



Fyzikálny korešpondenčný seminár

30. ročník, 2014/2015

FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava

e-mail: otazky@fks.sk

web: <http://fks.sk>

Vzorové riešenia 1. kola letnej časti 2014/2015

1.1 B0 – Rozvrat nad sušiakom (vzorák Vladko, opravoval Kubo)

Samko s Helbojom si kúpili nový sušiak. Priniesli teda mokré prádlo, rozostavili ho do stredu izby, no stačilo jedno neopatrné štvuchnutie a sušiak sa prevrátil. Nasledoval takýto rozhovor:

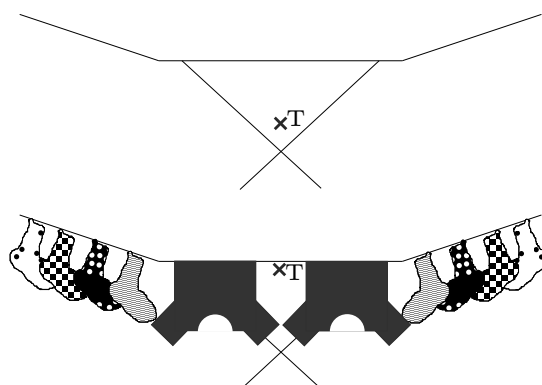
„Ty si ale ľavý, dúfam, že ho takto neprevrátiš aj s vecami.“

„Nerob paniku, s prádlom sa určite neprevráti.“

„Ale však keď na ňom budú veci, to bude mať ťažisko ešte vyššie!“

„Blbosť, určite bude stabilnejší, si to zrátaj!“

Ale keďže ani jednému sa rátať nechcelo, ostali na seba len škaredo pozerat'. Viete vyriešiť ich spor? Bude mať sušiak väčšiu stabilitu¹ s prádlom, či bez prádla?



Obr. 1: Sušiak bez vecí a s vecami.

Sušiak stojí na dvoch nohách. Po drgnutí sa však sušiak nakloní a zeme sa bude dotýkať len v jednom bode – tento bod bude (pri pohľade z boku) reprezentovať os otáčania.

Ak sušiaku dodáme drgnutím istú medznú energiu, ťažisko sušiaku sa môže dostať kolmo nad os otáčania, teda do labilnej polohy. V tejto polohe platí, že pri akomkoľvek vychýlení

¹Stabilitu chápajte ako energiu, ktorú musíme dodať sušiaku na to, aby sa prevrátil.
<http://cs.wikipedia.org/wiki/Stabilita>

Generálny partner



Partneri



Mediálny partner



výsledná sila pôsobiaca na teleso uvedie do stabilnej polohy. Akákoľvek väčšia ako medzná energia spôsobí, že ťažisko sa pretočí ponad os otáčania a sušiak sa prevráti.

Pokúsme sa o určenie medznej energie. Uvažujme typický sušiak zo zadania. Jeho bežné parametre nájdeme na internete.² Má hmotnosť $m = 1,5$ kg, dĺžku v zloženom stave 105 cm, šírku $b = 54$ cm a výšku 86 cm. Dĺžka vyklápacích ramien je 47 cm a sú vyklopené pod uhlom približne 30° . V strednej časti má sušiak päť tenkých tyčiek a na každom ramene päť priečných tyčiek. Dokopy sa teda sušiak skladá z 12,65 m hrubých a 10,65 m tenkých tyčí. Za predpokladu, že tenké tyče majú priemer 3 mm hrubé 3 cm, poľahky vypočítame hmotnosť jedného metra hrubej tyče (109 g) a tenkej tyčky (10,9 g).

Sušiak si rozdelíme na jednotlivé tyče, o ktorých predpokladáme, že sú homogénne a preto majú ťažisko v strede. Tieto ťažiská skombinujeme pomocou vzťahu pre spoločné ťažisko n hmotných bodov

$$z_t = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Po dosadení zisťujeme, že výška ťažiska je $z_t = 66,7$ cm.

V labilnej polohe platí, že kolmá spojnice ťažiska a osi otáčania je zvislá. Dĺžku tejto spojnice si vieme vypočítať pomocou Pytagorovej vety. Výsledný rozdiel medzi výškou ťažiska stojaceho sušiaka a sušiaka v labilnej polohe je teda

$$\Delta z_t = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + z_t^2} - z_t = 5,26 \text{ cm}.$$

Tomu odpovedá zmena potenciálnej energie

$$\Delta E_p = mg\Delta z_t = 0,77 \text{ J}.$$

Ďalej predpokladajme, že hmotnosť bielizne je $M = 3$ kg a na sušiaku je rovnomerne rozložená. Pre jednoduchosť predpokladajme, že ťažisko zaveseného oblečenia je vo výške tyče, na ktorej je zavesené.³ Analogickým výpočtom ako v prípade prázdneho sušiaka dostaneme, že ťažisko bielizne je vo výške 93,8 cm. Spoločné ťažisko sušiaku s bielizňou je teda vo výške $z'_t = 84,7$ cm. Výškový rozdiel medzi stabilnou a labilnou polohou je

$$\Delta z'_t = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + z_t'^2} - z'_t = 3,81 \text{ cm}.$$

Zmena potenciálnej energie je teda

$$\Delta E'_p = (m + M)g\Delta z'_t = 1,69 \text{ J}.$$

Ako vidíme, pravdu má ten z chlapcov, ktorý tvrdil, že je náročnejšie prevrhnúť sušiak s bielizňou, lebo na to je potrebné dodať viac ako dvojnásobné množstvo energie.

1.2 B1 – Ach, zas toľko ľudí? (vzorák Andrej, opravoval Maťo B)

Vladko cestuje preplneným autobusom (č. 39). Keďže je tam veľa ľudí, už sa nemá čoho chytiť. Takže jediná možnosť, ktorá mu zostala, je tlačiť rukou o strop a dúfať, že ho trenie udrží na mieste. Akou silou

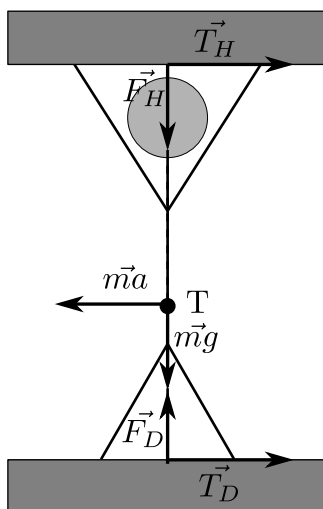
²<http://www.hej.sk/susiak-na-pradlo-toro-900049/>

³Týmto sme urobili spodné ohraničenie pre energiu. Keby bolo ťažisko bielizne nižšie, sušiak by bol stabilnejší.

sa musí zaprieť, aby pri zabrzdení autobusu nespadol a neprivalil nejakého suseda? Koeficient šmykového trenia medzi rukou a stropom, maximálne spomalenie autobusu a ďalšie potrebné parametre sa pokúste odhadnúť, prípadne nájsť. Predpokladajte, že Vladko nosí pevnú obuv s kvalitnou podrážkou, a teda koeficient šmykového trenia medzi podlahou a jeho topánkami je dostatočne vysoký na to, aby sa jeho chodidlá za žiadnych okolností nepohli (samozrejme, zvyšok jeho tela sa môže, voči jeho chodidlám, napríklad otočiť). Uvažujte, že ťažisko Vladka sa nachádza v troch pätinách jeho výšky. Vladkova výška sú dve tretiny vzdialenosti medzi podlahou a stropom.

