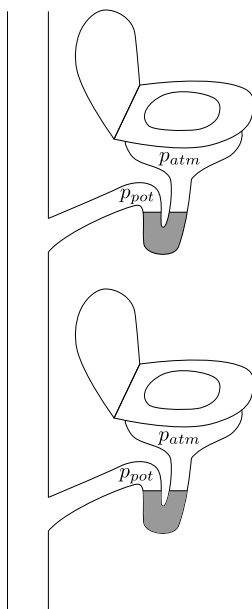


Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 Ako o preteky

vzorák **Denda**, opravovala **Denda**

Predstavte si vodu lejúcu sa z kolmo pretočenej fľaše. Je zjavné, že toto prúdenie ani zďaleka nie je pekne popísateľné ako laminárne. Nejde ako jeden veľký spojitý kus. Rovnako nebude pekne padať ani odpadová, spláchnutá voda dolu potrubím. Vzduch sa jej totižto bude musieť nejako uhýbať. Jednak sa bude stláčať, čím bude rásť jeho tlak a jednak sa bude padajúcou vodou predierať navrch, čím bude trochu vyrovnávať podtlak vznikajúci nad ňou. Aj keby bol v šachte vytvorený nejaký ventilačný systém, ktorý by umožňoval vníkanie/uníkanie vzduchu za účelom vyrovnávania týchto tlakov¹, krátkodobej zmeny tlaku sa nevyhneme. Nuž a nakoľko vonkajší, atmosférický tlak je pre takéto krátke časové intervaly konštantný, meniaci sa tlak vzduchu v potrubí hladinu jednoducho rozkmitá.



Obrázok 1: Schéma odtokového potrubia. Atmosférický tlak p_{atm} je konštantný, zatiaľ čo tlak v potrubí p_{pot} sa mení.

Spomeňme ešte, že podľa Bernoulliho rovnice² budú hodnoty tlaku ovplyvnené aj prúdením vzduchu a odpadovej vody – ich rýchlosťou. Použiť ju však nemôžeme, nakoľko spomínané tekutiny (vzduch a odpadová voda) sú stlačiteľné a prúdenie nie je laminárne. Pointa však zostáva. Tlak v hlavnom potrubí nezávisí len od hustoty tekutiny, ktorá sa v ňom nachádza. Bude zároveň tým menší, čím rýchlejšie sa v ňom táto tekutina pohybuje. Tlak v bočnom potrubí sa mu samozrejme bude snažiť vyrovnávať.

Pre zhrnutie, dôležité bolo uvedomiť si, že tlak v potrubí sa po spláchnutí chvíľu mení. Kým je pod úrovňou padajúcej vody, tlak bude narastať, nakoľko vzduch je padajúcou vodou stláčaný. Po pretečení vody tam bude

¹ nech podtlak nespôsobuje nasávanie vody zo záchodov

² Slávna rovnica vyjadrujúca zákon zachovania mechanickej energie pre ustálené prúdenie ideálnej kvapaliny. Pre viac informácií https://sk.wikipedia.org/wiki/Bernoulliho_rovnica.

tlak naopak nižší, nakoľko nad vodou vzduch redne. Čo sa bude diať počas padania vody si naozaj netrúfam povedať – jej tok je veľmi turbulentný. Prejde však okolo veľmi rýchlo. Nakoniec sa tlak samozrejme opäť ustáli.

Ďalším možným faktorom vplývajúcim na kmitanie hladiny je aj vibrovanie samotného potrubia spôsobené nárazmi vody. Toto vibrovanie sa s istým tlmením šíri rúrami a voda v záchode sa jeho vplyvom rozkmitá od stien. V prípade neviskózne kvapaliny je potom možné kmitanie len v smere kolmom na povrch záchoda/rúry. Reálna kvapalina však je viskózna a teda je možné kmitanie aj v kolmých smeroch. Kmitanie sa v tomto prípade šíri od okrajov k stredu narozdiel od výchylek spôsobených rozdielom tlakov, kde hladina ako celok kmitá hore-dole. Pre hrubú predstavu si môžete zobrať pohár s vodou a jemne búchať po bokoch. Vertikálne výchylky naozaj nebudú veľmi výrazné, pokiaľ záchod nezačne nadsakovať, čo však nepozorujeme.

3.2 Súboj decibelov

vzorák Jaro, opravoval Arthur

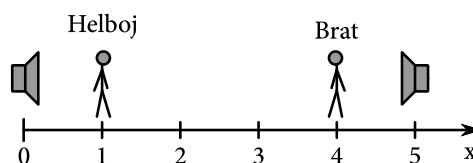
Pre potreby tejto úlohy je dobré mať aspoň základné poznatky o zvuku. Vystačíme si s tým, že zvuk je akési vlnenie, ktoré sa šíri prostredím. Toto vlnenie rozkmitá bubienok v uchu a my to vnímame ako zvuk. Je prirodzené, že pod hlasitosťou rozumieme to, ako veľké je toto kmitanie. No budme trochu odbornejší. Snáď každý vie, že hlasitosť sa udáva v decibeloch. Buď viete, čo tie decibely sú, alebo ste si to vyhľadali na internete. V každom prípade ste určite narazili na takúto definíciu:

$$L = \log\left(\frac{I}{I_0}\right) [\text{B}] = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) [\text{dB}],$$

kde L je hladina intenzity zvuku, I je intenzita zvuku a I_0 je nejaká referenčná intenzita. Nie je problém vygoogliť, že referenčná intenzita je zvolená zhruba ako najslabší zvuk, ktorý dokáže ľudské ucho zachytiť a má hodnotu $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$.

Pre potreby tejto úlohy nie je nutné vedieť, čo presne intenzita zvuku je, no už na základe jednotky vieme, že ide o hustotu výkonu zvukovej vlny. Pre nás je dôležité to, že výkon zvukovej vlny sa musí zachovávať. No a keď sa vlnoplocha vzdaluje od zdroja, rastie jej plocha so štvorcom vzdialenosti, preto hustota výkonu bude klesať so štvorcom vzdialenosti, a teda intenzita zvuku bude úmerná

$$I(r) \propto \frac{1}{r^2}.$$



Obrázok 2: Geometria miestnosti

Vybavení týmito informáciami môžeme pristúpiť k riešeniu našej úlohy. Zavedme si súradnicovú sústavu tak, že jej osi sú paralelné so stenami miestnosti a jej počiatok leží v rohu izby. Potom Helbojov reprák má súradnicu $x = 0 \text{ m}$, Helboj $x = 1 \text{ m}$, jeho brat $x = 4 \text{ m}$ a bratov reprák $x = 5 \text{ m}$. Stačí nám uvažovať len intenzity na ich osi, preto efektívne riešime len 1D problém. Intenzita Helbojovho repráku sa mení ako

$$I_H(x) = \frac{\hat{I}_H}{x^2}$$

a intenzita bratovho repráku ako

$$I_B(x) = \frac{\hat{I}_B}{(5-x)^2}.$$

Z požiadavky, že každý z bratov má počuť hlasnejšie práve ten svoj reprák, dostávame dvojicu podmienok

$$I_H(1) > I_B(1) \longrightarrow \hat{I}_H > \frac{1}{16} \hat{I}_B,$$

$$I_H(4) < I_B(4) \longrightarrow \frac{1}{16} \hat{I}_H < \hat{I}_B.$$

Keď poznáme definíciu hladiny intenzity, nie je žiadnym kumštom prepísať tieto nerovnosti v intenciách hladín intenzity:³

$$\frac{\hat{I}_H}{I_0} > \frac{1}{16} \frac{\hat{I}_B}{I_0} \longrightarrow 10 \log \left(\frac{\hat{I}_H}{I_0} \right) > 10 \log \left(\frac{1}{16} \frac{\hat{I}_B}{I_0} \right) \longrightarrow L_H^{\min} > L_B - 10 \log 16,$$

$$\frac{1}{16} \frac{\hat{I}_H}{I_0} < \frac{\hat{I}_B}{I_0} \longrightarrow 10 \log \left(\frac{1}{16} \frac{\hat{I}_H}{I_0} \right) < 10 \log \left(\frac{\hat{I}_B}{I_0} \right) \longrightarrow L_H^{\max} - 10 \log 16 < L_B.$$

Dostávame teda, že Helboj môže pustiť svoj reprák v rozmedzí hladín intenzity

$$L_H = L_B \pm 10 \log 16 \doteq 60 \pm 12 \text{ dB}.$$

3.3 Vesmírna kanonáda

vzorák **Vladko**, opravoval **Vladko**

Keby sme boli bývali riešili bežný stredoškolský príklad na hodine fyziky a nie FKS, určite by nám dovolili uvažovať homogénne gravitačné pole. Ako by sme vtedy postupovali? Využili by sme zákon zachovania energie a vypočítali rýchlosť vo výške h , pretože súčet kinetickej energie $\frac{mv^2}{2}$ a potenciálnej mgh by bol konštantný. Keď vieme, aký priebeh má závislosť veľkosti rýchlosti od výšky $v(h)$ a uvažujeme podľa zadania veľkú frekvenciu strielania, hľadaná vzdialenosť je $v(h)/f$.

