My potrebujeme, aby táto priamka prechádzala aj cez diery, t.j. bola totožná s osou x . Na základe toho vidíme, že oba kamene musia v momente nárazu ležať na x -ovej osi (viď obrázok).

Teraz môžeme odpovedať na otázku, ako ďaleko od osi klziska treba zasiahnuť čierny kameň, aby padol do diery. Pozrime sa na obrázok. Z podobnosti trojuholníkov dostávame $l/2R = b/\sqrt{a^2 + b^2}$, odkiaľ

$$l = \frac{2Rb}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Všimnime si, že tento výraz naozaj nadobúda len hodnoty $l \leq 2R$, čo je podmienkou toho, aby sa kamene zrazili.

Pristúpme teraz k preskúmaniu rýchlostí. Rýchlosť bieleho kameňa pred zrážkou je v . Jej zložky v smeroch jednotlivých osí sú $v_x = av/\sqrt{a^2 + b^2}$ a $v_y = bv/\sqrt{a^2 + b^2}$, čo získame opäť z podobnosti trojuholníkov. Čierny kameň je pred zrážkou v pokoji. Označme rýchlosť bieleho kameňa po zrážke w a čierneho u .

Ako prispievajú jednotlivé zložky rýchlosti v k výsledku zrážky?

X -ová zložka leží na spojnici stredov kameňov, t.j. kamene sa zrazia centrálnou rýchlosťou v_x . Y -ová zložka rýchlosti má smer spoločnej dotyčnice ku kameňom v bode nárazu, takže sa na zrážke nepodieľa. Môžeme si to predstaviť tak, že sa kamene popri sebe prešmyknú rýchlosťou v_y . Z toho ale vyplýva, že y -ové zložky rýchlostí kameňov sa nemenia, t.j. $w_y = v_y = bv/\sqrt{a^2 + b^2}$.

⁵Ak to zatiaľ nevidíte, nezúfajte. Náзорnejšiu predstavu získate, keď sa pozrieme na rýchlosti kameňov.

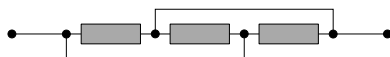
a $u_y = 0$. A čo x-ové zložky? Jedná sa o centrálnu zrážku, takže po zrážke budú mať kamene rýchlosti opäť len v smere osi x. Aké budú ich veľkosti, to závisí od hmotností kameňov. V zadaní nie sú hmotnosti kameňov explicitne vyjadrené. Je tam len zmienka o tom, že ich polomery sú rovnaké. Ak predpokladáme rovnaké hustoty kameňov, potom aj ich hmotnosti musia byť zhodné. My budeme predpokladať práve tento prípad.

Samozrejme, môžete si vyskúšať počítať so všeobecnými hmotnosťami kameňov m_1 , m_2 a výsledok zo vzoráku dostanete ako špeciálny prípad pre $m_1 = m_2$. Vaši skvelí vedúci vás však nechcú týrať matematickými úpravami, a tak si vystačíme len s týmto špeciálnym prípadom. Tu sa na chvíľu pristavme a zamyslime sa, prv než sa pustíme do bezhlavého rátania. Študujeme centrálnu zrážku dvoch rovnako hmotných kameňov, z ktorých je jeden pred zrážkou v pokoji. To je ale triviálna situácia, ktorú určite všetci dobre poznáte na príklade Newtonových guľôčok. Kamene si jednoducho pri zrážke „vymenia“ svoje rýchlosti, takže $w_x = 0$ a $u_x = av/\sqrt{a^2 + b^2}$.

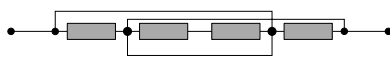
Môžete sa o tom jednoducho presvedčiť výpočtom tak, že si napíšete zákony zachovania hybnosti a energie a vyjadríte z nich príslušné neznáme rýchlosti.

3. Tri pletence (opravoval Vladko)

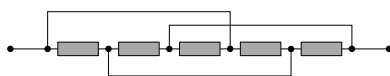
Paťo zas raz dostal chuť hrať sa s odpormi a vodičmi. Tak si nejaké zobral a začal ich s nadšením zapájať. Po chvíli bol z tej spleti káblov taký domotaný, že ani nevedel, aký odpor majú jeho výtvary a celá chuť ho prešla. Pomôžte mu opäť získať stratený elán a odpory, ak sú všetky rezistory rovnaké s odporom R a vodiče, ktoré ich spájajú sú dokonale vodivé.



Obr. 3: 1. zapojenie



Obr. 4: 2. zapojenie



Obr. 5: 3. zapojenie

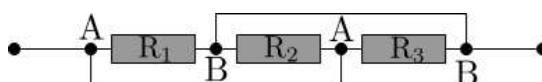
Poznámka. Nebojte sa prekresliť si tieto odporové schémy na iné - ekvivalentné.

Ako nám radí poznámka, nebudeme sa báť prekresľovať schémy na ekvivalentné. Odmenou za námahu nám budú jednoduchšie schémy majúce rovnaký odpor. Budeme využívať jeden trik, ktorého aplikácia nám nemení vlastnosti zapojenia (zachováva ekvivalentnosť): body schémy, ktoré sú spojené bezodporovo sú vyskratované, teda náboj medzi nimi dokáže neobmedzene prechádzať. Ľudovo povedané, náboj si ani nevšimne, že sa dostal do iného bodu schémy,

pokiaľ neprešiel odporom, lebo ho to nestálo žiadnu námahu. Fyzik tomu povie, že body majú rovnaký elektrický potenciál a pre nás to znamená to, že tieto body môžeme spojiť do jedného.

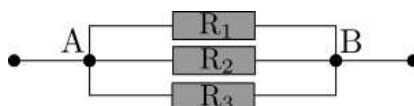
Predtým, ako sa vrhneme na jednotlivé schémy, si označíme body spojené bezodporovo rovnakým veľkým písmenom. Odpory si takisto rozlíšime indexami. Síce veľkosti jednotlivých odporov sú totožné, ale rozlíšenie nám zjednoduší zápis našich úvah pri prekresľovaní.