Čo od nás chce zadanie? Aby Vladko *stál*. Keď teleso stojí, tak sa jednak neposúva ani v x -ovom smere, ani v y -ovom smere a dokonca sa ani neotáča okolo ľubovoľnej osi. Teda výslednica síl v x -ovom a y -ovom smere je nulová a taktiež výsledný moment síl vzhľadom na ľubovoľný bod je nula.

Keďže vždy, keď niečo rátame so silami, si ich nakreslíme, tu sú sily pôsobiace na Vladka: ⁴



Obr. 2: Vladko tlačí na strop silou F_H , teda strop autobusu na Vladka pôsobí silou F_H smerom nadol. Reakcia od podlahy na Vladka je F_D . Trecie sily T označíme indexom, či sú hore alebo dole. A autobus s výškou l spomaľuje zrýchlením a .

Nulová výslednica v y -ovom smere znamená rovnosť opačne pôsobiacich síl, teda

$$F_H + mg = F_D.$$

Vladko sa nebude hýbať v y -ovom smere, lebo reakcia od podlahy bude presne taká, aby stál.

Nulová výslednica síl v x -ovom smere znamená rovnosť

$$T_D + T_H = ma.$$

Zadanie nám prezradilo, že trecia sila medzi podlahou a Vladkovými turistickými topánkami s drsnou podrážkou bude dostatočná, aby to ustál.

⁴Som zákerný a nenakreslím smer pohybu autobusu. Napríklad preto, že je to úplne jedno a trecie sily budú vždy v opačnom smere.

Stojaci Vladko sa neotáča okolo ľubovoľnej osi. Preto je výhodné si ju zvoliť tak, aby mala nejaká neprijemne vyjadriteľná sila nulový moment. My si zvolíme os prechádzajúcu bodom dotyku Vladka s podlahou.⁵ Rovnováha momentov síl nám dá

$$T_H l = m a \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} l \quad \Rightarrow \quad T_H = \frac{2}{5} m a.$$

Najväčšia hodnota trecej sily T_H je $f F_H$. Teda môžeme určiť najmenšiu potrebnú silu, ktorou Vladko musí tlačiť

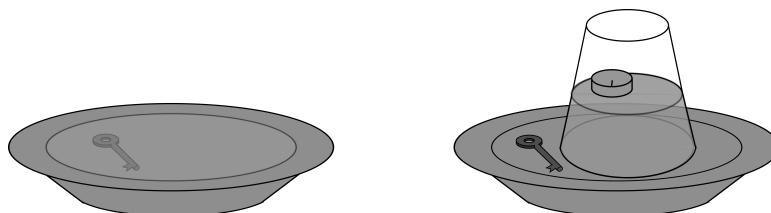
$$\frac{2}{5} m a = f F_H \quad \Rightarrow \quad F_H = \frac{2}{5} \frac{m a}{f}.$$

Už len odhadnúť parametre. Spomalenie autobusu môžeme odhadnúť ako $g/2$, hmotnosť Vladka 80 kg a koeficient trenia ruka-plast je, povedzme, 0,4. Vladko teda bude musieť tlačiť najmenej 400 N, horné ohraničenie nie je, resp. je dané Vladkovou silou.

1.3 B2 – Statočný Samec a sosavá čaša (opravovala Zuzka)

„Uf, to bola fuška“, povedal si Samec, keď prekonal všetky pasce prastarej hrobky a od pokladu ho delili už len jediné dvere – zamknuté. Porozhliadol sa po okolí a náhodou si všimol veľký kamenný stojan s tanierovitou misou uprostred miestnosti. Misu vyplňala podozrivo žiariaca zelená kvapalina a na jej dne presvital kľúč. Také finty už pozná. Má tú žbrndu vypiť. Samec ale zapojil mozgové bunky a otvoril svoj kufrík mladého bádateľa.

Do kamenného taniera položil horiacu sviečku a prikryl ju sklenou čašou z predošlého dobrodružstva (dnom nahor). Keď sviečka zhasla, čaša do seba začala nasávať tekutinu a po chvíli mohol kľúč pohodlne vytiahnuť. Ako to urobil? Čo prinútilo kvapalinu stiahnuť sa do čaše?



Obr. 3: Situácia pred a po nasatí.

Nuž, nebudem vás dlho napínať a rovno vám poviem, že ju k tomu donútil podtlak v čaši. Všeobecne si môžeme povedať, že podtlak vznikol zmenšením objemu plynov pod čašou. Ale prečo sa ten objem zmenšil? Kam sa podel zvyšok? Aby sme to zistili, poďme sa pozrieť, čo taká horiaca sviečka pod čašou robí.

Zapálime sviečku. Tá si začne veselo reagovať, spotrebúva kyslík, vypúšťa oxid uhličitý, oxid uhoľnatý, vodnú paru a iné veci, okrem toho tiež zohrieva vzduch okolo seba.

Teraz ju prikryjeme čašou. Okolo sviečky sa teda vytvorí (zohriate) plynné teleso, ktorého rozhraniami sú steny čaše a hladina spomínanej zelenej žbrndy. Sviečka horí ďalej, stále zohrieva plynovú bublinku pod čašou, tá vďaka dodávanej energii expanduje a ak je hladina kvapaliny

⁵O sile T_D nevieme nič, len to, že je dosť veľká. A nejak intuitívne je jasné, že budeme potrebovať skôr silu T_H .

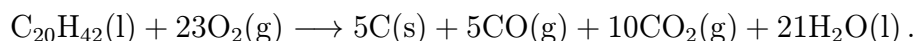
v čaši dostatočne nízka, môže kvôli tomu časť plynov vybublať z čaše von. To je teda prvá možná objemová strata.

Sviečka bude horieť až do momentu (a tu bolo treba trochu googliť), kým podiel kyslíka v plynnej zmesi neklesne na 15%. Pri takejto koncentrácii už totiž reakcia horenia nie je schopná prebehnúť a sviečka zhasne.