Čo sa zmení pri uvažovaní radiálneho poľa? Na kinetickej energii nič, ale potenciálna energia bude mať iný tvar. Veľkosť gravitačnej sily je $F_g = \kappa \frac{M_z}{r^2}$, kde r je vzdialenosť ťažiska zeme a banánu a M_z je hmotnosť zeme. Potenciálna energia v takomto silovom poli je $E_p = -G \frac{M_z m}{r}$. Pozornému čitateľovi by sa hádam mohlo zdať, že keď pri $F_{gh} = mg$ to bolo $E_{ph} = mgh$, vlastne vždy silu násobíme vhodnou vzdialenosťou a máme energiu (znamienko sa dáko „došachuje“), však $W = Fs$. Bohužiaľ, to neplatí! Dôvodom je, že sila v radiálnom poli nie je konštantná v rôznych vzdialenostiach. Na konci vzoráku si povieme niečo o simulovaní takéhoto problému na počítači.

Teda ak sme si už na internete alebo v knižke našli vzťah pre výpočet potenciálnej energie, vieme, že celková energia Dušanovho banánu, ktorý sa správa ako hmotný bod, je

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{M_z}{R_z}.$$

³Používame takú definíciu hladiny intenzity, aby vychádzala priamo v decibeloch.

Následne vieme vyjadriť závislosť rýchlosti banánu od jeho vzdialenosti od stredu Zeme

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + G \frac{M_z}{r} \right)}.$$

Keď Dušan vystrelí nejaký banán každých $1/f$ sekúnd, n -tý banán bude o $1/f$ tam, kde je v danom momente $(n - 1)$. banán. Ak ich strieľa dostatočne rýchlo, vzdialenosť medzi banánmi je

$$s = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + G \frac{M_z}{r} \right)}.$$

Je dôležité, si uvedomiť, že táto vzdialenosť nezávisí od hmotnosti banánu m , lebo po dosadení počiatočnej energie E sa nám hmotnosť banánu vykrátí. Všimnime si, že pri nekonečnej vzdialenosti od Zeme je vzdialenosť konštantná. Je to tak preto, že sme uvažovali, že banány majú dostatočnú rýchlosť na opustenie gravitačného poľa Zeme (teda aby sa dostali do nekonečna) a mimo neho sa pohybujú už iba konštantnou rýchlosťou.

Skúsme sa ešte pozrieť, ako by sme niečo takéto odsimulovali na počítači. Ide o simulovanie klasickej newtonovskej mechaniky, teda máme nejaké zrýchlenie (spomalenie), čo závisí od polohy. V čase $t = 0$ sa nachádzame v $h = 6378$ km a máme počiatočnú rýchlosť v_0 . Zvolíme si krok dt a spravíme si jednoduchý for-cyklus, kde budeme po krokoch dt (napríklad 0,1 s) vždy robiť nasledovné:

- vypočítaj zrýchlenie a (v našom prípade záporné) podľa poslednej polohy h
- vypočítaj rýchlosť $v_{\text{new}} = v_{\text{old}} + a dt$
- ulož starú polohu a vypočítaj novú $h_{\text{new}} = h_{\text{old}} + v_{\text{new}} dt$
- vypíš niekde do súboru čas a vzdialenosť $h_{\text{new}} - h_{\text{old}}$.

Po zbehnutí programu si môžeme vykresliť graf, ktorý zodpovedá nášmu výsledku.

3.4 Vetrom proti ohňu

vzorák **Denda**, opravovala **Denda**

Prečo vieme sfúknuť zápalku? Rozhodne to nie je tým, že obmedzíme množstvo kyslíka. Ide o to, že znížime jej teplotu pod teplotu vznietenia. Horenie je zložitý fyzikálno-chemický proces plný exotermických reakcií horľavých látok s kyslíkom. Pre vysvetlenie si vystačíme s jednoduchým modelom, pri ktorom potrebujeme teplo na vyparovanie horľavých látok do vzduchu. Tie vo vzduchu reagujú s kyslíkom a vytvárajú/udržia teplo potrebné na vyparovanie ďalšej horľavej zmesi. Odfúknuť týchto horiacich plynov od paliva zapríčiní, že sa oheň už nezvládne udržať.

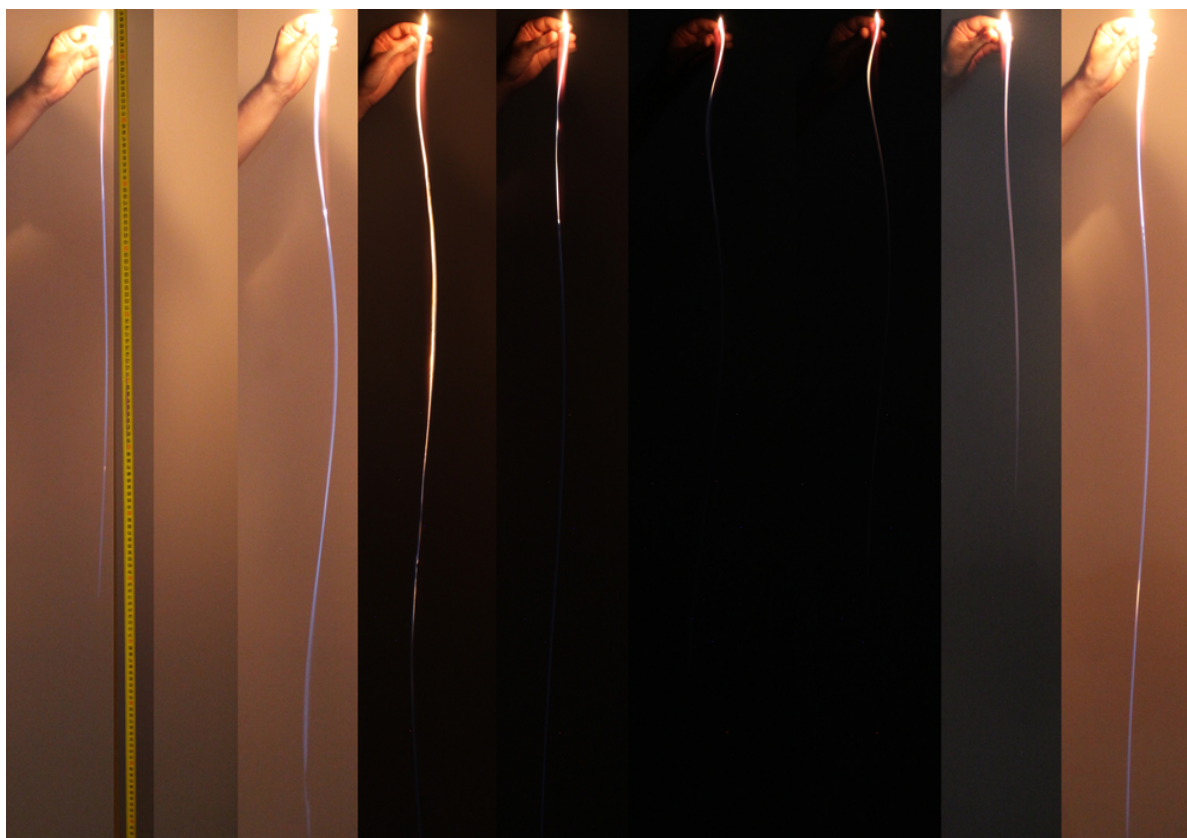
Predstavu, prečo to funguje, máme. Poďme sa teda zamyslieť, ako zmerať rýchlosť fúkania potrebnú na zahasenie zápalky a čo všetko môže mať vplyv na presnosť nášho merania. Najskôr poznamenajme, že zápalky nie sú identické. Keď otvoríte balíček so zápalkami a podrobnejšie ich preskúmate, môžete si všimnúť, že množstvo vysoko horľavej červenej zmesi, tvar drievka a výška zápaliel sa trošičku líšia zápalka od zápalky. Ani pri nekonečnom počte opakovaní merania by sme teda nevedeli určiť presnú hodnotu. Môžeme len preskúmať štatistiku – teda to, aká je pravdepodobnosť, že zápalka pri určitej rýchlosti fúkania zhasne.

Presne regulovať rýchlosť nášho fúkania a navyše ju aj merať je ťažké. Bude teda potrebné využiť nejaký pekný fyzikálny princíp. Prvý, ktorý sme sa rozhodli využiť a ktorý bol často využitý vo vašich riešeniach, bol voľný pád. Ak nebudeme uvažovať možnosť, že by zápalka pri páde mohla dosiahnuť svoju terminálnu rýchlosť⁴, a

⁴Najvyššia dosiahnuteľná rýchlosť padania telesa v tekutine. Odporová sila závisí od rýchlosti a keď teleso dosiahne rýchlosť, pri ktorej sa odporová sila vzduchu vyrovná tiažovej, prestane zrýchľovať.

celkovo ovplyvnenie rýchlosti jej pádu odporom vzduchu, môžeme ju nechať padať voľným pádom, zmerať čas alebo dráhu, počas ktorej pri páde horela a z nameranej hodnoty už nebude problém vypočítať jej rýchlosť v momente zhasnutia.