Prvý obvod:



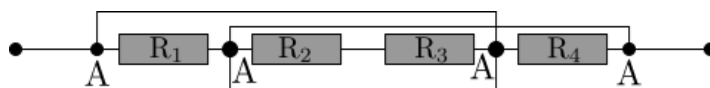
Obr. 6: Vyznačenie bodov v prvom zapojení

Z miesta A do miesta B sa dá dostať tromi cestami a na každej z nich je jeden rezistor. Schému môžeme prekresliť takto:



Obr. 7: Prekreslenie prvého zapojenia na ekvivalentné a jednoduchšie

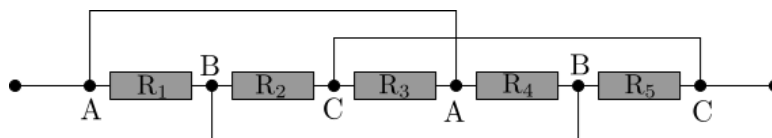
Jedná sa o tri paralelne zapojené rezistory s odporom R , teda celá schéma má odpor $R/3$. Druhý obvod:



Obr. 8: Vyznačenie bodov v druhom zapojení

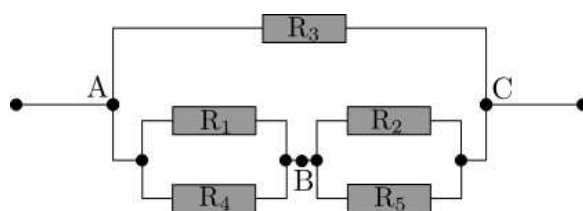
Hneď vidíme, že náboj sa vie dostať z jedného konca na druhý bez prechodu rezistorom, a teda odpor tohto zapojenia je nulový.

Tretí obvod:



Obr. 9: Vyznačenie bodov v treťom zapojení

Z miesta A sa do miesta B dostaneme dvoma vetvami s odporom R_1 resp. R_4 a z miesta B sa do miesta C dostaneme dvoma vetvami s odporom R_2 resp. R_5 . Takisto z A sa vieme dostať do C vetvou cez odpor R_3 .



Obr. 10: Zjednodušený a ekvivalentný náčrt tretieho zapojenia

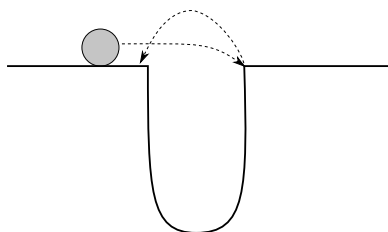
Teraz už poľahky zrátame odpor zapojenia. Dolná časť má odpor $R/2 + R/2 = R$ a celé zapojenie má teda odpor $R/2$. Za poznámku určite stojí, že v bode B môžeme vetvy vo vertikálnom smere rozpojiť a nič sa nezmení. Vzniknú tak dve vetvy, jedna s odpormi R_1 a R_2 a druhá s odpormi R_4 a R_5 . Skúste sami prísť na to, prečo tak môžeme urobiť bez obáv, že niečo v obvode pokazíme. Aké by museli byť veľkosti jednotlivých odporov, aby sa tak urobiť nedalo?

4. Útrapy mladého golfistu (opravoval Jimi, vzorák Filip)

Luxusko je hrozný buržuj. Dokonca začal hrať golf. Tam ho zaujal nasledujúci jav: ak namieril golfovú loptičku presne na stred jamky, tak loptička do jamky nespadla, namiesto toho sa dokonale pružne odrazila od opačnej, dokonale ostrej, hrany naspäť smerom k nemu.

Čo najlepšie odhadnite interval rýchlosti, ktorými sa musí pohybovať loptička po povrchu trávy smerom k jamke, pri ktorých dochádza k tomuto javu. Potrebne údaje o rozmere loptičky a jamky si nájdite sami. Rotáciu loptičky počas zrážky nemusíte uvažovať.

Ak neviete odhadnúť interval rýchlosti, tak nám napíšte rovnice, ktoré musia platiť v rôznych fázach pohybu (pred, počas a po zrážke). Takisto nám napíšte rovnice, ktoré vyjadrujú súvis rýchlosti loptičky v horizontálnom a vodorovnom smere pred a po zrážke.



Obr. 11: Zákerný roh jamky

Pri riešení príkadu je vždy dobré sa najskôr zamyslieť, aký výsledok očakávame, a až potom začať riešiť. Tak to bude aj v tomto vzoráku.

Pre malé rýchlosti loptička polomeru $R = 0,0213$ m narazí do protiľahlej steny jamky šírky $d = 0,108$ m a spadne dolu (pre extra malé rýchlosti sa dokonca skotúľa už po prvom okraji do jamky, ale týmto sa tu nebudeme zaoberať). Pri dostatočných rýchlostiach poklesne počas letu o menej ako R a narazí do protiľahlého okraja (hrany) jamky. Čo sa stane ďalej závisí od počiatočnej rýchlosti.

Okraj jamky v okamihu dopadu pôsobí len na jediný bod loptičky - je to identická situácia, ako keby loptička dopadla na naklonenú rovinu, ktorej normála je paralelná so spojnicou

miesta kontaktu a stredu loptičky. Z jednoduchšej geometrie je jasné, že čím viac loptička počas letu poklesne, tým miesto kontaktu bude vyššie vzhľadom na stred loptičky, a tým bude tá „naklonená rovina“ strmšia.

Čo sa stane pri dopade loptičky na naklonenú rovinu? Nech vektor rýchlosti zvierá s vodorovnou rovinou uhol α a naklonená rovina uhol β . Dopad je dobré riešiť vo vzťažnej sústave naklonenej roviny. Uhol dopadu je v nej $\alpha + \beta$ a je rovný uhlu odrazu. V pôvodnej sústave, ktorá je natočená o uhol β , bude preto uhol vektora rýchlosti a vodorovnej roviny po odraze $\alpha + 2\beta$. Veľkosť rýchlosti $v_z = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ sa po dopade nezmení.

Čo z toho? Akonáhle $\alpha + 2\beta$ bude väčšie ako $\pi/2$, tak po odraze bude smerovať naspäť.⁶ Kam presne? Ak je uhol tesne nad $\pi/2$, loptička vyletí vysoko nad jamku, bude mať však malú horizontálnu rýchlosť a dopadne do jamky.⁷ No ak je uhol ešte väčší, loptička sa odrazí síce naspäť, ale jamku preletí a dopadne ďaleko za. Hurá, to sú tie Luxuskové riešenia. A ak je uhol ešte väčší, tak sa loptička odrazí a po krátkom lete narazí do opačnej strany a spadne dole do jamky.⁸

Už len z tohoto rozprávania je jasné, že rovnice popisujúce tento dej budú zložité, aj keď budeme uvažovať len jednoduchý Luxuskov prípad bez viacnásobných odrazov od okraja.