Po zhasnutí sviečky prestane pôsobiť zdroj tepla, ktorý doteraz ohrieval bublinku pod čašou, a keďže naša sústava rozhodne nie je izolovaná, plyny začnú chladnúť. Tu je dôležité si uvedomiť, že pod čašu sme dostali už zohriaty plyn, keďže sviečka horela nejaký čas pred tým, ako sme ju zakryli. Teraz ten plyn chladne, a chladne a chladne. Po chvíli sa dostane na teplotu nižšiu než bola tá, ktorú mal, keď sa pod čašu dostal, teda na teplotu vzduchu okolo čaše. A keďže vieme, že keď plyn chladne, zmršťuje svoj objem, bude mať táto ochladnutá bublinka rozhodne menší objem ako tá z mierne zohriatych plynov tesne po zakrytí sviečky. To by bola druhá, asi najväčšia objemová strata.

Potom je tu ešte tretia objemová strata. Čo sa tohto týka, najväčšou chybou je zvažovať efekt cucania kvapaliny čašou iba na ňu. Ako si neskôr ukážeme, objemová strata je vskutku malá a keby sme úlohu preniesli do praxe, asi by sme si túto stratu voľným okom ani nevšimli.

Stratu predstavuje kyslík spananý sviečkou. Schválne, skúsme odhadnúť, koľko plynu nám týmto spôsobom zmizne. Ak nie sme dobrí chemici, použijeme opäť Google. Taká sviečka je obvykle vyrobená z parafrínu, teda $C_{20}H_{42}$. Keď ten horí, vyzerá to asi takto⁶:



Na ľavej strane máme 23 mol plynov, na pravej dokopy 15 mol plynov (vodná para na stenách čaše skondenzuje, teda zmení skupenstvo na kvapalnú). Vieme, že molový objem plynov závisí od teploty, nie od druhu plynu, a že látkové množstvo závisí od stechiometrických koeficientov v chemickej rovnici. Z toho môžeme usudzovať, že do reakcie nám vstúpi 23 objemových jednotiek plynu a vystúpi 15 objemových jednotiek. Nejaká strata tam teda bude, konkrétne:

$$100\% - \frac{15j \cdot 100\%}{23j} \approx 34,7\%.$$

To je podiel spotrebovaného objemu kyslíka, ktorý objem plynného produktu horenia sviečky nie je schopný nahradiť.

Teraz poďme spraviť trochu matiky a spočítať, aký podiel plynu nám teda unikne. Objem plynu v čaši na začiatku si označme V_1 a na konci V_2 . Vieme, že na začiatku je podiel kyslíka 21%, lebo atmosféra, a na konci 15%. Rozdiel medzi objemom bublinky na začiatku a na konci teda bude predstavovať rozdiel objemov kyslíka na začiatku a na konci zmenšený o prírastok objemu plynov, ktoré nám vznikli horením sviečky. Aby sme to zosumarizovali:

$$V_1 - V_2 = (V_1 \cdot 21\% - V_2 \cdot 15\%) - 65,3\% \cdot (V_1 \cdot 21\% - V_2 \cdot 15\%).$$

Úpravou tejto rovnice môžeme zistiť pomer objemu bublinky na konci a na začiatku deja. Ten bude vyzeráť takto:

⁶Zdroj:

<http://www.mcscs.jus.gov.on.ca/english/firemarshal/legislation/technicalguidelinesandreports/TG-2011-01.html>

Poznámka: Dá sa nájsť veľa rôznych rovníc horenia parafrínu. To, čo chceme počítať, vyjde pre všetky približne rovnako, či už ide o dokonalé alebo nedokonalé horenie, takže je viac-menej jedno, ktorú rovnicu si vyberieme.

$$\frac{V_2}{V_1} \approx 97,8\%.$$

To znamená, že kvôli spotrebe kyslíka sviečkou nám z pôvodného objemu zmizlo 2,2%, čo je zanedbateľné množstvo.

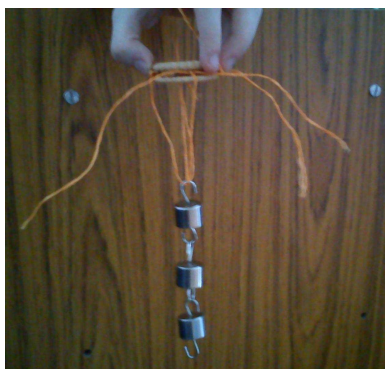
Na záver už len skonštatovať, že zmenšenie plynovej bublinky takmer nezávisí od spotreby kyslíka sviečkou. Najväčší efekt na zmenu objemu plynu v čaši má jeho zahriatie a následné ochladenie po zhasnutí sviečky.

1.4 B3/A1 – Hmm ... mňam, keksíky! (opravoval Duško)

Maťo bol na návšteve u Čukčov a ako pozornosť priniesol svoje obľúbené sušienky. Poznáte to: dve tmavé okrúhle sušienky a medzi nimi biela náplň. „Éj, tie tu poznáme!“, vraví jeden z Čukčov a na Maťovo zdesenie začali keksíky jesť úplne nesprávnym spôsobom. Chytili obe sušienky, odtrhli ich od seba a zlizli náplň. „Ale takto sa to predsa robí správne“, vyhlásil Maťo a krútením oddelil vrchnú sušienku od krému. „Ale čoby, veď my sme to takto robili vždy a dobre bolo“, nedal sa najstarší Čukča. Zúfalý Maťo sa teda rozhodol pre fyzikálne argumenty. Za lepši spôsob bude uznaný ten, ktorý vyžaduje menšiu silu. Zmerajte, aká sila je potrebná na odlúčenie hornej sušienky a aká sila (pôsobiaci na okraji sušienky) na jej odkrútenie. Ktorý spôsob vyžaduje menšiu silu a o koľko?

Riešenie tejto úlohy spočívalo v dvoch základných veciach. Keďže sme od vás nechceli nič počítať,⁷ stačilo si poriadne premyslieť zostavenie meracej aparatury a potom už iba uskutočniť meranie s následnou analýzou dát.

Začneme s čukčovským spôsobom jedenia keksíkov, čiže odtrhávaním. V prvom rade je potrebné si uvedomiť, že sila, ktorou budeme pôsobiť na sušienku, by nemala spôsobovať žiaden moment sily vzhľadom na miesto uchytenia druhej polovice sušienky (či už vo zveráku alebo ruke), aby sme to mohli definovať ako odtrhnutie. Tomu musíme aj prispôbiť meraciu aparaturu. Je vhodné, aby sila, ktorú budeme merať, pôsobila čo najviac rovnomerne po okraji sušienky (v strede sa to robí dosť ťažko, ak na ňu nechceme lepiť nejaké závažia). Existuje viacero spôsobov, ako toho docieľiť, no my sme sa rozhodli, že uviažeme špagát okolo náplne.