Nakoľko presnosť merania je pri natáčaní pádu obmedzená počtom snímkov za sekundu – väčšinou je to okolo 30 fps a teda presnosť na 1/30 sekundy, rozhodli sme sa pád fotiť zrkadlovkou v tme na dlhú expozíciu. Takto keď fotku spojíme s ďalšou, na ktorej je v rovnakej vzdialenosti odfotený meter, jednoducho zistíme dĺžku dráhy. Takéto meranie by nám dokola malo umožniť zmerať rozdiel medzi pádom hlavičkou nadol, nahor alebo bokom. Meranie pádu pri hlavičke bokom dosiahneme jednoducho tak, že okolo stredu zápalky upevníme kus plastelíny, alebo ako Matej Hrmo zapichneme zápalku do gumy. Tak dokonca trochu obmedzíme problémy s nestabilitou pádu. Nakoľko sa však relatívne často stávalo, že zápalka zhasla až na zemi, rozhodli sme sa toto meranie opustiť.



Obrázok 3: Ukážka fotiek z merania

Nasledovný pokus o meranie chcel byť len drobnou úpravou. Pomocou dvoch stoličiek, vešiaka na prádlo, dvoch šnúrok od topánok a plastelíny sme vytvorili kyvadlo upevnené v dvoch bodoch. Úmyslom uchytenia v dvoch bodoch bolo spraviť kmitanie stabilnejším, t. j. zabrániť kmitajúcej zápalke opúšťať chcenú rovinu kmitov. Problémom a zaujímavým zistením bolo, že zápalka často zhasínala až pri druhom zákmit nadol. Nie pri očakávanom prvom. To znamená, že zhasnutie nezávisí len na dosiahnutí danej rýchlosti, ale aj na tom, ako dlho je danej rýchlosti vetra vystavená!

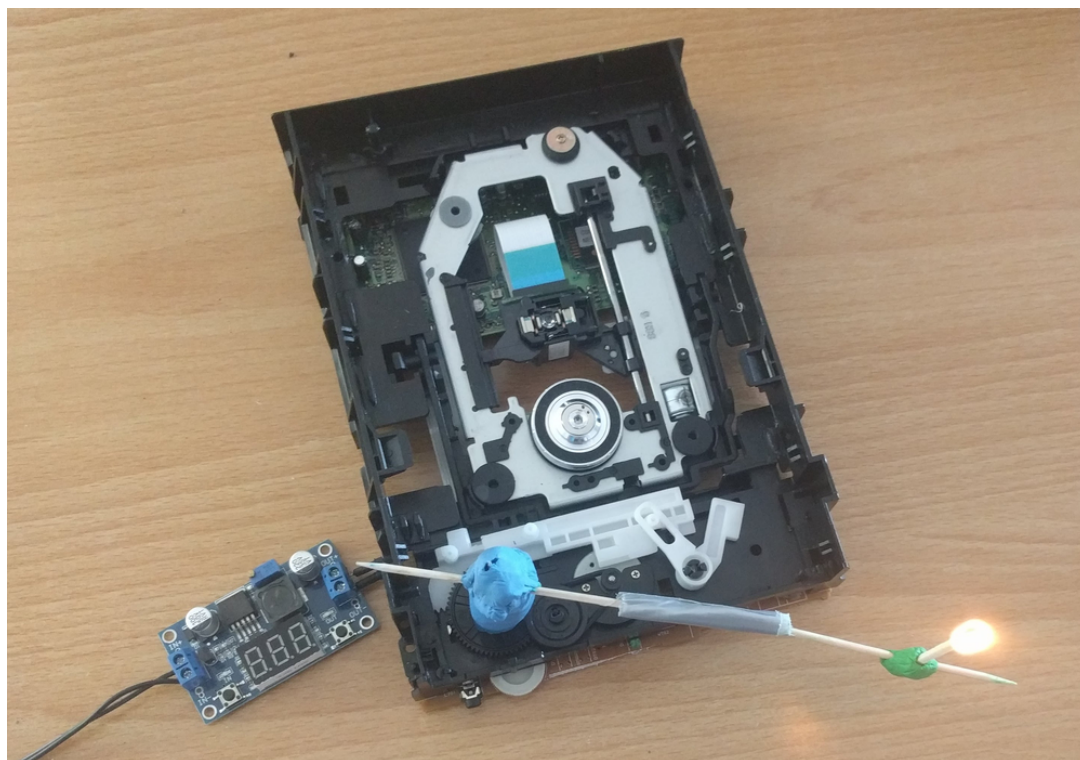


Obrázok 4: Kyvadlová aparátúra

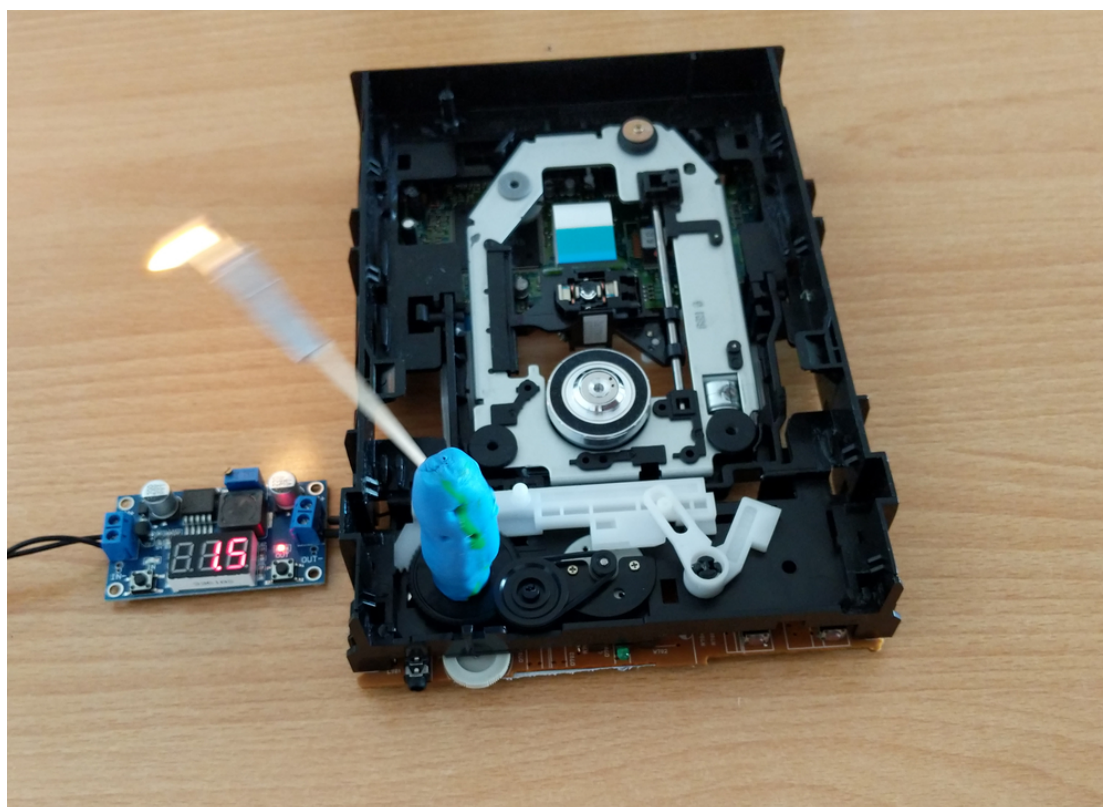
Ďalší nápad preto chcel byť univerzálnejší. Zobrali sme teda starú CD mechaniku, rozobrali sme ju tak, aby sme vedeli využiť jej motorček, a naň sme napichli špáratko s plastelínou (viď obrázok). Do plastelíny sme mohli zapichávať špajdlu⁵, na ktorú sme do vhodnej vzdialenosti pripevňovali bezpečnostné zápalky. Zápalky sme na špajdlu pripevňovali kolmo pomocou plastelíny. Kolmo preto, aby bola jasná vzdialenosť ohňa od osi rotácie. Na meranie vzdialenosti zápalky od osi rotácie nám poslúžilo posuvné meradlo⁶ a napätie sme na motorček privádzali cez napäťový regulátor.

⁵My sme bohužiaľ špajdlu nemali, tak sme ju odimprovizovali z drevok z ozdobných dáždnikov.

⁶Relevantná je len táto vzdialenosť. Tvar plastelíny a špajdle pre nás nebol veľmi dôležitý, ich úlohou bolo len udržať to.



Obrázok 5: Rotačná aparatura



Obrázok 6: Rotačná aparatura

Ak ešte nie je zjavný princíp, ktorý sme použili, tu ho ozrejníme. Motorček pripojený na konštantné napätie nám zabezpečí rotáciu s konštantnou uhlovou rýchlosťou – tú získame z periódy otočenia T ako $\omega = 2\pi/T$. Rýchlosť zápalky v závisí od vzdialenosti od osi rotácie (polomeru) r ako $v = \omega r$. Takže upevňovaním zápalky do správnej vzdialenosti môžeme merať buď čas, ktorý trvá zápalke pri danej rýchlosti zhasnúť, alebo pravdepodobnosť, že zhasne pod nejakú určenú dobu.