Podme riešiť. Na začiatku ide o vodorovný vrh v tiažovom poli. Horizontálna zložka rýchlosti loptičky v_x je konštantná, vertikálna $v_y = gt$. Ak by v čase $t = d/v_x$ loptička poklesla o $h = gt^2/2 < R$, dôjde k zrážke s okrajom jamky. Pozor, zrážka nastane už v okamihu, keď sa stred loptičky priblíži k okraju na vzdialenosť polomeru R (nemusí preletieť celú šírku jamky d). Preto

$$\sqrt{(x-d)^2 + h^2} = \sqrt{(v_x t - d)^2 + g^2 t^4 / 4} = R.$$

Z tejto rovnice vieme (aspoň numericky) určiť čas t_z a polohu stredu loptičky x_z, h_z v čase zrážky.

Následne vyrátame uhol, pod ktorým dopadne, z vektora rýchlosti:

$$\tan(\alpha) = \frac{v_y(t_z)}{v_x(t_z)} = \frac{gt_z}{v_x}$$

a z jednoduchšej geometrie aj uhol „naklonenej roviny“, na ktorú dopadne

$$\cos(\beta) = \frac{R - h}{R}.$$

Vyrátame nový vektor rýchlosti po dopade

$$\vec{v} = (v_z \cos(\alpha + 2\beta), v_z \sin(\alpha + 2\beta)),$$

kde $v_z = \sqrt{v_x^2 + v_y^2(t_z)}$.

Následne je to obyčajný šikmý vrh s takouto počiatočnou rýchlosťou a polohou $(d - x_z, -h) = (d - v_x t_z, -gt_z^2/2)$. Riešenie splníme vtedy, keď preletí ponad prvý okraj jamky.

⁶Dokonca aj pre uhly tesne pod $\pi/2$ loptička vyletí dohora a smerom ďalej, ale potom dopadne opäť na hranu a odrazí sa naspäť. Nerobme si život zbytočne komplikovaný, a zabudnime na toto.

⁷Ak nedopadne na okraj, z ktorého sa odrazila... Fakt si nekomplikujme život.

⁸A existuje malý interval uhlov medzi, kedy narazí do druhého okraja jamky. Čo sa stane po tomto náraze necháme na dlhé zimné večery, keď si budeme chcieť komplikovať život.

Najjednoduchšie je teraz skúšať rôzne hodnoty počiatočnej rýchlosti a podľa týchto rovníc určovať, čo sa bude diať. Poďme aspoň približne odhadnúť, v akom intervale rýchlostí by sa mali riešenia nachádzať.

Jedno očividné ohraničenie je, že loptička musí ísť dostatočne rýchlo - počas letu k druhej strane jamky nesmie klesnúť viac ako o R , lebo by narazila do steny jamky a padla dnu. V takomto prípade letí čas $t = (d - R)/v_x$ a poklesne o $h = gt^2/2$. V hraničnom prípade $t_1 = \sqrt{2R/g}$. Preto $v_{x,min} > (d - R)/t_1 = (d - R)\sqrt{g/(2R)} \approx 1,3 \text{ m/s}$.

Aby sa odrazila od hrany naspäť, musí byť $\alpha + 2\beta > \pi/2$. Uhol α je vždy kladný, uhol β preto môže byť aj menší ako $\pi/4$. Nenapadá mi nič očividné, tak vyskúšajme nejaký náhodný uhol. Napríklad ukážme, že ak by $\beta = \pi/6$, tak rýchlosť bude priveľká a loptička bude po odraze pokračovať ďalej, čím získame horné ohraničenie rýchlosti. Vyrátajme teda čas zrážky t_2 a potrebnú rýchlosť v tomto prípade.

$$\cos(\beta) = 1/2 = \frac{R - h}{R},$$

$$h = R/2,$$

$$t_2 = \sqrt{2h/g} = \sqrt{R/g},$$

$$v_{x,max} = \frac{d - R \sin(\pi/6)}{t_2} = (d - R\sqrt{3}/2)\sqrt{g/R} \approx 1,9 \text{ m/s}.$$

Uhol α potom bude

$$\tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt_2}{v_x} = \frac{g\sqrt{R/g}}{(d - R\sqrt{3}/2)\sqrt{g/R}} = \frac{R}{d - R\sqrt{3}/2}$$

$$\alpha \approx 0,23.$$

Uhol po dopade bude $\alpha + 2\beta \approx 1,28 < \pi/2$ a loptička bude pokračovať ďalej.

Riešenia úlohy budú teda niekde v intervale v intervale 1,3 m/s až 1,9 m/s. Kde presne, na to už nám odpovie iba numerické riešenie⁹ (1,47 m/s až 1,87 m/s). Vidíme, že naše odhady dokonca vôbec neboli ďaleko :).

5. Citrón ti dobije baterky! (opravoval MaťoB, vzorák Justína)

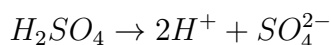
Využívali ste ako malí citrón ako zdroj energie? Že nie? Tak teraz to napravíme! Postavte si pomocou alobalu a medených drôtov, pozinkovaných (galvanizovaných) klincov alebo iných kovových kúskov vlastnú batériu. Ako elektrolyt môžete použiť kyselinu citrónovú alebo slanú vodu. Vysvetlite, s ktorými kovmi a s akými elektrolytmi nameriate medzi kovmi elektrické napätie. Následne pre vami zvolené elektródy a elektrolyt namerajte závislosť elektrického napätia medzi elektródami v závislosti od koncentrácie elektrolytu (slanej vody, resp. kyseliny citrónovej). Nezabudnite sa pokúsiť kvantifikovať chyby merania!

⁹Ak sa Vám to nechce programovať, no chcete sa len pohrať, tak simuláciu nájdete na http://fks.sk/~matob/vzoraky/2012_Frustating_golf_ball.exe.

Teória

Podstatou batérií je, že keď ich zapojíme do vhodného elektrického obvodu, budú generovať elektrickú energiu, bude cez ne „prebiehať“ elektrický prúd, a na ich koncoch nameriame elektrické napätie. Aby k tomuto všetkému mohlo dôjsť, je potrebná prítomnosť tzv. voľných iónov - aniónov a katiónov, ktoré budú „prenašať“ elektrický náboj medzi elektródami. Tieto získame za pomoci chemickej reakcie - elektrolýzy. Vďaka nej dôjde k nahromadeniu kladného náboja na jednej a záporného náboja na druhej elektróde, čím sa medzi nimi vytvorí elektrické napätie. Pri uzavretí obvodu, vložením takéhoto článku doň, začne nahromadený náboj cirkulovať cez elektrický obvod a vznikne tak el. prúd. Tento proces je pekným príkladom zmeny energie elektrickej na energiu chemickú.