Obr. 4: Takto sme to robili my.

⁷Výsledok tejto úlohy sa dá aj teoreticky odhadnúť po istých aproximáciách, menšom zamyslení, a rátaní ...tak vlastne vznikla táto úloha.

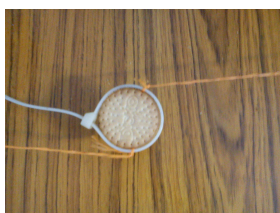
Ak bude na špagát pôsobiť sila, ktorá ho bude tlačiť na sušienku, tak práve vďaka tomu bude sušienka odtrhovaná. No a najtriviálnejšou silou, ktorú poznáme, je práve gravitačná. Čiže stačí na špagát rovnomerne zavesiť nejaké závažia, zistiť, pri akej hmotnosti sa sušienka odtrhne a vypočítať z toho silu.

Dostali sme takéto výsledky:

Meranie	Hmotnosť závažia [g]	Sila [N]
1	500	4,9
2	450	4,4
3	550	5,4
4	450	4,4
5	400	3,9
6	400	3,9
7	200	2,0
8	500	4,9
9	350	3,4
10	450	4,4

Z toho dostaneme priemernú silu $F_1 = (4,2 \pm 0,3) \text{ N}$ – netreba zabúdať na výpočet odchýlky, ktorý pravidelne pripomínáme v každej experimentálnej úlohe.⁸

Teraz sa pozrime na Maťov spôsob, teda krútenie. V tomto prípade musíme zabezpečiť, aby bola výsledná sila pôsobiaca na sušienku nulová, a aby sily pôsobili iba otáčanie⁹. Ak by to tak nebolo, tak by sme sušienku súčasne krútili a ťahali, čo samozrejme nechceme. Jeden z návrhov aparatury môže byť taký, že jednu časť sušienky pevne uchyťme, a na druhú necháme pôsobiť dve sily opačného smeru, ktoré budú spôsobovať nenulový moment sily. Stačí napríklad upevniť špagát so závažiami na dvoch protilahlých bodoch sušienky, natiahnuť špagát cez malé kladky (stačí čokoľvek, čo zmení smer pôsobenia sily o 90°) a nakoniec nechať všetku prácu na gravitačnú silu. Samozrejme nemôžeme zabudnúť, že na špagáty treba dávať závažia s rovnakou hmotnosťou, aby boli veľkosti síl v rovnováhe.



Obr. 5: Pohľad zhora :)



Obr. 6: Takto vyzeralo naše prevedenie.

⁸Pomerne pekne vysvetlené je to tu: http://en.wikipedia.org/wiki/Standard_deviation

⁹Bude existovať iba nenulový moment sily pôsobiaci na sušienku

Meranie	Hmotnosť závažia [g]	Sila [N]
1	200	2,0
2	150	1,5
3	200	2,0
4	150	1,5
5	300	2,9
6	100	1,0
7	150	1,5
8	150	1,5
9	200	2,0
10	200	2,0

Po analýze týchto dát dostaneme, že priemerná sila potrebná na odkrútenie sušienky je $F_2 = (1,8 \pm 0,2) \text{ N}$. Čiže rozdiel medzi silami potrebnými na oddelenie sušienky je $\Delta F = (2,4 \pm 0,5) \text{ N}$. To nie je vôbec málo pri porovnaní so samotnými silami. Takže záver je taký, že Maťo mal pravdu a jeho spôsob je lepší.

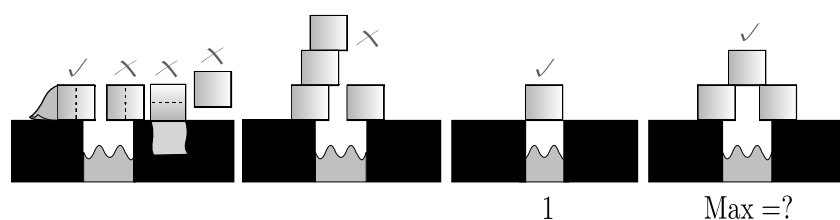
Ešte zopár poznámok na záver. To, čo sme namerali, platí iba pre jeden druh sušienok a nie pre všetky. Prečo? Do procesu odliepania vstupuje množstvo ďalších parametrov. Moment sily, ktorý spôsobuje odliepanie v druhom prípade, závisí od polomeru sušienky. Je zjavné, že čím väčšia bude, tým väčší moment sily bude na ňu pôsobiť. Svoju úlohu zohrá aj množstvo náplne a samotná náplň. Niektoré náplne sú ako betón – pri krútení s nimi ani nepohneme, ale pritom na sušienkach vôbec nelepia. Iné sa zas môžu správať ako veľmi obľúbený lieskovoorieškový krém, ktorý je veľmi poddajný. V neposlednom rade je tu faktor s názvom teplota. Predstavte si, že by ste tento experiment skúšali so sušienkami, ktoré ste práve vybrali z chladničky, a tými, ktoré majú izbovú teplotu. Krém v nich by sa raz ani nepohol a druhýkrát by sa skoro topil aj sám od seba.

1.5 B4/A2 – Rodený staviteľ (opravoval Kvík, vzorák Kvík + Mišo)

Tommy si vo voľných chvíľach na záchode stavia mosty z toaletných papierov. Predstavme si, že máme postupne 2 až 10 rovnakých roliek toaletáku (Pre jednoduchosť si ich budeme predstavovať ako kvádriky.).

Mostom budeme nazývať ľubovoľný útvar, ktorý je súvislý, stabilný (nezrúti sa pod svojou vlastnou váhou) a dokáže preklenúť nenulovú vzdialenosť. Kvôli jednoduchosti budeme uvažovať iba dvojrozmerný prípad (teda osi toaletákov sú všetky zvislé a v jednej rovine). Oba konce mostov sú v rovnakej výške a trenie medzi toaletákmi je také malé, že sa naň nemôžeme spoliehať. Akú najširšiu rieku vieme preklenúť s použitím N toaletákov?

Riešte pre $N = 2$ až 10 (netreba pre všeobecné N). Bodovanie bude tentokrát neštandardné: pre každé N získate jeden bod, ak vaše riešenie bude spĺňať všetky podmienky zo zadania a zároveň rozpätie vášho mosta bude maximálne spomedzi všetkých odovzdaných riešení.