Pre určenie periódy sme 10-krát odmerali dobu 20 otáčok. Jednak, aby sa naša reakčná doba rozdelila medzi 20 periód a jednak, aby sme sa uistili, že sa merania od seba navzájom príliš nelíšia – priemerom nikdy nič nepokazíte. Výsledná hodnota bola

$$T = 0,5149 \text{ s} \quad \implies \quad \omega = 12,2027 \text{ s}^{-1}.$$

Následne sme pre každú zo vzdialeností 1, 2, 3, 4,5, 6, 7,5, 9, 10,5, 12,5, 15 a 17 cm spravili 10 meraní času zhasnutia zápalky. Pre vzdialenosť 17 cm iba 5, nakoľko zápalka zhasínala tak rýchlo, že reakčné chyby boli percentuálne veľmi vysoké. Výsledky meraní uvádzame v tabuľkách. ‘–’ znamená, že zápalka nezhasla (čiže sa dostala do bodu, kde sme ju museli sfúknuť, aby nezačala taviť plastelínu).

polomer	naprázdno	1 cm	2 cm	3 cm	4,5 cm
	–	21,83	25,93	6,70	6,97
	–	–	24,42	17,57	11,67
	–	–	5,80	16,11	3,45
	34,98	–	–	9,96	7,93
	–	–	–	27,28	5,12
	29,81	28,14	–	5,88	8,99
	20,61	–	19,21	5,09	5,09
	–	–	–	24,15	10,63
	–	–	–	18,25	5,26
	–	–	14,98	9,95	5,14
priemerný čas	–	–	–	14,094 s	7,025 s
rýchlosť v	–	–	–	0,366 ms ⁻¹	0,549 ms ⁻¹

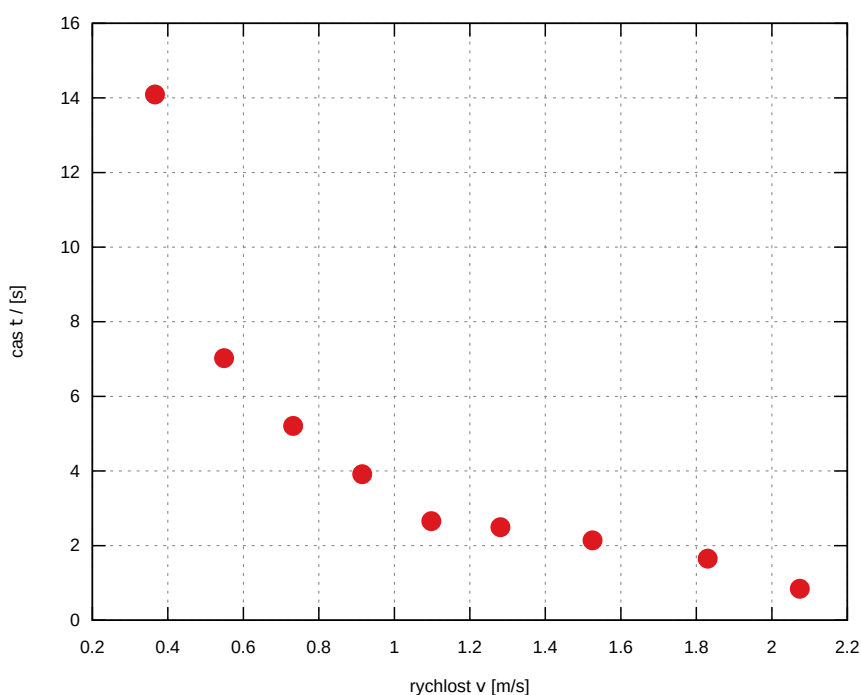
polomer	6 cm	7,5 cm	9 cm	10,5 cm	12,5 cm	15 cm
	2,93	4,57	2,08	1,92	2,01	1,63
	1,64	1,33	3,07	1,16	0,98	0,87
	3,85	1,21	1,51	3,48	1,14	0,52
	5,54	1,69	1,76	4,33	1,31	0,43
	4,12	5,44	1,13	2,04	1,38	0,77
	3,43	1,56	3,47	2,30	1,73	
	3,82	2,15	3,09	1,15	2,04	
	5,24	2,96	3,53	2,92	1,77	
	4,37	3,87	3,01	1,02	1,82	
	4,20	1,78	2,30	1,10	2,31	
priemerný čas	3,914 s	2,656 s	2,495 s	2,142 s	1,649 s	0,844 s
rýchlosť v	0,915 ms ⁻¹	1,097 ms ⁻¹	1,28 ms ⁻¹	1,524 ms ⁻¹	1,829 ms ⁻¹	2,073 ms ⁻¹

Predpokladám, že pri pozretí sa do tabuliek si pomyslíte, že to nie sú práve najšťastnejšie dáta. Na meranie totiž mohlo mať výrazný vplyv množstvo faktorov. Okrem toho, že každá zápalka je jedinečná, výsledky boli značne ovplyvnené mojim reakčným časom, nakoľko čas bol stopovaný stopkami na mobile. Meranie vyzeralo tak, že v momente zapálenia zápalky (na zvuk zapálenia) som púšťala stopky a predlžovačku (čiže zdroj napätia). Človek má však len dve ruky, takže na predlžovačku som musela použiť nohu.

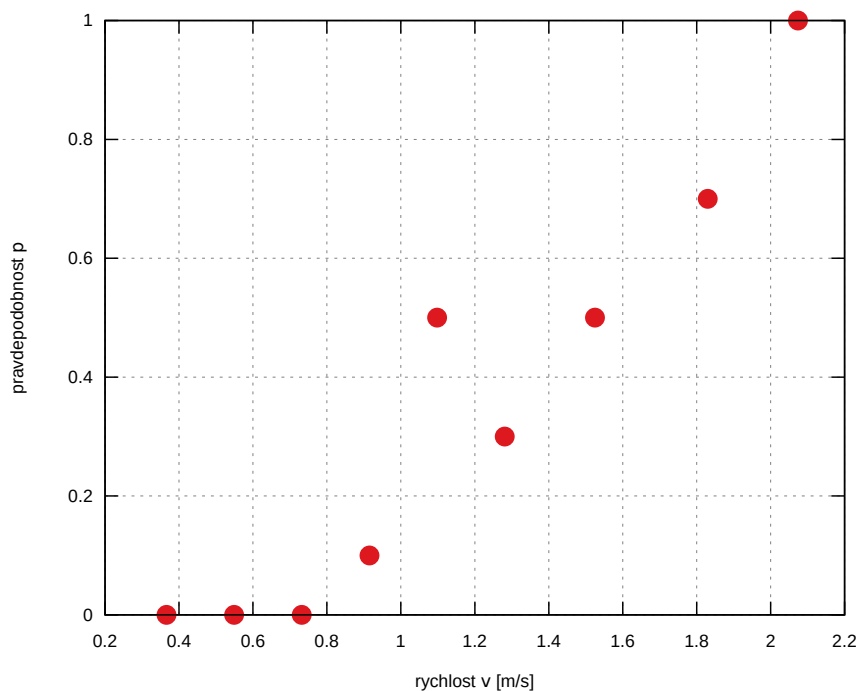
Tieto tri udalosti sa mi napriek snahe nepodarilo dokonale synchronizovať. Zložitou časťou úlohy bolo aj posúdenie momentu zhasnutia. Ideálne by bolo naraz so zastavením stopiek zastaviť aj predlžovačku, nech sme si istý, že sa oheň už nerozhorí. Dosiahnuť to však bolo veľmi netriviálne. Ak by sme chceli dosiahnuť presnejšie výsledky, množstvo z týchto faktorov by sme dokázali eliminovať natančím meraní a analýzou videí. Vhodné by bolo aj zvýšiť počet opakovaní.

Pre tak veľmi líšiace sa hodnoty, 10 meraní pre rýchlosť nie je dostatočná štatistická vzorka. Ovpływujúce faktory sme však ešte nevyčerpali. Je taktiež možné, že zápalky neboli umiestnené presne uvedenú vzdialenosť od osi rotácie, mohli sa tiež trochu vychýľovať vplyvom odstredivých síl, oheň nie je bodový, nejaký vplyv mohlo mať aj zrýchlenie na začiatku a samozrejme nepresnosť meracích prístrojov (tá však je v porovnaní s ostatnými chybami zanedbateľná).

Podme ešte zanalyzovať naše výsledky. Ako sme očakávali, priemerný čas zhasnutia naozaj klesal s rastúcim polomerom, a teda rastúcou rýchlosťou. Úlohou bolo zodpovedať otázku: *Ako rýchlo treba fúkať, aby sme zápalku uhasili?* Nuž, niekedy netreba fúkať vôbec. Istotu by sme však mali mať nad rýchlosťou $0,366 \text{ ms}^{-1}$. Ak uvažujeme zhasínanie zápaliek našim fúkaním, ktoré nezvykne trvať veľmi dlho, povedzme, že jeho trvanie by sme odhadli na 2 sekundy (pravdepodobne je však kratší), tak pri rýchlosti $0,915 \text{ ms}^{-1}$ už začneme mať nejakú šancu, že ju sfúkame. Istotu by sme mali mať nad $2,074 \text{ ms}^{-1}$. Tu sú naše výsledky vykreslené do grafov.