Na konštrukciu batérie (alebo tzv. galvanického článku) potrebujeme elektrolytický roztok = **zdroj** voľných iónov. Elektrolytom sa môže stať čokoľvek, čo sa pri rozpustení „rozpadne“ na anióny a katióny. Uvádzame niekoľko príkladov:



Ďalej budeme potrebovať elektródy, teda miesto, kde anióny a katióny skrz chemické **reakcie oxidácie a redukcie** uvoľňujú alebo pohlcujú elektróny do/z elektródy. Elektródy vyberáme vhodne k elektrolytu tak, aby boli schopné reagovať s voľnými iónmi, a zároveň aby medzi nimi vznikol dostatočný potenciálový rozdiel.¹⁰ Môžu byť napríklad uhlíkové, platinové, zinkové, lítiové, kadmiové, alebo medené. Vhodnou kombináciu anódy a katódy sú napríklad zinková a medená elektróda.

Experiment

Pri našom experimente sme si ako elektrolyt vybrali roztok kyseliny citrónovej. Za elektródy nám poslúžili dvojcentovky s Kriváňom (15 kusov) a natrhané kúsky alobalu. Ďalšími potrebnými komponentmi boli vreckovky a voltmeter.

Kyselinu citrónovú sme rozpustili v 50 ml filtrovanej vody. Z toho sme zo známej charakteristiky vypočítali koncentráciu jednotlivých roztokov $c = m/V$ (Tab. 1). Postupne sme na seba naukladali mincu, vreckovku namočenú v kyseline, kúsok alobalu, a ďalšiu mincu (viď. Obr. 1 - 3). Tabuľka závislostí napäťovej charakteristiky od koncentrácie roztoku (Tab.2) je uvedená nižšie, ako aj graf vyplývajúci z tejto závislosti.

Odchýlku merania sme vypočítali zo závislosti $\sigma_c = \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial V}\right)^2 \sigma_V^2}$. Tohto sa vôbec netreba báť. Pre naše potreby však pokojne stačilo sčítať relatívne odchýlky, z čoho by sme nakoniec dostali $\sigma_c = \frac{m}{V} \left(\frac{\sigma_m}{m} + \frac{\sigma_V}{V} \right)$.

¹⁰Práve toto je najkľúčovejšia vec, treba si dať na ňu pozor ;)

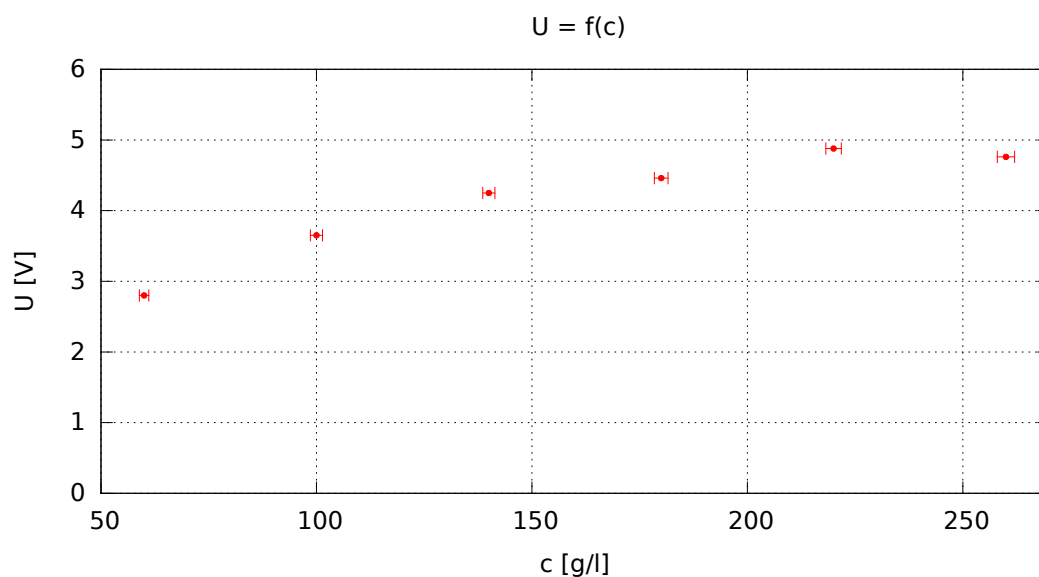
m $\pm 0,05$ [g]	c $\pm \sigma$ [g/l]
3	$60 \pm 1,1$
5	$100 \pm 1,4$
7	$140 \pm 1,4$
9	$180 \pm 1,6$
11	$220 \pm 1,8$
13	$260 \pm 2,0$

Tab. 1: Koncentrácia roztoku pre danú hmotnosť kyseliny citrónovej

c [g/L]	U [V]
60	2,88
100	3,65
140	4,25
180	4,46
220	4,88
260	4,76

Tab. 2: Tabuľka závislostí napäťovej charakteristiky od koncentrácie roztoku

Závislosť napätia na baterke v závislosti od koncentrácie elektrolytu



Obr. 12: Názorný príklad výroby

Nameraná chyba teda mohla vzniknúť pri meraní jednotlivých veličín, ale aj úbytkom objemu roztoku, ktorého koncentráciu sme zvyšovali, v dôsledku namáčania vreckoviek v ňom. I tak je však vypočítaná chyba merania zanedbateľná, a teda sme merali naozaj presne.

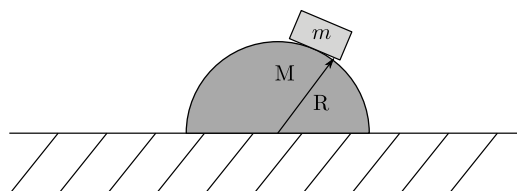
Komentár k riešeniam a bodovaniu

Ak ste nezabudli číselne odhadnúť chyby merania, urobili fotodokumentáciu a mali dostatočný počet meraní (~ 10 hodnôt), tak ste sa mohli tešiť na deväť bodov. Za chýbajúci odhad chýb merania išiel bod dole. Ďalšie body dole išli za nedostatočný počet meraní, chýbajúcu fotodokumentáciu, zlú interpretáciu dát a ďalšie chyby.