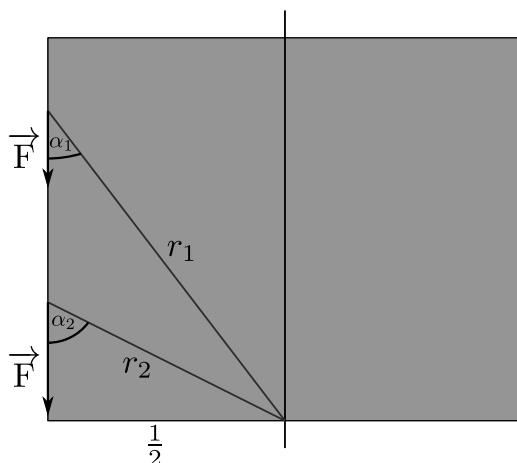
Obr. 7: Názorná ukážka: čo môžete a nemôžete robiť.

Podmienky:

- Toaleták musí byť stabilný: pod ťažiskom musí byť iný toaleták alebo breh, alebo ho musí zhora niečo vhodne pritláčať.
- Toaletáky nesmieme otáčať a ani sa nesmú len tak vznášať.
- Útvar na druhom obrázku nie je most, pretože nie je súvislý.
- Na treťom obrázku je optimum pre $N = 1$ – dokážeme premosťovať rieku ľubovoľnej šírky menšej ako 1.
- Na štvrtom obrázku je naozaj most. Aké je jeho rozpätie, to už nechávame zistiť vás :-)

Pôvodne sme úlohu chceli zadať pre všeobecné N . Ukázalo sa však, že je to ťažké, nehovoriac o dokazovaní, že nájdený most je naozaj najdlhší. Maximá s úplnou istotou nepoznáme ani my.

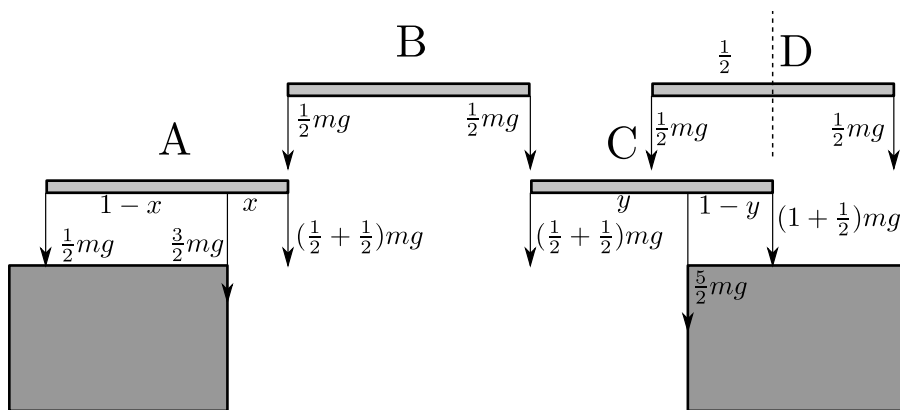
Naviac, aby sme boli úplne korektní, treba povedať, že maximum nie je matematicky správny pojem. Dobré to vidieť na príklade mostu pre $N = 1$. Určite vieme preklenúť každú medzeru užšiu než 1, do zvyšných medzier nám toaleták spadne. Nejdeme preto hľadať maximum, ale *medznú šírku*.



Obr. 8: Momenty.

Na úvod si uvedomme, že výšku roliek môžeme zanedbať. Moment sily je $\vec{r} \times \vec{F} = rF \sin \alpha$ (viď obrázok 8). Avšak, rameno r je úmerné $1/\sin \alpha$, čím sa závislosť na výške vyruší.

Pri zisťovaní, či náš most bude stáť, vždy začneme od najvyššej vrstvy. V nej musí platiť, že ťažisko každej rolky je podopreté, alebo je rolka podopretá na oboch stranách smerom od ťažiska. Pokračujeme nižšou vrstvou, kde však musíme okrem tiaží samotných roliek započítať aj sily, ktorými na ne pôsobí vyššie poschodie. Rovnako pokračujeme až po najnižšie poschodie.



Obr. 9: Mohlo by to vyzeráť napríklad takto.

Pozrime sa na sústavu štyroch roliek (obrázok 9), konkrétne na vrchnú rolku B . Sily, ktorými rolka tlačí na rolky A a C zistíme z rovnosti momentov. Za os otáčania si zvolíme pravý okraj rolky.¹⁰ Tiaž rolky mg pôsobí v jej strede, takže dĺžka jej ramena je rovná polovici šírky. Druhý nenulový moment pôsobí na ľavom okraji, kde na rolku B pôsobí reakcia na silu, ktorou rolka tlačí na rolku A . Táto sila má oproti tiaži dvojnásobné rameno, preto musí byť (z rovnosti momentov) veľkosť tejto sily polovičná, t.j. $mg/2$. Zo symetrie situácie, respektíve z nulovej výslednice všetkých síl zistíme, že na druhej strane je situácia rovnaká, t.j. rolka B tlačí na rolku C tiež silou $mg/2$.

Teraz sa pozrieme na rolku D . Tu sa nedeje nič zaujímavé, jednoducho tlačí celou svojou tiažou na pravý okraj rolky C .

Na toaleták A pôsobia dve sily: sila $mg/2$ pôsobí na pravom okraji a tiaž rolky mg pôsobí v jej strede. V medznej situácii, kedy bude toaleták vysunutý o x (viď obrázok 9), budú veľkosti momentov síl mgx a $mg(1-x)/2$. Keďže momenty sa snažia otočiť toaletákom do opačných smerov, toaleták nespadne, ak nie je druhý z momentov väčší, teda