Obrázok 7: Priemerný čas zhasnutia zápalky pri danej rýchlosti.



Obrázok 8: Pravdepodobnosť zhasnutia zápalky do 2 sekúnd pri danej rýchlosti.

Nakoniec ešte pre inšpiráciu spomeniem pekný princíp merania, ktorý využila Michaela Leinwatherová. Tá si postavila aparáturu zo starého počítačového ventilátora, regulovateľného zdroja jednosmerného napätia, kartónovej krabice, PVC rúry a anemometra. Menením napätia menila otáčky ventilátora, a teda aj rýchlosť vzduchu. Ten efektívne zachytávala krabica a presmerovávala ho do rúrky. Rýchlosť vytekajúceho vzduchu zaznamenávala anemometrom. Pomalým prechádzaním zápalkami popred rúrku zmerala pre rôzne rýchlosti pravdepodobnosť, či pri prechode zápalka zhasne alebo nie.



Obrázok 9: Miškina aparátúra

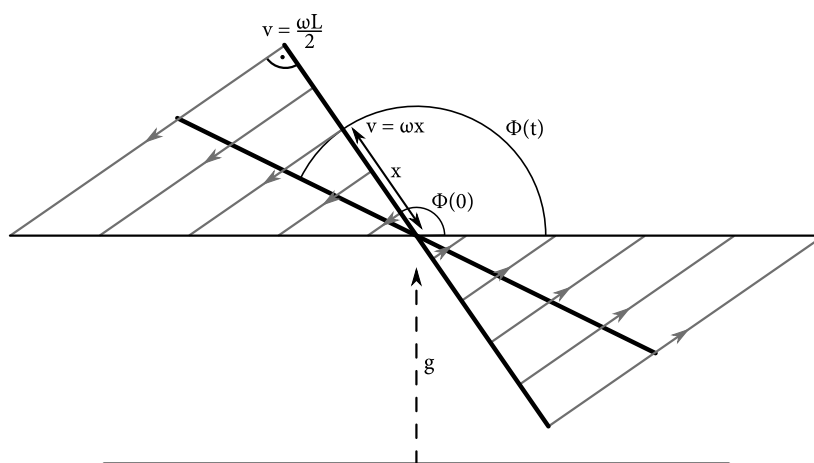
3.5 Nepoučiteľný

vzorák Adam, opravoval Simon

Na začiatok sa pokúsime odolať pokušeniu riešiť spojitú veľa šikmých vrhov. Keďže po rozpadnutí palice pôsobí na jednotlivé kúsky len tiažová sila, vieme povedať, že ťažisko, ktoré na začiatku stálo, sa bude hýbať voľným pádom k zemi. Vo vzťažnej sústave s ním spojennej sa budú kúsky rozpadnutej sa palice hýbať rovnomerne priamočiari.

Jedinou cenou za takýto prechod je, že zem teraz zrýchľuje tiažovým zrýchlením nahor. Jednotlivé kúsky palice sa hýbu nielen rovnomerne priamočiari, ale ich rýchlosť je tiež úmerná vzdialenosti od stredu/ťažiska palice. Teda ak by sme sa pozreli na rýchlosť kúsok, ktorý bol na začiatku vo vzdialenosti x od stredu palice, je to $v(x) = \omega x$. Dráha ktorú tento kúsok prejde v čase je teda $vt = \omega xt$. Ak sa teraz pozrieme na pomer tejto vzdialenosti k x , dostaneme ωt . To znamená, že aj po rozpadnutí budú tvoriť (teraz už predlžujúcu sa) čiaru. Označme uhol, ktorý zvierá táto čiara s vodorovnou hladinou v čase t ako $\varphi(t)$. Uhol v čase rozpadnutia nech je $\varphi(0)$.

Už spomenutá rôznorodosť rýchlostí kúskov spôsobuje, že lineárne v čase bude rásť $\tan(\varphi(t) - \varphi(0))$.



Obrázok 10: Tyč

Vieme, že nemôže nastať situácia, v ktorej dopadnú všetky kúsky neskôr ako ťažisko. Keďže čas dopadu ťažiska je pre zadané parametre konštantný $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, najlepšie, čo vieme dosiahnuť je dopad ťažiska ako prvého. Ak má ťažisko dopadnúť prvé, musia spolu s ním dopadnúť rovno všetky kúsky. To zodpovedá situácii

$$\varphi(\tau) = \pi,$$

čiže

$$\pi = \varphi(0) + \arctan \omega \tau,$$

$$\varphi(0) = \pi - \arctan \omega \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

3.6 Ľadovcová sánkovačka II.

vzorák Jaro, opravoval MaťoB

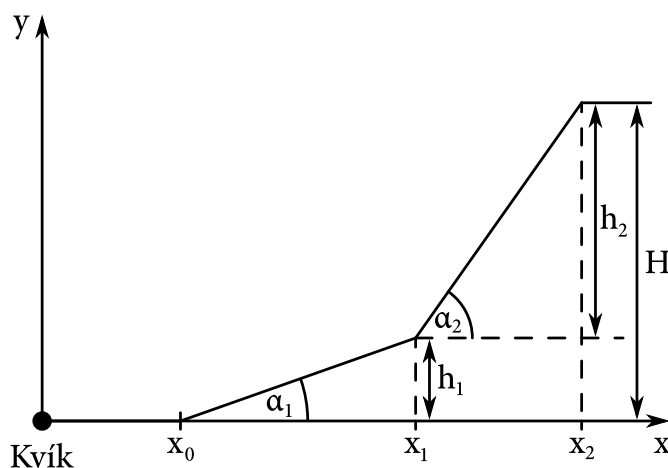
Hovoríte si, že tento príklad bude malina a nemôže priniesť nič zaujímavé oproti príkladu z predchádzajúcej série?⁷ Nuž oprobujme. Princíp riešenia bude, samozrejme, rovnaký. Nebudeme sa preto zapodievať zdĺhavou kvalitatívnou analýzou. Poučení riešením minulého príkladu⁸ vieme určiť, ako bude Kvíkov Ľadovec vyzeráť. Ale naozaj? Máme tu totiž nejaké nové črty. Menovite musíme vedieť interpretovať časy idúce do nekonečna. Ak ste však minule čítali vzorák pozorne, nemalo by to robiť veľký problém.

Kvíkov graf hovorí, že ak kvádrik vypustíme s veľmi malou rýchlosťou, tak by mal byť čas návratu obrovský. Ale ako je to možné? Veď predsa keď takto pomaly idúci kvádrik začne stúpať po Ľadovci nahor, musí prakticky okamžite zastať a vrátiť sa. Riešenie je prosté – kvádrik nemôže hneď začať stúpať. To znamená, že Ľadovec môže byť zo začiatku klesať a potom stúpať, alebo tam môže byť zo začiatku vodorovný úsek.

Vplyv jamy v Ľadovci na čas návratu kvádríka sme skúmali už minule a zistili sme, že jama v Ľadovci spôsobuje konečne veľké zdržanie kvádríka, čiže na grafe by sa mal v prípade jamy objaviť odskok konečnej výšky. Ozaj, aj na sústredení bude riešením štvrtej šifry slovo Ľadovec, ale láskavo si to nechaj pre seba. Ďalej sme povedali, že čím je jama plytšia, tým je odskok na grafe väčší. My však na Kvíkovom grafe vidíme nekonečne veľký odskok,⁹ čo znamená, že jama musí byť nekonečne plytká, a teda je to de facto rovina. Kvík si teda na rozdiel od Filipa drží od Ľadovca odstup.

Ďalej na grafe vidíme zlom. Jeho prítomnosť sme si vysvetlili už minule. Ostrý zlom v grafe značí skokovú zmenu sklonu. Akurát v tomto prípade je zlom opačne otočený a po zlome sa graf blíži k priamke s miernejším sklonom. To znamená, že sklon Ľadovca sa mení skokovo k strmšiemu.

Posledná črta na grafe je odskok na konci, za ktorým už nemáme zobrazené žiadne dáta. To sa dá interpretovať veľmi jednoducho – nech Kvík akokoľvek zvyšoval rýchlosť kvádríka, ten sa už nevrátil. To znamená, že kvádrik už musel dosiahnuť vrchol Ľadovca. Čo sa nachádza za vrcholom, na základe dát, ktoré máme k dispozícii, rozhodnúť nevieme.



Obrázok 11: Kvíkov Ľadovec

Keď už vieme, ako má Ľadovec vyzeráť, môžeme pristúpiť k počítaniu. Budeme postupovať nasledovne – budeme vychádzať zo známeho tvaru a dopočítame príslušné charakteristické návratové časy pre význačné počiatočné rýchlosti. Potom rovnice otočíme a vyjadríme z nich parametre Ľadovca.