Taktiež by sme chceli špeciálne vyzdvihnúť riešenie Juraja Vaska, ktorý si dal neuveriteľnú námahu a preskúmal širokú paletu možností elektród a vycibril svoju metodológiu. Michaela Leinwatherová si dala taktiež námahu a veľmi citlivo premerala závislosť napätia od koncentrácie roztoku soli. Ďalšie pekné riešenia nám prišli od Hanky Mertanovej, Adi Tóthovej a Mateja Novotu. Všetky nájdete o chvíľku aj na stránke medzi ukázkovými riešeniami.

6. Polkúlová sústava (opravoval MaťoB)

Jimi zo skrine pri FKSkú vytiahol ďalšiu fakt kúl sústavu. Tá pozostávala z navoskovanej polgule polomeru R a hmotnosti M , ktorá sa môže pohybovať bez trenia po vodorovnej podložke. Na vrch polgule následne Jimi položil malé teliesko hmotnosti m , ktoré sa po povrchu polgule môže takisto pohybovať bez trenia. Jimiho by teraz zaujímalo aký uhol opíše teliesko na polguli predtým, než opustí jej povrch. Skúste nájsť výsledok pre prípad $m/M = 1$. Pri hľadaní konkrétneho numerického výsledku sa nebojte použiť počítač :)



Obr. 13: Teliesko na pohyblivej navoskovanej polguli

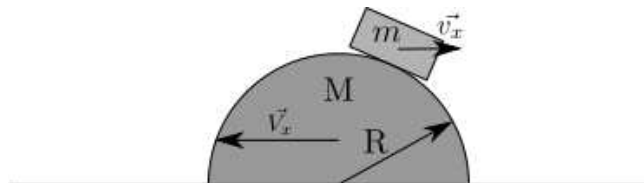
Čo sa stane, keď Jimi položí teliesko na vrch polgule? Začne sa pohybovať. Nakoľko teliesko pôsobí na navoskovanú polguľu spätné normálovou silou a medzi podložkou a polgoulou nie je trenie, tak sa bude pohybovať aj polguľa.

Miesto toho, aby sme si napísali pohybové rovnice pre pohyb polgule a telieska a uvažovali ako to urobiť a nezabudnúť pritom na normálovú silu, na to pôjdeme malým trikom a trochu netradičnejším spôsobom. Tým, ktorým nie je jasné, ako by vyzerali pohybové rovnice pre pohyb polgule a telieska, odporúčame pozrieť si príklad B4 z tretieho kola zimnej časti 29. ročníka a skúsiť si napísať pohybové rovnice v tomto prípade.

Keďže na sústavu polguľa - teliesko vo vodorovnom smere nepôsobí žiadna sila, tak ich spoločné ťažisko sa musí zo zákona zotrvačnosti pohybovať v tomto smere rovnomerným priamočiarym pohybom. Keďže na začiatku stálo, tak stáť aj zostane, pretože aj státie, pohyb nulovou rýchlosťou, môžeme považovať za rovnomerný priamočiary pohyb. Musí teda platiť, že

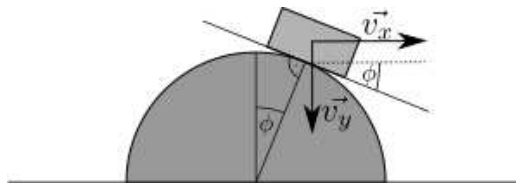
v x -ovom smere sa vzhľadom na podložku spoločné ťažisko sústavy nehýbe, a teda pre rýchlosti telieska v_x a gule V_x vo vodorovnom smere platí

$$mv_x = MV_x \implies V_x = \frac{M}{m}v_x.$$



Obr. 14: Znázornenie rýchlostí vo vodorovnom smere

Ak sa pozrieme na teliesko na polguli potom, ako opísalo uhol θ , a na celú situáciu sa pozrieme vo vzťažnej sústave spojennej s polguliou, tak v tomto momente začne platiť pre vertikálnu a vodorovnú zložku určitá podmienka. Vzhľadom na polguľu sa teliesko pohybuje vo vodorovnom smere rýchlosťou $v_x + V_x$. Ak sa má aj v nasledujúcom okamihu dotýkať povrchu polgule, tak celkový vektor rýchlosti telieska (v tejto vzťažnej sústave) musí ležať v smere dotýčnice v danom mieste.



Obr. 15: Preskúmanie pohybu telieska

Preto musí pre rýchlosti platiť podmienka

$$\frac{v_y}{v_x + V_x} = \tan \theta \implies v_y = v_x \left(1 + \frac{m}{M}\right) \tan \theta.$$

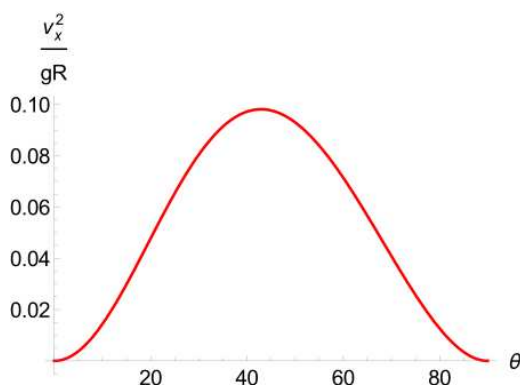
Keďže teliesko aj polguľa sa pohybujú bez trenia, tak platí zákon zachovania mechanickej energie. Na začiatku teliesko stojí a je na vrchu polgule, potom teliesko klesne o $R(1 - \cos \theta)$ a teliesko aj polguľa sa pohybujú.

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}MV_x^2 = mgR(1 - \cos \theta).$$

Odtiaľ vieme získať vzťah pre v_x :

$$v_x^2 = \frac{2gR(1 - \cos \theta)}{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \left(1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \tan^2 \theta\right)}.$$

Na čo nám to všetko bolo? Pozrime sa ako vyzerá graf funkcie v_x od uhla θ (napr. pre náš prípad $r = m/M = 1$).

Obr. 16: Závislosť kvadrátu rýchlosti v_x od uhla θ

Vidíme, že najprv rastie, no potom začne klesať. Môže ale niekedy počas pohybu klesať? Skúsme si intuitívne predstaviť pohyb telieska po polguli. Stojí, zrýchľuje... rýchlosť sa zväčšuje, až normálová sila medzi telieskom a polguliou klesne na nulu a teliesko sa od nej oddelí. Do tohto okamihu však nemôže spomaliť, pretože neexistuje sila, ktorá by mohla spomaliť teliesko vo vodorovnom smere. Ako môže teliesko teda spomaliť? Nemôže! Mohlo by sa teliesko oddeliť skôr ako v maxime? Nemohlo! Keď sa totiž x-vová zložka zväčšuje, tak to tiež znamená, že na teliesko pôsobí aj nenulová zotrvačná sila. Tá zmizne až v momente, kedy normálová sila poklesne na nulu. Skúste si to rozanalyzovať!