$$mgx - \frac{mg(1-x)}{2} \geq 0,$$

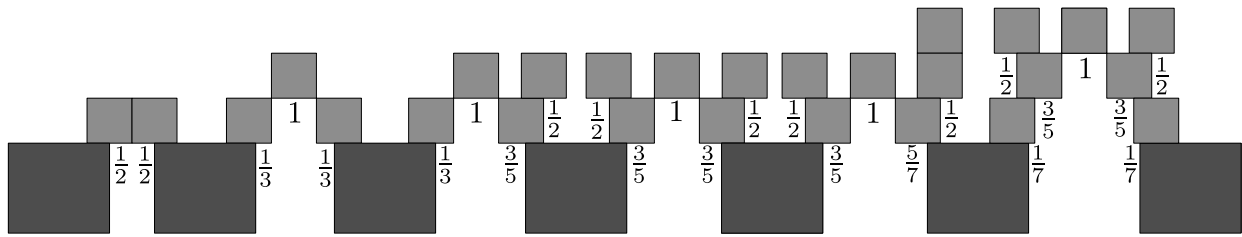
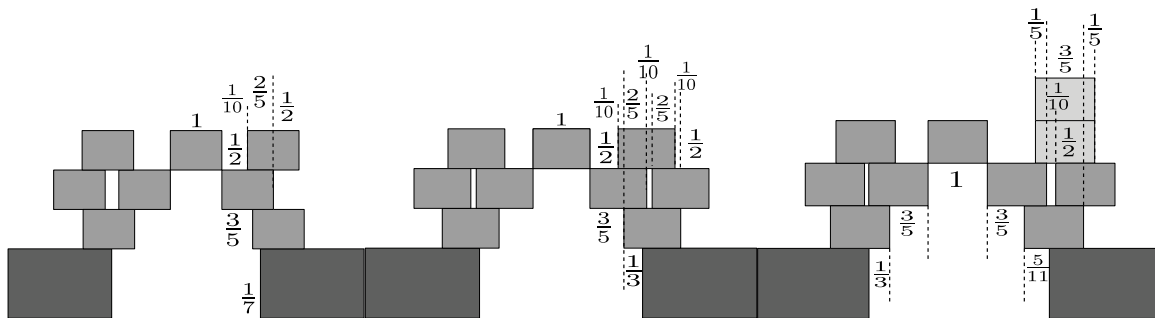
z čoho $x \leq 1/3$.

Rovnaký postup použijeme na toaleták C , akurát si musíme pamätať, že na jeho pravý okraj nám tlačí sila až $3mg/2$. Vysunutie si označíme y a vyriešime nerovnicu

$$mgy - \frac{3mg(1-y)}{2} \geq 0,$$

z ktorej dostaneme $y \leq 3/5$. Dokopy je celkové rozpätie mostu $1/3 + 1 + 3/5 = 29/15$.

¹⁰ Ak sa rolka neotáča, znamená to, že sa neotáča okolo ľubovoľnej osi. Výber vhodnej osi otáčania pre počítanie momentov je preto na nás.

Obr. 10: Názorné ukážky mostov pre $\forall N : N \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.Obr. 11: A tieto sú pre $\forall N : N \in \{8, 9, 10\}$.

Postupne si prejdime všetky prípady. Ak máme dve rolky, existujú dve rozumné riešenia a obe sú rovnako dobré. Buď skopírujeme riešenie s jediným toaleťákom alebo na každý breh postavíme jeden toaleťák tak, aby sa dotýkali. V oboch prípadoch je rozpätie mostu najviac 1.

Pre tri toaleťáky je riešenie očividné: vieme postaviť symetricky po jednej rolke na každý breh a na ne položiť tretiu rolku. Musíme však dať pozor na to, že vrchná rolka bude pôsobiť na rolky pod ňou. Ak sa pohráme s momentmi síl rovnako, ako v názornom príklade, dostávame rozpätie najviac $1/3 + 1 + 1/3 = 5/3$.

Riešenie pre štyri toaleťáky sme si už ukázali, s piatimi zopakujeme rovnaký trik s protiváhou aj na druhej strane, čím dostaneme rozpätie $11/5$.

Pre $N = 6$ pridáme na protiváhu druhú rolku. Tým zväčšíme tiaž na vzdialenejšiu stranu spodného toaleťáku na $2mg$, čo nám rozpätie zdvihne na $81/35$.

Ak máme sedem roliek, najoptimálnejšie riešenie pozostáva z mostu z piatich roliek, ktorý podložíme zospodu dvomi rolkami, ktoré môžeme vysunúť o $1/7$. Dokopy dostaneme $87/35$.

Pri $N = 8$ použijeme podperu protiváhy. Na jednej strane položíme do druhej vrstvy ďalšiu rolku tak, aby zaťažovala spodnú. Výpočtom overíme, že vnútri mostu sa nič nepokazí, zato rolku na prízemí teraz môžeme vysunúť miesto o $1/7$ až o $1/3$. Výsledné rozpätie je $281/105$.

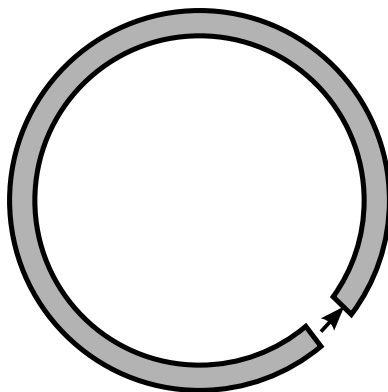
Keď pridáme deviaty toaleťák, môžeme to isté zopakovať aj na druhej strane, čo dá rozpätie až $43/15$.

Nakoniec použijeme kompletnú súpravu: na niektorej strane prihodíme do protiváhy ešte jednu rolku tak, aby bola presne nad spodnou. Prítláčná síla sa zvýši práve o tolko, aby sme spodné poschodie mohli vysunúť na $5/11$ šírky rolky. Dokopy teda máme rozpätie $493/165$.

Nami nájdené medzné rozpätia sú 1 ; $5/3 \approx 1,667$; $29/15 \approx 1,93$; $11/5 \approx 2,20$; $81/35 \approx 2,31$; $87/35 \approx 2,49$; $281/105 \approx 2,68$; $43/15 \approx 2,87$ a $493/165 \approx 2,99$.

1.6 A3 – Hula hop (opravoval Maťo B, vzorák (-E Filip))

Ach, tí bordelári! Nieкто nechal v jazere pohodenú starú rozpojenú obruč. Plávala na hladine a rušila dojmy z krás okolitej prírody. Mišo k nej priplával a v mieste rozpojenia šťuchol do jedného konca. No nebol si istý, čo uvidel.



Obr. 12: Šťuch do rozpojenej obruče

Pohol sa druhý koniec obruče zároveň s prvým, alebo až trochu neskôr? A čo by sa stalo, keby bola obruč vo vákuu a mala polomer tak 100 000 km a nebola dutá, aby mohol šťuchnúť rovno do stredu prierezu? Dokázal by vôbec svojím prstom ovplyvniť takú obrovskú obruč?

Pohne, či nepohne? To je otázka. Kto nám odpovie?

Jednoduchú odpoveď nám dáva teória relativity. Informácia, čiže ani pohyb tyče, sa nemôže šíriť rýchlejšie ako rýchlosťou svetla c . A aká je dráha? Ak nebudeme uvažovať žiadne obskurné efekty, tak dva konce na seba vzájomne nepôsobia. Pohyb sa prenáša len vo vnútri materiálu, čiže informácia o vzruchu musí prejsť kolom dokola, kým sa dostane na druhý koniec. Druhý koniec obruče s polomerom $R = 1$ m sa principiálne nemôže pohnúť skôr ako za $t = L/c = 2\pi R/c = 200$ ns. Toto je fyzikálne prípustné minimum. Skôr to byť nemôže.