⁷<https://fks.sk/ulohy/zadania/1503/>

⁸<https://fks.sk/ulohy/riesenia/1503/>

⁹Za normálnych okolností by sme mali pre limitne nulové rýchlosti limitne nulové časy návratu, no my máme nekonečne veľký návratový čas.

Označme postupne rýchlosti na grafe V_0 , V_1 a V_2 a im prislúchajúce návratové časy T_0 , T_1 a T_2 . Začnime tým najjednoduchším, a tým je určenie výšky polohy zlomu h_1 a celkovej výšky ľadovca H . To vieme urobiť priamo zo zákona zachovania energie. Vieme totiž, že ak vystrelíme kvádrik rýchlosťou V_1 , zastane presne v mieste zlomu, a ak ho vystrelíme rýchlosťou V_2 , dosiahne práve vrchol ľadovca, preto platí

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{V_1^2}{2g}, \\ H &= \frac{V_2^2}{2g}. \end{aligned} \quad (1)$$

Zvyšné výpočty už nebudú také jednoduché. Budeme musieť poctivo vychádzať z kinematických rovníc pre rovnomerný a rovnomerne zrýchlený pohyb a presne matematicky popísať Kvíkov graf. Budeme musieť uvažovať tri prípady v závislosti na počiatočnej rýchlosti kvádríka v_0 .

Prvý prípad: $v_0 \leq V_1$

V tomto prípade nemá kvádrik dostatočnú rýchlosť, aby prekonal skok v sklone ľadovca. To znamená, že sa najskôr pohybuje po rovine a potom začne stúpať. Vodorovnú časť prekoná za čas $t_0 = \frac{x_0}{v_0}$.¹⁰ Následne sa začne pohybovať so spomalením $a_1 = g \sin \alpha_1$. Spomalený pohyb až do momentu zastavenia trvá čas $t_1 = \frac{v_0}{g \sin \alpha_1}$. Celkový čas do návratu je dvojnásobkom súčtu týchto dvoch časov

$$T = 2(t_0 + t_1) = 2\left(\frac{x_0}{v_0} + \frac{v_0}{g \sin \alpha_1}\right). \quad (2)$$

Druhý prípad: $V_1 \leq v_0 \leq V_2$

Aj v tomto prípade sa kvádrik najskôr pohybuje po rovine po dobu $t_0 = \frac{x_0}{v_0}$ a potom začne spomaľovať pri stúpaní. Tentokrát však prekročí aj zlom v ľadovci, preto treba uvažovať rozdielne spomaľovanie na jednotlivých úsekoch. Najskôr spomaľuje so spomalením $a_1 = g \sin \alpha_1$ na dráhe $s_1 = \frac{h_1}{\sin \alpha_1}$, teda platí $\frac{h_1}{\sin \alpha_1} = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g \sin \alpha_1 t_1^2$.

Riešením tejto rovnice je čas spomaľovania $t_1 = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2h_1 g}}{g \sin \alpha_1}$. Zoberieme riešenie so znamienkom mínus, pretože čas spomaľovania musí byť určite kratší než čas $t'_1 = \frac{v_0}{g \sin \alpha_1}$, ktorý by zodpovedal úplnému zastaveniu.

V tomto momente má rýchlosť $v_1 = v_0 - g \sin \alpha_1 t_1 = \sqrt{v_0^2 - 2h_1 g} = \sqrt{v_0^2 - V_1^2}$. Následne vstúpi do druhej časti ľadovca, kde sa pohybuje so spomalením $a_2 = g \sin \alpha_2$. Pohyb v tejto časti do úplného zastavenia trvá

$t_2 = \frac{v_1}{g \sin \alpha_2} = \frac{\sqrt{v_0^2 - V_1^2}}{g \sin \alpha_2}$. Výsledný čas do návratu je teda

$$T = 2(t_0 + t_1 + t_2) = 2\left(\frac{x_0}{v_0} + \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - V_1^2}}{g \sin \alpha_1} + \frac{\sqrt{v_0^2 - V_1^2}}{g \sin \alpha_2}\right). \quad (3)$$

Tretí prípad $V_2 \leq v_0$

Posledný prípad je najjednoduchší. Odbavíme ho bez akéhokoľvek počítania. Vieme, že v tomto prípade sa kvádrik nevráti, preto priamo píšeme

$$T = \infty. \quad (4)$$

¹⁰Tu vidíme, prečo v prípade malých počiatočných rýchlostí dostávame obrovské časy.

Teraz sa môžeme pozrieť, aké časy zodpovedajú hraničným rýchlostiam V_1 a V_2 . Správime tak jednoduchým dosadením týchto rýchlostí do 2, resp. 3. Dostaneme

$$T_1 = 2 \left(\frac{x_0}{V_1} + \frac{V_1}{g \sin \alpha_1} \right),$$

$$T_2 = 2 \left(\frac{x_0}{V_2} + \frac{V_2 \pm \sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{g \sin \alpha_1} + \frac{\sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{g \sin \alpha_2} \right). \quad (5)$$

Získali sme dve rovnice o troch neznámych x_0 , α_1 a α_2 , takže potrebujeme ešte jednu nezávislú rovnicu. Doteraz sme ešte nikde nevyužili rýchlosť V_0 a nej prislúchajúci čas návratu, tak sa zamyslime, ako ich vieme využiť. Všimnime si, že v okolí rýchlosti V_0 sa návratový čas veľmi nemení, teda možno písať

$$T(V_0) \approx T(V_0 + \delta V),$$

kde δV je malá zmena rýchlosti. Keďže tieto rýchlosti sú menšie ako V_1 , za T dosadíme výraz 2 a dostaneme

$$2 \left(\frac{x_0}{V_0} + \frac{V_0}{g \sin \alpha_1} \right) \approx 2 \left(\frac{x_0}{V_0 + \delta V} + \frac{V_0 + \delta V}{g \sin \alpha_1} \right).$$

Postupnými úpravami sa vieme dopracovať k tvaru

$$x_0 \approx \frac{V_0 (V_0 + \delta V)}{g \sin \alpha_1}.$$

Vzhľadom na to, že $\delta V \ll V_0$, tak platí

$$x_0 = \frac{V_0^2}{g \sin \alpha_1}. \quad (6)$$

Alternatívne vieme použiť priamo rovnicu 2 napísanú pre bod $[V_0; T_0]$ a mali by sme dostať rovnaký číselný výsledok. Ak však budeme hľadať analytické riešenie, budeme pravdepodobne dostávať zložitejšie výrazy, v ktorých bude vystupovať aj čas T_0 .

Konečne sme získali sústavu troch rovníc o troch neznámych, ktorú vieme vyriešiť. Tieto rovnice sú pomerne komplikované, a tak môžeme zvoliť cestu menšieho odporu a sústavu vyriešiť numericky. Avšak pre prípad, že sa medzi riešiteľmi nachádzajú podobní masochisti, ako je autor tohto vzoráku, uvedieme si tu analytické riešenie.

Ako prvý krok z rovníc vylúčime uhol α_1 . Z 6 vyjadríme

$$\frac{1}{g \sin \alpha_1} = \frac{x_0}{V_0^2} \quad (7)$$

a dosadíme do rovnice 5. Dostaneme

$$T_1 = 2 \left(\frac{1}{V_1} + \frac{V_1}{V_0^2} \right) x_0, \quad (8)$$

$$T_2 = 2 \left(\left(\frac{1}{V_2} + \frac{V_2 - \sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{V_0^2} \right) x_0 + \frac{\sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{g \sin \alpha_2} \right). \quad (9)$$

Následne z rovníc vylúčime aj x_0 . Z rovnice 8

$$x_0 = \frac{T_1 V_1 V_0^2}{2(V_0^2 + V_1^2)}, \quad (10)$$

no a po dosadení do rovníc 7 a 9 konečne dostávame

$$\sin \alpha_1 = 2 \frac{V_0^2 + V_1^2}{V_1 g T_1}, \quad (11)$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{2\sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{g \left(T_2 - \frac{V_1(V_0^2 + V_2^2 - V_2\sqrt{V_2^2 - V_1^2})}{V_2(V_0^2 + V_1^2)} T_1 \right)}. \quad (12)$$