Jediný spôsob, kedy počas pohybu môže teliesko opustiť je v okamihu, keď je rýchlosť maximálna. Ak by sme si napísali pohybové rovnice v tomto okamihu (v okamihu odelenia už nemusíme uvažovať normálovú silu, keďže je rovná nule), tak by sme dospeli k rovnakej podmienke. Naozaj si to skúste!

Zadaním úlohy je nájsť tento uhol pre konkrétny prípad $r \equiv m/M = 1$. Jednou z možností je nakresliť si graf funkcie v nejakom tabuľkovom procesore a nájsť konkrétny uhol. To je úplne legitímne riešenie a veríme, že ho každý zvládne. My sa však teraz naučíme trochu pokročilejšiu metódu a tou je derivovanie. Keďže funkcia má maximum, tak v danom bode musí byť smernica dotyčnice ku grafu funkcie nulová (dotyčnica musí byť vodorovná).

Keď teda dosadíme za $m/M = r = 1$, a v_x^2 zderivujeme podľa uhlu θ ¹¹ a položíme rovné nule,

$$(1 + 2 \tan^2 \theta) \sin \theta - 4(1 - \cos \theta) \frac{\tan \theta}{\cos^2 \theta} = 0,$$

tak sa postupnými úpravami dostaneme k rovnici

$$\cos^3 \theta - 6 \cos \theta + 4 = 0.$$

Kubické rovnice síce nevieme riešiť, ale môžeme znovu siahnuť napr. po počítači a jeho tabuľkovom procesore, alebo si všimneme, že tento výraz je deliteľný výrazom $(\cos \theta - 2)$. Výraz $(\cos \theta - 2)$ je síce riešením tejto rovnice, ale nie riešením pôvodného problému pre uhol θ , pretože $\cos \theta$ pre žiadny uhol θ nemôže byť rovný 2.

¹¹Derivujeme funkciu v_x^2 ako funkciu θ , pretože ak je v danom mieste maximum v_x , tak je tam maximum v_x^2 a o v_x vieme, že je kladná.

Ak teda z rovnice vyjmeme tento výraz, tak sa dopracujeme ku kvadratickej rovnici

$$\cos^3 \theta - 6 \cos \theta + 4 = (\cos \theta - 2)(\cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 2) = 0,$$

ktorej riešením získame jediné riešenie:

$$\cos \theta = \sqrt{3} - 1 \implies \theta \approx 42,9^\circ.$$

Či už ste si uhol určili pomocou tabuľkového procesora alebo ste ho vypočítali, ak ste sa dopracovali k uhlu $\theta = 42,9^\circ$, tak ste dostali plný počet bodov. Pripomíname, že k úlohe sa dalo postaviť aj inak. A to napísať si pohybové rovnice, z nich vyjadriť normálovú silu, položiť ju rovnú nule a z tejto podmienky vyjadriť podmienku pre uhol θ . Dospeli by sme síce k rovnakému výsledku, no napočítali by sme sa viac. Tentoraz sme si ukázali netradičnejší postup, ktorý bol rýchlejší.

7. Kúrenie lávovým kameňom (opravoval MaťoB)

Zima v nevykúrenej chate je veľmi zlá vec. O tom vie svoje už aj Lukaf, ktorému, bohužiaľ, pri vykurovaní tej svojej došlo drevo a v blízkom okolí nevedel žiadne ďalšie nájsť. Našiel však lávový kameň s teplotou $T_{\text{kameň}} = 500^\circ\text{C}$ a tepelnou kapacitou C^{12} . Navrhnete spôsob, vďaka ktorému sa nám podarí získať maximálne možné množstvo tepla na ohriatie domu. Vami navrhnutý spôsob môže obsahovať iba cyklicky pracujúce stroje.¹³ Dom má príjemnú teplotu $T_{\text{dom}} = 20^\circ\text{C}$ a teplota okolia je $T_{\text{okolie}} = -20^\circ\text{C}$. Môžete predpokladať, že tepelné kapacity domu aj okolia sú z hľadiska kameňa prakticky nekonečne veľké, takže ich teplota zostáva stále rovnaká. Šesť bodov získate za navrhnutie spôsobu, s ktorým vieme získať najviac tepla na ohriatie domu, ak aj správne odargumentujete, prečo lepší systém neexistuje. Zvyšné tri body získate, ak správne vypočítate maximálne množstvo tepla, ktorým vieme ohriať dom.

Zima v chate je naozaj nepríjemná vec.¹⁴ V zadaní sme vám naznačili, že chate vieme dodať viac tepla ako $C(T_{\text{kameň}} - T_{\text{dom}})$! To malo byť dostatočným upozornením pre všetkých, ktorí si mysleli, že príklad je chyták. Nie je.

Ako teda chatu vykúriť čo najviac? Predsa s využitím *vratných tepelných strojov*!

Vratných preto, aby sme ich vedeli opakovane používať bez vynakladania práce na ich počiatočné nastavenie. Najúčinnnejší vratný tepelný stroj pracujúci¹⁵ pri teplotách $T_{\text{ohrievač}}$ a $T_{\text{chladíč}}$ je *Carnotov tepelný stroj*.¹⁶ Zároveň sa dá ukázať, že každý nevratný tepelný stroj má menšiu účinnosť ako vratný tepelný stroj pracujúci pri tých istých teplotách. Carnotov tepelný stroj je teda v každom kroku najúčinnnejší spomedzi všetkých strojov, a preto ho použijeme.

Budeme postupovať v dvoch krokoch. Predtým však poznamenajme, že teplota okolia T_{okolie} ani teplota domu T_{dom} sa nebudú meniť, keďže sme v zadaní povedali, že z hľadiska kameňa majú prakticky nekonečné tepelné kapacity. Zato teplota kameňa $T_{\text{kameň}}$ sa meniť bude, keďže

¹²Pozor, nie mernou! Táto má jednotky $\text{J}/^\circ\text{C}$.

¹³Pozor, s kameňom sa dá využitím ideálnych tepelných strojov ohriať dom aj o viac ako $C(T_{\text{kameň}} - T_{\text{dom}})$!

¹⁴Presvedčili sa o tom aj vedúci FKS na istom *legendárnom sústreďení*, kde boli nútení použiť otvorenú chladničku ako vykurovacie teleso. Žiaľ termostat v chladničke po čase vypol chladenie, keďže teplota v chate klesla pod požadovanú teplotu ...