Kedy sa druhý koniec pohne naozaj? Zatlačíme na koniec tyče. Pohnuté atómy zatlačia na svojich susedov, tí zatlačia ďalej. Vzruch sa dôsledkom napätových síl v materiáli šíri ďalej vo forme vlnenia. Zahnutie obruče mu vôbec neprekáža. Rýchlosť šírenia vln nezávisí od výchylky, iba od materiálu. Napríklad pre oceľ je rýchlosť (tlakových / kompresných / P) vln $\alpha = 6000$ m/s. Pre obruč z minulého odstavca dostaneme čas šírenia 1 ms.

Z výsledku je zjavné, prečo tento efekt nepoznáme z reálneho života. 1 ms je málo. V praxi sa preto tyče správajú „dokonale“ pevne, oba konce sa hýbu (takmer) naraz.

Čas sme teda vyrátali. Dokážeme však vôbec pohnúť nejakou niekoľkotisíckilometrovou oceľovou tyčou, ktorá má v priereze polomer napríklad 2 cm? To je poriadna a ťažká tyč! Keďže po sekunde od nášho zatlačenia vzruch príde len do vzdialenosti 6 km, zvyšok tyče, nech je ľubovoľne dlhý, sa hýbať ešte nebude ani na nás nijako nebude pôsobiť. To nám dáva istú nádej. Stačí rozháňať iba tých 6 km. Uvažujme teda, že chceme v priebehu 1 s zatlačiť koniec tyče o 1 cm. Pre jednoduchosť ďalej uvažujme, že výchylku na konci v čase rovnomerne zvyšujeme z počiatočných 0 cm. To sa prejaví tak, že výchylka medzi začiatkom vzruchu a koncom tyče bude tiež lineárne narastať – výchylka, ktorá bola v čase τ vybudená na konci tyče sa bude na konci prvej sekundy nachádzať vo vzdialenosti $\alpha(1 - \tau)$. Akou silou musíme pôsobiť na konci

tejto sekundy? Za čas Δt sa nám celý signál pohne o $\Delta x = \alpha \Delta t$ ďalej. Preto musíme rozhábať aditívny kus Δx na aktuálnu rýchlosť konca $v = 1 \text{ cm/s}$. Pozor, rýchlosť atómov materiálu v a rýchlosť šírenia vzruchu α sú dve úplne iné rýchlosti, ktoré len náhodou majú rovnaký smer. Potrebná sila ako zmena hybnosti urýchlených atómov za čas je

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta mv}{\Delta t} = \frac{(\rho(\pi R^2)\alpha\Delta t)v}{\Delta t},$$

$$F = \rho(\pi R^2)\alpha v \approx 8000 \text{ kg/m}^3 \cdot 3,14 \cdot (0,02 \text{ m})^2 \cdot 6000 \text{ m/s} \cdot 0,01 \text{ m/s} \approx 600 \text{ N}.$$

Hohoho, zatlačiť silou 600 N zvládne každý!¹¹ Odteraz sa môžete chváliť, že dokážete pohnúť aj nekonečne dlhou oceľovou tyčou – od šiestich kilometrov je to totiž jedno. To, že v skutočnosti ste spravili len vlnku a v jednom čase hýbete vždy len jej niekoľkokilometrovou časťou si ako dobrí kúzelníci nechajte pre seba. Pohne sa aj zvyšok, len si musíte na to počkať.

What if? Uvažujme, že po vašom predstavení si to bude chcieť vyskúšať celá dedina. Naraz zatlačia. Nepodari sa im šíriť informáciu rýchlejšie? Nie. Rýchlosť šírenia informácie je stále α , no 500 dedinčanov dokáže spraviť 500-krát väčšiu výchylku a teda aj 500-krát väčšiu rýchlosť atómov. Výsledná rýchlosť konca tyče $500 \cdot 1 \text{ cm/s} = 5 \text{ m/s}$ je však stále zanedbateľná oproti rýchlosti šírenia vln.

What if? Zapojíme do práce celé Slovensko. Čo sa stane? Za jednu sekundu urýchli 5 miliónov ľudí koniec tyče na rýchlosť 50 km/s .¹² Toto je oveľa viac ako rýchlosť šírenia vln. Ide o „nadzvukovú“ rýchlosť pre daný materiál. Podarí sa nám teraz šíriť informáciu rýchlejšie? Chvilu áno! Problém však je, že pri takejto obrovskej rýchlosti konca tyče nebudú vzdialenejšie časti tyče ležiace v jeho dráhe o ničom vedieť a budú v pokoji až do doby, keď do nich ten koniec zrazu nenarazí obrovskou rýchlosťou. Výsledkom zrážky bude toľko uvoľnenej energie, že sa tieto časti tyče vyparia. . . Takmer okamžite sa však vyparí aj urýchlený koniec tyče, do priestoru naokolo sa vyžiarí energia a v rôznych smeroch rozmetané atómy a jeho zvyšky. Preto ďaleko nezájde ani on. O kúsok ďalej senzor pripevnený na tyč zaznamená už iba záblesk svetla a čochvíľa aj zrážkou vybudené vlnenie šíriace sa svojou obľúbenou rýchlosťou α po zvyšok svojej dlhej cesty. Jedna miliarda Číňanov síce dosiahne zvýšením počiatocnej rýchlosti ešte krajší ohňostroj, ale celkový čas L/α nikdy veľmi neskrátime.

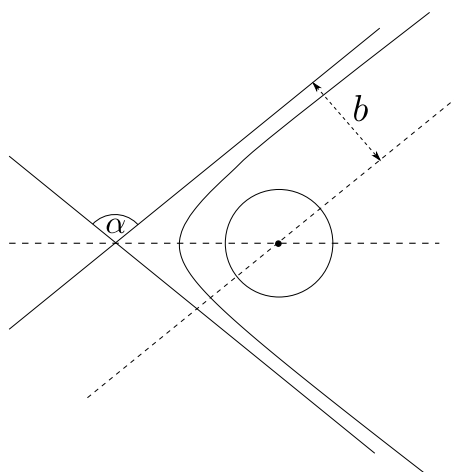
1.7 A4 – Za Jupiterom odbočte vľavo (opravovala Kaja)

Denda už viac nechce žiť na tejto planéte. Tak si zostrojila vesmírnu loď a rovnou čiarou si to namierila na Mars. . . a minula. Chcela zabočiť, ale spomenula si, že jej loď vlastne nemá bočné motory. Vie iba spomaľovať a zrýchľovať. Tak letela ďalej. . . Po čase sa pred ňou začal črtáť Jupiter a ona dostala nápad! Príťažlivá sila Jupitera ju predsa môže vychýliť z jej smeru! Stačí zvoliť vhodnú rýchlosť, vypnúť motory a nechať sa otočiť Jupiterom o požadovaný uhol.