Teraz už zostáva len dopočítať numerické hodnoty všetkých parametrov:

$$x_0 = 5 \text{ m}$$

$$\alpha_1 \doteq 30^\circ$$

$$h_1 \doteq 20 \text{ m}$$

$$x_1 = x_0 + h_1 \cotg \alpha_1 \doteq 40 \text{ m}$$

$$\alpha_2 \doteq 60^\circ$$

$$h_2 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \doteq 60 \text{ m}$$

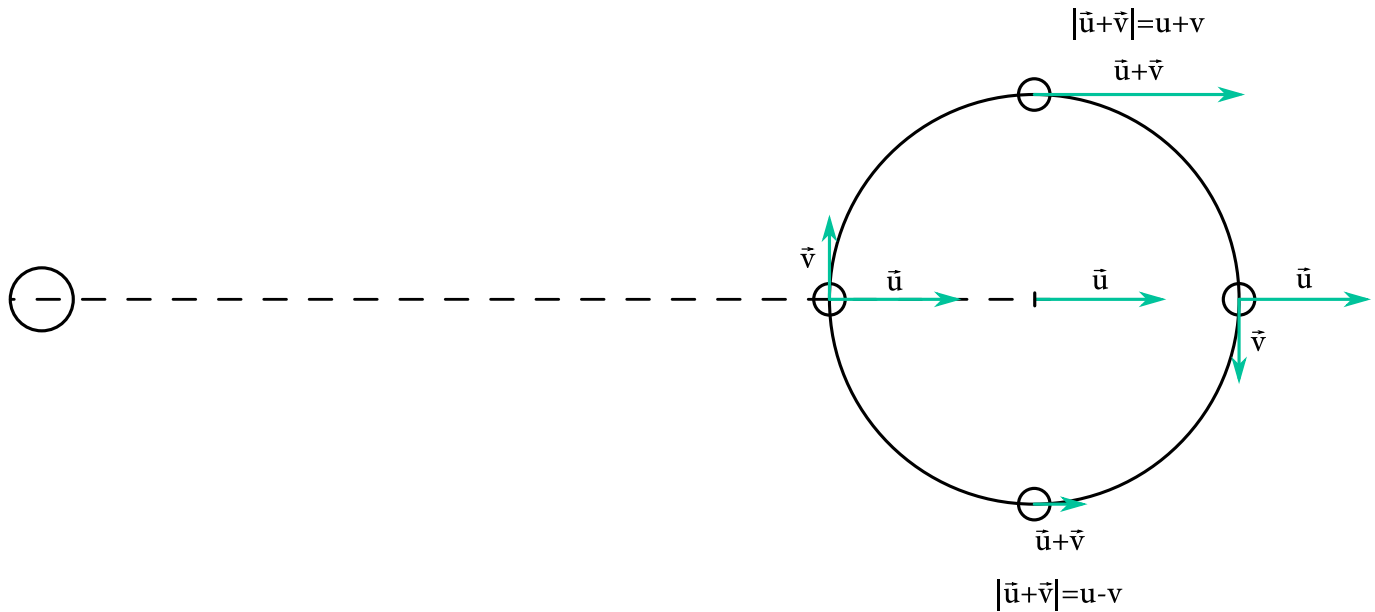
$$x_2 = x_1 + h_2 \cotg \alpha_2 \doteq 74 \text{ m}$$

$$H \doteq 80 \text{ m}$$

3.7 Hviezdny valčík

vzorák Jaro, opravoval Jaro

Prvá vec, ktorú si musíme uvedomiť, je dôvod, prečo Kvík pozoruje v rozličných postaveniach hviezd rozličné frekvencie tej istej spektrálnej čiary. Po chvíľke dumania prídeme na to, že jediným rozumným vysvetlením je Dopplerov jav v spojení s tým, aký pohyb hviezd vykonávajú. Tie totiž obiehajú okolo spoločného ťažiska rýchlosťou v , ktoré sa navyše od Zeme vzdáľuje rýchlosťou u . Keď sú teda obe hviezdy a Zem na jednej priamke, obe hviezdy sa od Zeme pohybujú rýchlosťou u . Keď je spojnica hviezd kolmá na smer k Zemi, vtedy sa jedna z hviezd pohybuje vzhľadom na Zem rýchlosťou $u + v$ a druhá rýchlosťou $u - v$. To je dôvodom, prečo Kvík pozoruje dvojicu spektrálnych čiar.



Obrázok 12: Pohyb dvojhviezdy

Keď sme prišli na príčinu rozdielov vo frekvencii tej istej spektrálnej čiary, môže sa zdať, že už máme vyhraté. Stačí to už len nahádzať do rovníc a vybúchať z nich rýchlosť u . Alebo žeby nie? Pripomeňme, že zmenu frekvencie pri Dopplerovom jave popisuje rovnica

$$f' = f \frac{c \pm w_r}{c \pm w_s}, \quad (13)$$

kde c je rýchlosť vlnenia, w_r je rýchlosť pozorovateľa (receiver) a w_s je rýchlosť zdroja (source). Znamienka vyberáme podľa toho, ktorým smerom sa pozorovateľ a zdroj pohybujú. Prípustné sú všetky štyri kombinácie.

V našom prípade je c rýchlosť svetla. Ale čo sú naše rýchlosti w_r a w_s ? Na prvý pohľad je zjavné, že výsledok závisí na voľbe vzťažnej sústavy. Otázka znie, ako volíme vzťažnú sústavu. Aby sme si na to zodpovedali, uvažujme názornejší príklad – dve autá pohybujúce sa oproti sebe. Vtedy máme na výber vzťažné sústavy spojené s jednotlivými autami, s babkou stojacou na zastávke či s Jožkom utekajúcim na autobus, ale aj akúkoľvek inú vzťažnú sústavu.

Niekomu by mohlo napadnúť, že vzťažnú sústavu volíme podľa toho, o kým pozorovanú frekvenciu sa zaujíname, teda ak nás zaujíma, akú frekvenciu počuje babka, tak situáciu popisujeme v babkinej sústave. Ale čo potom vo vzťahu 13 robí rýchlosť w_r , keď tá by musela byť vždy nulová? Tá rýchlosť tam nebude len tak, a preto táto voľba nemôže byť správna.

V skutočnosti volíme vzťažnú sústavu spojenú s prostredím, v ktorom sa vlnenie šíri. V prípade zvuku je tým prostredím vzduch. A čo v prípade svetla? Teória relativity hovorí, že svetlo sa vo všetkých vzťažných sústavách šíri rovnako, teda v prípade svetla výsledok nemôže závisieť na voľbe vzťažnej sústavy. To je však v rozpore so vzťahom 13, preto ten nemôže popisovať Dopplerov jav pre svetlo.

Vzťah 13 je odvodený na základe Galileiho transformácií, ktoré sú nerelativistické. Keby sme využili relativistické Lorentzove transformácie, dostali by sme odlišný vzťah

$$f' = f \sqrt{\frac{c \pm w}{c \mp w}}. \quad (14)$$

Jeho odvodenie tu nebudeme vykonávať, keďže čitateľ si ho vie jednoducho vyhľadať v dostupnej literatúre či na webe. Len poznamenajme, že v čitateli aj v menovateli vystupuje rovnaká rýchlosť w , ktorá je vzájomnou rýchlosťou zdroja a pozorovateľa, preto výsledok nezávisí na voľbe vzťažnej sústavy. V tomto prípade sú prípustné len dve kombinácie znamienok – vždy vyberáme rozdielne znamienka, pričom ich voľba závisí na tom, či sa objekty od seba vzdávajú alebo či sa k sebe približujú.

Tú zaujímavejšiu časť úlohy máme za sebou. Teraz sa už môžeme pustiť do počítania. Nech je skutočná frekvencia spektrálnej čiary f . Pre pozorované frekvencie potom platí

$$\begin{aligned} f_+^2 &= f^2 \frac{c - (u + v)}{c + (u + v)}, \\ f_-^2 &= f^2 \frac{c - (u - v)}{c + (u - v)}, \\ f_0^2 &= f^2 \frac{c - u}{c + u}. \end{aligned} \quad (15)$$

Vylúčme zo sústavy rovníc skutočnú frekvenciu spektrálnej čiary f predelením prvých dvoch rovníc v 15 tretou. Po niekoľkých jednoduchých úpravách sa dopracujeme do tvaru

$$\begin{aligned} f_+^2 (u^2 + uv - cv - c^2) &= f_0^2 (u^2 + uv + cv - c^2), \\ f_-^2 (u^2 - uv + cv - c^2) &= f_0^2 (u^2 - uv - cv - c^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Vidíme, že obe rovnice sú lineárne vo v a kvadratické v u . Zaujímame sa o rýchlosť vzdávania dvojhviezdy u , preto z oboch rovníc vyjadíme obežnú rýchlosť hviezd v :

$$v = \frac{(u^2 - c^2)(f_0^2 - f_+^2)}{f_+^2(u - c) - f_0^2(u + c)}, \quad (17)$$

$$v = \frac{(u^2 - c^2)(f_0^2 - f_-^2)}{f_-^2(c - u) + f_0^2(c + u)}. \quad (18)$$

Veľmi nás teší, že v oboch rovniciach sa vyskytuje rovnaký faktor $(u^2 - c^2)$, pretože keď rovnice medzi sebou predelíme, tento faktor z nich vypadne, čím sa efektívne zníži stupeň rovnice z kubickej na lineárnu. Postupnými úpravami dospejeme ku konečnému výsledku

$$u = \frac{f_+^2 f_-^2 - f_0^4}{(f_+^2 - f_-^2)(f_-^2 - f_0^2)} c. \quad (19)$$

Niekoho by mohlo napadnúť, že vzájomné rýchlosti hviezd a Zeme sú veľmi malé v porovnaní s rýchlosťou svetla, preto by malo byť možné vzťah 14 linearizovať. Aplikujme naň Taylorov rozvoj

$$f' = f \sqrt{\frac{c - w}{c + w}} = f \sqrt{\frac{1 - \frac{w}{c}}{1 + \frac{w}{c}}} = f \left(1 - \frac{w}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{w}{c} \right)^2 + o \left(\left(\frac{w}{c} \right)^2 \right) \right).$$

Uvažujme najskôr rozvoj len do prvého rádu. V takom prípade dostaneme sústavu rovníc

$$f_+ = f \left(1 - \frac{u+v}{c} \right),$$

$$f_- = f \left(1 - \frac{u-v}{c} \right),$$

$$f_0 = f \left(1 - \frac{u}{c} \right).$$

Okamžite vidíme, že táto sústava je ekvivalentná použitiu klasického Dopplera vo vzťažnej sústave zdroja vlnenia. Keď ju však začneme riešiť, narazíme na problém, pretože z nej vypadnú všetky rýchlosti a dostaneme len podmienku pre frekvencie

$$f_0 = \frac{f_+ + f_-}{2},$$

ktorá hovorí, že v priblížení do prvého rádu musí byť frekvencia f_0 aritmetickým priemerom zvyšných dvoch.