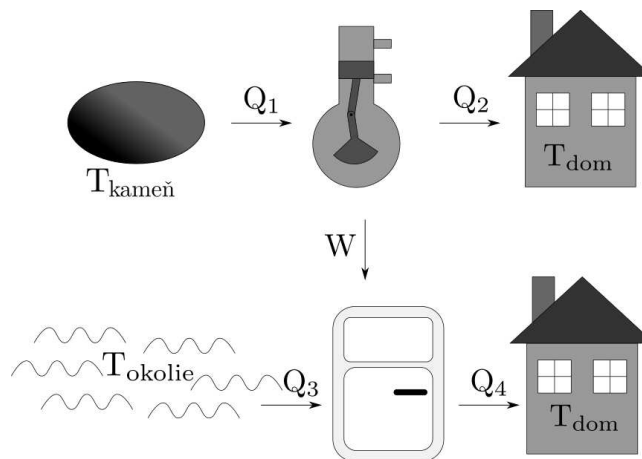
¹⁵Pod „pracujúci“ máme na mysli, že stroj prijíma a odovzdáva teplo iba pri týchto teplotách – to znamená, že hovoríme o izotermických dejoch.

¹⁶O Carnotových tepelných strojoch sme toho už popísali naozaj veľa. Oplatí sa teda pozrieť do Archívu FKS, Archívu Náboja či Zbierky FX - príklad Puding.

má konečnú tepelnú kapacitu C ! Toto upozornenie bude neskôr dôležité pri výpočte celkového množstva tepla, ktorým vieme ohriať dom.

Prvý krok Najprv kameň s teplotou $T_{\text{kameň}}$ zapojíme ako ohrievač na *Carnotov tepelný stroj* a odpadové teplo využijeme na ohrievanie domu (chladič) s teplotou T_{dom} . Užitočnú prácu, ktorú získame z tepelného stroja, použijeme na pohon *tepelnej pumpy*¹⁷, ktorá bude konaním práce prečerpávať teplo z okolia domu T_{okolie} do domu s teplotou T_{dom} . Ako tepelnú pumpu použijeme ďalší Carnotov tepelný stroj, avšak tentokrát zapojený v „opačnom smere“, tzn. stroj bude teraz prácu spotrebúvať na to, aby prečerpával teplo. Tento proces bude prebiehať kým sa kameň neochladí na teplotu domu ($T_{\text{kameň}} = T_{\text{dom}}$), pričom do domu dodáme naozaj viac tepla ($Q_2 + Q_4$) ako kameň odovzdá tepelnému stroju (Q_1). To vieme urobiť preto, lebo presunieme teplo z okolia domu, ktoré však (prakticky) nezmení svoju teplotu.

Celá schéma je znázornená na nasledujúcom obrázku.



Obr. 17: Schéma nášho tepeného stroja

Účinnosť Carnotovho tepelného stroja si označíme η . Pre účinnosť tohto stroja platí¹⁸

$$\eta \equiv \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_{\text{dom}}}{T_{\text{kameň}}}.$$

V prvom kroku tak pomocou tepelného stroja odčerpáme teplo Q_1 , ktoré sa použije na vykonanie práce $W = \eta Q_1$ a ohriatie domu pomocou tepla $Q_2 = (1 - \eta)Q_1$. Následne použijeme prácu W na to, aby sme prečerpali teplo Q_3 z okolia pomocou tepelnej pumpy (chladničky) s efektívnosťou η_{chlad} ¹⁹ do domu. Do domu tak pomocou tepelnej pumpy príde teplo $Q_4 = Q_3 +$

¹⁷Tepelná pumpa nie je nič iné ako vratný tepelný stroj zapojený v opačnom smere, teda ako chladnička. Vďaka konaniu práce tak vieme presúvať teplo z chladnejšieho telesa (napr. mlieko) na teplejšie teleso (napr. kuchyňa).

¹⁸Vid' napr. archív Náboja alebo Zbierka FX.

¹⁹Vzorec pre účinnosť tepelnej pumpy a účinnosť chladničky sa líši, ale len preto lebo je raz vyjadrené pomocou odovzdaného tepla domu pri pumpe a dodaného tepla z prostredia pri chladničke. Účinnosť je však čisto subjektívny - ekonomický - pojem, a tak sa nenechajme zmiasť, pre chladničku resp. pumpu platia stále rovnaké Carnotove obmedzenia. Pri výpočte je jedno, ktorý vzorec použijeme, len si musíme dať pozor na to, aby sme potom aj zvyšné práce a tepla vyjadrovali správne na základe nami použitej účinnosti (pumpy alebo chladničky).

$+W = (1 + \eta_{\text{chlad}})W = (1 + \eta_{\text{chlad}})\eta Q_1$. Efektívnosť Carnotovej tepelnej pumpy môžeme na základe účinnosti Carnotovho cyklu vypočítať ako

$$\eta_{\text{chlad}} \equiv \frac{Q_3}{W} = \frac{Q_3}{Q_4 - Q_3} = \frac{T_{\text{okolie}}}{T_{\text{dom}} - T_{\text{okolie}}}.$$

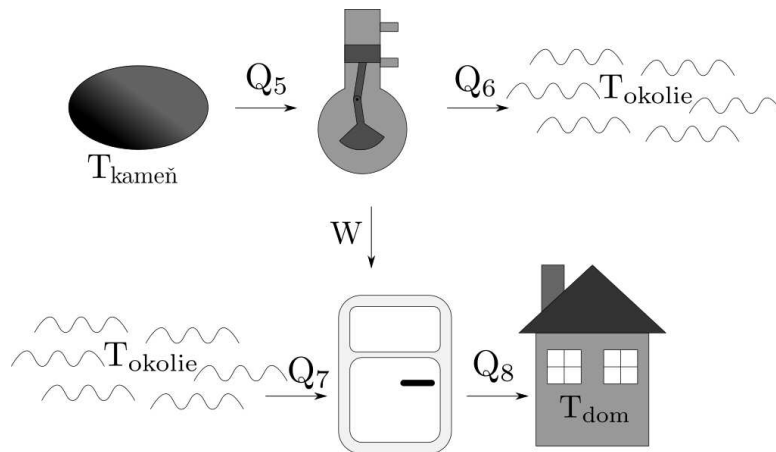
Ak kameň odovzdá teplo Q_1 , tak dom vieme ohriať teplom

$$Q_2 + Q_4 = (1 - \eta)Q_1 + (1 + \eta_{\text{chlad}})\eta Q_1 = (1 + \eta\eta_{\text{chlad}})Q_1$$

$$Q_2 + Q_4 = \frac{T_{\text{dom}}}{T_{\text{dom}} - T_{\text{okolie}}} \left(1 - \frac{T_{\text{okolie}}}{T_{\text{kameň}}}\right) Q_1.$$