Prezradíme, že jej loď sa bude **pohybovať po hyperbole**, v ktorej ohnisku leží Jupiter, a ktorej asymptota je od stredu Jupitera vzdialená b . Hmotnosť Jupitera je M , gravitačná konštanta je G . Akou rýchlosťou v má „vstúpiť“ do gravitačného poľa Jupitera, ak sa chce otočiť o uhol α (vo vzťažnej sústave Jupitera)?

¹¹To je sila, ktorou tlačia naše nohy pri státi.

¹²Zároveň je to dostatočná rýchlosť aby sme poslali tyč ako slovenskú družicu mimo slnečnej sústavy.



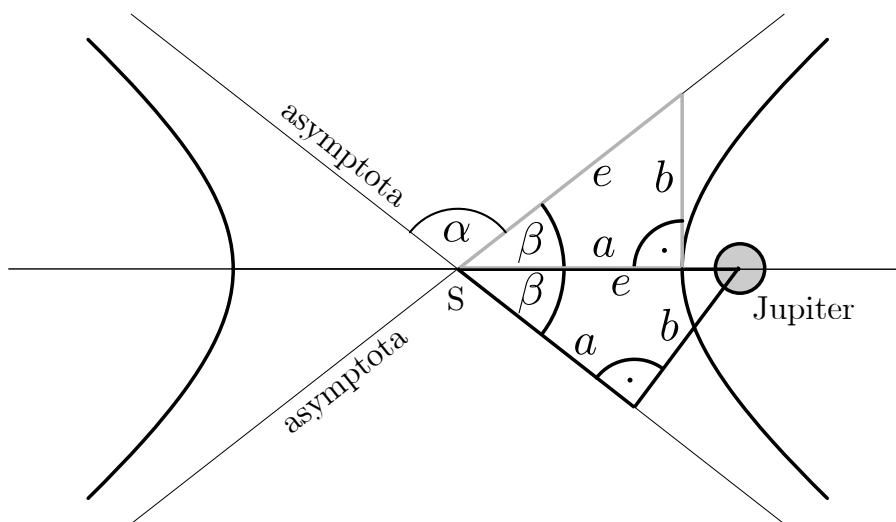
Obr. 13: Hyperbolická trajektória rakety.

Najprv potrebujeme vedieť, čo je to hyperbola a aké má vlastnosti. Ak si otvoríme slovenskú wikipédiu, zistíme, že sme sa veľa nedozvedeli. Preto si otvoríme wikipédiu českú, kde získame potrebné informácie.

Hyperbola je definovaná ako množina bodov, ktoré pri vhodnom natočení súradníc spĺňajú vzťah

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kde a, b sú kladné konštanty nazývané hlavná a veľajšia poloos. Ich geometrický význam pekne zobrazuje sivý trojuholník na obrázku 14.



Obr. 14: Hyperbola s Jupiterom v ohnisku

Z českej wiki ďalej vieme, že vzdialenosť ohniska (teda stredu Jupitera) od stredu S hyperboly je e , pričom platí $e^2 = a^2 + b^2$. Na základe toho si už vieme do obrázku zakresliť čierne

trojuholník, ktorý je zhodný so sivým, len otočený okolo bodu S o uhol β . Z toho vidíme, že vzdialenosť stredu Jupitera (ďalej len Jupitera) od asymptoty, ktorá je v zadaní označená ako b , sa zhoduje s konštantou b predstavujúcou vedľajšiu poloos.

Pomocou tohto obrázka a jednoduchšej goniometrie už vieme vyjadriť všetky potrebné vzdialenosti. Ale ako vyjadríme potrebnú rýchlosť lode? Tu nám pomôže fyzika!

Keďže na vesmírnu loď pôsobí gravitačná sila od Jupitera, ktorej časový priebeh sa vyjadruje pomerne zložito, zákon zachovania hybnosti nám nepomôže. No keďže táto sila pôsobí vždy smerom do stredu Jupitera, moment hybnosti lode vzhľadom na Jupiter bude konštantný. Povedané matematicky

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_J \times \vec{F}_J = \vec{0},$$

kde $\vec{r}_J$ je vektor spájajúci Jupiter a loď.

Zvoľme dva okamihy, v ktorých vieme moment hybnosti jednoducho vypočítať. Prvý bude „na začiatku pohybu“, čo je niekde strašne ďaleko od Jupitera, kde sa môžeme tváriť, že loď sa pohybuje po asymptote, má rýchlosť v a nulovú potenciálnu energiu. Veľkosť momentu hybnosti bude

$$|\vec{L}| = |\vec{r}_J \times \vec{v}| = bv.$$

Druhý okamih si zvolíme taký, že rýchlosť lode u je kolmá na jej spojnicu s Jupiterom. Taká situácia nastane vo vrchole hyperboly, keď loď prechádza cez os x a vzdialenosť lode od Jupiteru je $c = e - a$. Aj vtedy nám vektorový súčin prejde na jednoduchý súčin dvoch skalárov

$$|\vec{L}| = |\vec{r}_J \times \vec{u}| = |\vec{r}_J||\vec{u}| = cu.$$

Zo zákona zachovania momentu hybnosti (ZZMH) dostávame

$$bv = cu, \quad \Rightarrow \quad u^2 = \frac{b^2}{c^2}v^2.$$

Teraz použijeme zákon zachovania energie

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konšt.}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mu^2 - G\frac{mM}{c}.$$

Po dosadení zo ZZMH a upravení dostaneme jednoduchú kvadratickú rovnicu

$$\frac{1}{2}v^2(b^2 - c^2) = GMc.$$

Kladné riešenie (majúce fyzikálny zmysel) tejto rovnice je

$$v = \sqrt{\frac{2GMc}{b^2 - c^2}}.$$

Keď sa vrátíme k tomu, že $c = e - a$, dostávame

$$\frac{2c}{b^2 - c^2} = \frac{2(e - a)}{(e^2 - a^2) - (e^2 - 2ea - a^2)} = \frac{2(e - a)}{2ea - 2a^2} = \frac{1}{a},$$

$$\frac{1}{a} = \frac{\tan \beta}{b} = \frac{\tan 90^\circ - \alpha/2}{b} = \frac{1}{b \tan \alpha/2},$$

$$v = \sqrt{\frac{2GMc}{b^2 - c^2}} = \sqrt{\frac{GM}{b \tan \alpha/2}}.$$

A to je náš výsledok :-).