Aby sme sa dopracovali k nejakému výsledku, musíme teda uvažovať Taylorov rozvoj až do druhého rádu:

$$f_+ = f \left(1 - \frac{u+v}{c} + \frac{(u+v)^2}{2c^2} \right),$$

$$f_- = f \left(1 - \frac{u-v}{c} + \frac{(u-v)^2}{2c^2} \right),$$

$$f_0 = f \left(1 - \frac{u}{c} + \frac{u^2}{2c^2} \right).$$

Opäť z rovníc vylúčime frekvenciu f predelením rovníc medzi sebou:

$$\frac{f_+}{f_0} = \frac{2c^2 - 2uc - 2vc + u^2 + v^2 + 2uv}{2c^2 - 2uc + u^2},$$

$$\frac{f_-}{f_0} = \frac{2c^2 - 2uc + 2vc + u^2 + v^2 - 2uv}{2c^2 - 2uc + u^2}.$$

Tentokrát sme dostali o čosi komplikovanejšiu sústavu, keďže obe rovnice sú kvadratické v u i vo v . Nás však nič tak ľahko nezastraší. Pozrieme sa na ne naším odborným okom a hneď vidíme, že keď ich sčítame a odčítame medzi sebou, tak sa o čosi zjednodušia:

$$\frac{f_+ + f_-}{f_0} = \frac{4c^2 - 4uc + 2u^2 + 2v^2}{2c^2 - 2uc + u^2},$$

$$\frac{f_+ - f_-}{f_0} = \frac{-4vc + 4uv}{2c^2 - 2uc + u^2}.$$

Z týchto rovníc už nie je problém vyjadriť obežnú rýchlosť v v relatívne jednoduchom tvare:

$$|v| = \sqrt{\left(\frac{f_+ + f_-}{2f_0} - 1\right)(2c^2 - 2uc + u^2)},$$

$$v = \frac{(f_+ - f_-)(2c^2 - 2uc + u^2)}{4f_0(u - c)}.$$

Aby sme sa zbavili absolútnej hodnoty a odmocniny, dajme do rovnosti kvadráty obežnej rýchlosti. Dopracujeme sa ku rovnici, ktorá je kvadratická v u a neobsahuje rýchlosť v , a teda už nemáme najmenší problém nájsť riešenie:

$$u^2 - 2cu + \frac{8f_0(f_+ + f_- - 2f_0) - 2(f_+ - f_-)^2}{8f_0(f_+ + f_- - 2f_0) - (f_+ - f_-)^2}c^2 = 0,$$

$$u = c \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8f_0(f_+ + f_- - 2f_0) - 2(f_+ - f_-)^2}{8f_0(f_+ + f_- - 2f_0) - (f_+ - f_-)^2}} \right).$$

Fyzikálne riešenie je to so znamienkom mínus, keďže $|u| < c$. Pozorný čitateľ by mohol namietat, že náš výsledok nemôže byť správny, pretože narábame s relativistickým Dopplerovým javom a pritom sme použili klasický vzťah na skladanie rýchlostí. A má v podstate pravdu. V skutočnosti by sme mali uvažovať relativisticky získané rýchlosti vzdalovania jednotlivých hviezd

$$w_{\pm} = \frac{u \pm v}{1 \pm \frac{uv}{c^2}}.$$

Avšak vzhľadom na to, že rýchlosti u i v sú malé v porovnaní s rýchlosťou svetla, hohlo by sa zdať, že si môžeme dovoliť použiť aj klasický zložené rýchlosti. Pozrime sa však na to, k akému výsledku by sme sa dopracovali, keby sme predsa len použili relativistický vzťah na skladanie rýchlostí, pretože je to vskutku zaujímavé. Budeme nasledovať úplne rovnaký postup ako v prvom prípade. Vychádzame zo sústavy rovníc

$$f_+^2 = f^2 \frac{c - \frac{u+v}{1 + \frac{uv}{c^2}}}{c + \frac{u+v}{1 + \frac{uv}{c^2}}},$$

$$f_-^2 = f^2 \frac{c - \frac{u-v}{1 - \frac{uv}{c^2}}}{c + \frac{u-v}{1 - \frac{uv}{c^2}}},$$

$$f_0^2 = f^2 \frac{c - u}{c + u}.$$

Vylúčením frekvencie f dostaneme

$$f_+^2 \left(u^2 + \frac{u^2 v}{c} - cv - c^2 \right) = f_0^2 \left(u^2 - \frac{u^2 v}{c} + cv - c^2 \right),$$

$$f_-^2 \left(u^2 - \frac{u^2 v}{c} + cv - c^2 \right) = f_0^2 \left(u^2 + \frac{u^2 v}{c} - cv - c^2 \right).$$

Z rovníc vieme vyjadriť obežnú rýchlosť

$$v = \frac{(f_0^2 - f_+^2)(c^2 - u^2)}{(f_+^2 + f_0^2)(c - \frac{u^2}{c})},$$

$$v = \frac{(f_0^2 - f_-^2)(c^2 - u^2)}{(f_-^2 + f_0^2)(\frac{u^2}{c} - c)}.$$

Keď dáme tieto výrazy do rovnosti, dospejeme k rovnici, ktorá neobsahuje žiadne rýchlosti

$$\frac{f_0^2 - f_+^2}{f_0^2 + f_+^2} + \frac{f_0^2 - f_-^2}{f_0^2 + f_-^2} = 0,$$

čo sa dá ešte zjednodušiť na

$$f_0 = \sqrt{f_+ f_-},$$

takže frekvencia f_0 by mala byť geometrickým priemerom zvyšných dvoch. Čo to znamená? Ak neurobíme žiadne zanedbania, tak principiálne nie je možné určiť rýchlosť vzdalovania dvojhviezdy. Po hlbšom zamyslení nás to však veľmi neprekvapuje. Máme totiž vlnenie nejakej frekvencie a zaujíma nás, ako sa táto frekvencia zmení vplyvom Dopplerovho javu. Zmena frekvencie je jednoznačne daná rýchlosťami u a v . Ak teda poznáme zdanlivé frekvencie v dvoch prípadoch, frekvenciu v treťom prípade vieme dopočítať použitím posledne odvodeného vzťahu. To znamená, že naša trojica rovníc, z ktorej sme vychádzali, nebola nezávislá, a teda z nej nie je možné dopočítať tri neznáme, keďže efektívne máme len dve rovnice. Znamená to, že Doppler nám nevie nič povedať o rýchlosti vzdalovania dvojhviezdy? Nie, ak nevieme, aká je skutočná frekvencia pozorovanej spektrálnej čiary. Ale vzhľadom na to, že frekvencie spektrálnych čiar sú známe, tak v praxi nám stačí identifikovať danú spektrálnu čiaru a použitím dvoch zdanlivých frekvencií dopočítať rýchlosť vzdalovania dvojhviezdy.

Poznámka od riešiteľa

Česť a sláva patrí Jonášovi, ktorý ako jediný poctivým relativistickým výpočtom ukázal, že z pozorovaných frekvencií nie je možné určiť rýchlosť vzdalovania dvojhviezdy. Použil šikovný trik, keď uvažoval pomocný objekt pohybujúci sa spolu s ťažiskom dvojhviezdy, no a potom zrátal dvojnásobný dopplerovský posun. Prvý posun zohľadnil obežnú rýchlosť hviezd a druhý rýchlosť pohybu ťažiska dvojhviezdy od Zeme. Tento výpočet viedol na vzťah medzi pozorovanými frekvenciami

$$f_0 = \frac{2f_+ f_-}{f_+ + f_-},$$

ktorý sa líši od toho, ktorý sme dostali my. Problém je v tom, že my sme v prípade pozorovanej frekvencie f_0 uvažovali, že rýchlosť vzdalovania hviezd je u , čo však nie je pravda. V skutočnosti musíme relativisticky zložiť kolmé rýchlosti u a v a takto získanú rýchlosť použiť vo vzťahu pre relativistického Dopplera.