Teraz vidíme, že platí $Q_2 + Q_4 > Q_1$. Navyše $Q_2 + Q_4$ už nemôže byť väčšie, keďže sme použili najúčinnnejšie (vratné) tepelné stroje aj pumpy pracujúce pri daných teplotách. Inak povedané, okrem toho, že sme dom ohriali o Q_1 , tak sme z okolia získali maximálne možné množstvo tepla $\eta\eta_{\text{chlad}}Q_1$, aké môžeme získať bez toho, aby sme porušili prvý alebo druhý termodynamický zákon. Viac teda určite nepôjde.

Alebo, že by dom išiel ohriať ešte viac? **Druhý krok** Teraz má kameň rovnakú teplotu ako dom. Jeho premiestnením do domu by sme však dom už o nič neohriali. Vieme však znovu využiť trik so zapojením s tepelnými strojmi a pumpami podľa obrázku. Najprv kameň zapojíme na tepelný stroj ako ohrievač. Ten odovzdá teplo Q_5 tepelnému stroju, ktorý vykoná užitočnú prácu $W = \eta'Q_5$ a odpadovým teplom $Q_6 = (1 - \eta')Q_5$ ohreje okolie. Následne využijeme užitočnú prácu W na prečerpanie tepla Q_7 z okolia domu do domu. Dom tak ohrejeme ďalším teplom $Q_8 = Q_7 + W = (1 + \eta_{\text{chlad}})W = (1 + \eta_{\text{chlad}})\eta'Q_1$. Tento proces bude prebiehať, až kým sa kameň neochladí na teplotu okolia domu.



Obr. 18: Schéma tepelného stroja v druhom kroku

Ak kameň odovzdá teplo Q_5 našej sústave, tak ohreje dom o teplo Q_8 . Musíme si však dať pozor, keďže prvý tepelný stroj teraz pracuje pri iných teplotách – jeho účinnosť bude iná ako v prvom kroku.

$$Q_8 = (1 + \eta_{\text{chlad}})\eta'Q_5 = \frac{T_{\text{dom}}}{T_{\text{dom}} - T_{\text{okolie}}} \left(1 - \frac{T_{\text{okolie}}}{T_{\text{kameň}}}\right) Q_5.$$

Všimnite si, že vzorec je úplne rovnaký ako v prípade prvého stroja. To znamená, že rovnako dobre by sme mohli využiť iba druhý stroj počas celého času a vôbec sa nezdržiavať prvým strojom. V skutočnosti, postup kde využijeme najprv prvý, a potom druhý stroj je rovnako dobrý ako postup, kde celý čas využívame len druhý stroj. Hotovo? Skoro.

Už sme našli spôsob ako ohriať dom o čo najviac. Lepšie to už nepôjde, pretože v každom kroku presúvame maximálne možné množstvo tepla do domu – použili sme tepelné pumpy a stroje, ktoré majú najvyššiu možnú účinnosť (Carnotov tepelný stroj a chladnička) a to zároveň ešte tak, aby neporušili druhý termodynamický zákon. V okamihu, keď má už kameň teplotu okolia, tak dom už ďalej ohriať nevieme, nakoľko ak by to išlo, tak by sme na ohrievanie domu, žiadny kameň nepotrebovali. Okrem iného by sme takto znovu porušili druhý termodynamický zákon.

Ostáva teda už iba vypočítať celkové množstvo tepla, ktorým vieme ohriať dom. Rovnako, ako teplota kameňa klesá s tým, ako kameň postupne odovzdáva teplo a chladne, sa mení (klesá k nule) aj účinnosť Carnotových tepelných strojov. Ďalej si všimnime, že výrazy pre $Q_2 + Q_4$ resp. Q_8 obsahujúce teploty pred Q_1 resp. Q_5 sú rovnaké, takže oba kroky vieme vypočítať naraz ako odovzdanie tepla kameňa domu, pričom $T_{\text{kameň}}$ klesne z 773 K na $T_{\text{okolie}} = 253$ K.

Celkové množstvo tepla teda vypočítame nasledovnou úvahou. Ak kameň ochladne o ΔT , tak odovzdá strojom teplo $C\Delta T$ a dom sa ohreje o

$$\Delta Q = \frac{T_{\text{dom}}}{T_{\text{dom}} - T_{\text{okolie}}} \left(1 - \frac{T_{\text{okolie}}}{T} \right) C \Delta T,$$

kde T je aktuálna teplota kameňa.

Celkové teplo bude teda súčtom takýchto malých príspevkov ΔQ , ktoré sa ale menia. Ak ΔQ budeme zmenšovať čoraz viac a viac, až sa dostaneme k nekonečne malým príspevkom, tak sa vlastne pýtame na plochu pod grafom funkcie $(T_{\text{dom}}/(T_{\text{dom}} - T_{\text{okolie}})) (1 - (T_{\text{okolie}}/T)) C$. Výsledok teda vieme získať integrovaním. Ak integrovať nevieme, tak vieme nájsť analógiu s výpočtom práce izotermického deja, keďže náš výraz obsahuje funkciu typu $1/x$.²⁰

$$Q = \int_{253 \text{ K}}^{773 \text{ K}} \frac{T_{\text{dom}}}{T_{\text{dom}} - T_{\text{okolie}}} \left(1 - \frac{T_{\text{okolie}}}{T} \right) C dT = \frac{T_{\text{dom}}}{T_{\text{dom}} - T_{\text{okolie}}} C \left((773 - 253) + T_{\text{okolie}} \ln\left(\frac{253}{773}\right) \right)$$

$$Q \approx 1740 C.$$

Pre porovnanie, prenesením kameňa do domu by sme dom ohriali iba o $(773 - 253)C = 480C$. Vďaka našej šikovnosti teda vieme získať viac ako triapolkrát viac tepla než takýmto triviálnym spôsobom. Dúfam, že tento príklad bol dostatočným poučením, že termodynamika nemusí byť vždy až taká intuitívna, ale ani taká ťažká, ako sa môže zdať :).

²⁰Vid' posledný príklad z prvej série zimnej časti 29. ročníka.