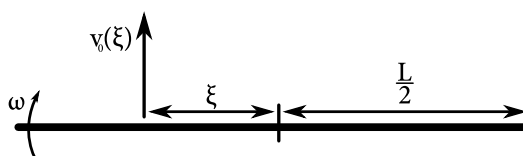


Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Zanedbaná výchova

vzorák Adam, opravoval Adam

Ak označíme ξ polohu práve skúmaného kúsku vzhľadom na stred, jeho rýchlosť v laboratórnej sústave má veľkosť $v_0(\xi) = \frac{\omega L}{2} + \omega \xi$ a smer kolmý na palicu.



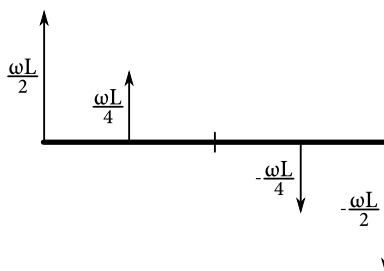
Obrázok 1: Rotujúca palica

Keď palicu pustíme, prestanú na ňu pôsobiť hocaké vonkajšie sily. V prípade, že by na každú časť tyče bola výsledná sila nulová, podľa prvého Newtonovho zákona by pokračovali priamočiarym pohybom rýchlosťou $v_0(\xi)$. To by však vo všeobecnosti znamenalo, že kúsky tyče sa od seba začnú vzdalovať, teda tyč by sa v takom prípade musela rozpadnúť na márne kúsky. Naša palica však ostáva aj po opustení našich rúk celá. To znamená, že i keď na tyč ako celok už žiadne sily nepôsobia, pre kúsky tyče to už neplatí.

I keď sa všetky body tyče rovnomerne priamočiarno hýbať nemôžu, jeden z nich sa priam musí. Takýmto bodom je ťažisko tyče (t. j. jej stred). Keďže na tyč nepôsobia vonkajšie sily, pohyb ťažiska bude rovnomerný a priamočiary, s rýchlosťou rovnou rýchlosti v čase vypustenia. Teda

$$v(0, t) = v_0(0) = \frac{\omega L}{2}.$$

Pretože tyč je tuhá, jej ostatné body sa od ťažiska nemôžu vzdialiť, a teda najväčšia vôľa, ktorú majú, je pohyb po kružnici okolo stredu palice. Zároveň sa však nesmú meniť ani vzdialenosti medzi ostatnými bodmi, čím získavame podmienku, že všetky body tyče krúžia okolo ťažiska rovnakou uhlovou rýchlosťou. Pozrime sa, aké majú v čase vypustenia rôzne časti palice rýchlosti. To spravíme tak, že sa na situáciu budeme pozeráť z pohľadu pozorovateľa, pohybujúceho sa v momente pustenja palice rovnobežne so stredom palice a rovnakou rýchlosťou. Ten vidí, že časti palice majú takéto rýchlosti:



Obrázok 2: Uhlové rýchlosti bodov na palici

Ak vypočítame pre každý z bodov jeho okamžitú uhlovú rýchlosť $\Omega(\xi) = \frac{v_0(\xi) - v_0(0)}{\xi}$, zistíme, že táto hodnota je pre všetky body rovnaká a rovná ω . Podarilo sa nám teda zistiť celý ďalší pohyb palice. Jej stred sa bude hýbať priamočiarno konštantnou rýchlosťou $\frac{\omega L}{2}$ a palica sa bude otáčať uhlovou rýchlosťou ω okolo stredu.

1.2 Spojka, brzda, plyš

vzorák **Matúš** a **Kvík**, opravoval **Matúš**

Keby sme mali auto bez prevodovky, veľa toho nevymyslíme. Otáčky totiž súvisia s rýchlosťou cez $v = \omega r$ a točivý moment (teda moment sily) je už priamo úmerný zrýchleniu: $a = M/r$. Teda pre konštantnú rýchlosť plyšmobilu je už maximálne zrýchlenie jednoznačne určené.¹ Lenže jej auto prevodovku má, a teda to nebude také jednoduché.

Prevodovka je zariadenie medzi hnacím hriadeľom motora a hnaným hriadeľom, ktoré dokáže meniť pomer ich otáčok. Otázka stojí nasledovne: ako sa zmení moment sily, ak zmeníme pomer otáčok? Prevodovku si môžeme predstaviť ako dve kolieska, podobne, ako prehadzovačku na bicykli. Nech predné ozubené koliesko má polomer r_1 , točí sa s frekvenciou f_1 a moment sily naň pôsobiaci je M_1 . Polomer zadného kolieska nech je r_2 , jeho frekvencia f_2 a naň pôsobiaci moment sily M_2 . Na zadné ozubené koliesko sa pomocou reťaze prenesie rovnaká sila, ako pôsobí na obvode prvého kolieska, teda $F = \frac{M_1}{r_1}$. Moment sily druhého kolieska potom je $M_2 = Fr_2 = \frac{M_1 r_2}{r_1}$.

Reťaz sa pohybuje všade rovnakou rýchlosťou, takže platí $f_1 = \frac{v}{2\pi r_1}$, respektíve $f_2 = \frac{v}{2\pi r_2}$. Kombináciu predchádzajúcich výsledkov dostaneme

$$M_1 f_1 = M_2 f_2.$$

Toto je vcelku intuitívny výsledok. Keď máme vpredu malé koliesko a vzadu veľké, narobíme sa menej, ale ideme pomalšie. Zrýchlenie auta teraz bude

$$a = \frac{M_2}{mR},$$

kde R je polomer kolies auta a m jeho hmotnosť. Využitím vzťahu medzi momentami sily a frekvenciami dostaneme

$$a = \frac{M_1 f_1}{m R f_2}.$$

Rýchlosť auta s frekvenciu otáčok a polomerom kolies súvisí ako $v = 2\pi f_2 R$, teda

$$a = M_1 f_1 \frac{2\pi}{mv}.$$

Vidíme, že na to, aby sme maximalizovali zrýchlenie, potrebujeme maximalizovať súčin frekvencie a momentu sily $2\pi M_1 f_1$. No a táto veličina nie je nič iné, ako výkon rotačného pohybu – známejšiu formu dostaneme, ak si frekvenciu premeníme na uhlovú rýchlosť pomocou vzorca $\omega = 2\pi f$. Potom platí

$$P = M\omega.$$

Pozrime sa teda na graf zo zadania, ktorý udáva funkciu momentu v závislosti od otáčok $M(f)$. Po prenásovení funkcie momentu $2\pi f$ dostaneme funkciu výkonu $P(f) = 2\pi M_1 f_1$. Na ňom hľadáme bod $f_{\max}$, v ktorom dosahuje naša funkcia maximum.

Tu máme dve možnosti. Prvou je, že si graf prekreslíme nanovo tak, že každú hodnotu $M(f)$ vynásobíme $2\pi f_1$ a dostaneme nový graf $P(f)$. Ak to spravíme poctivo, z priamok sa stanú paraboly a z tých maximum jednoducho

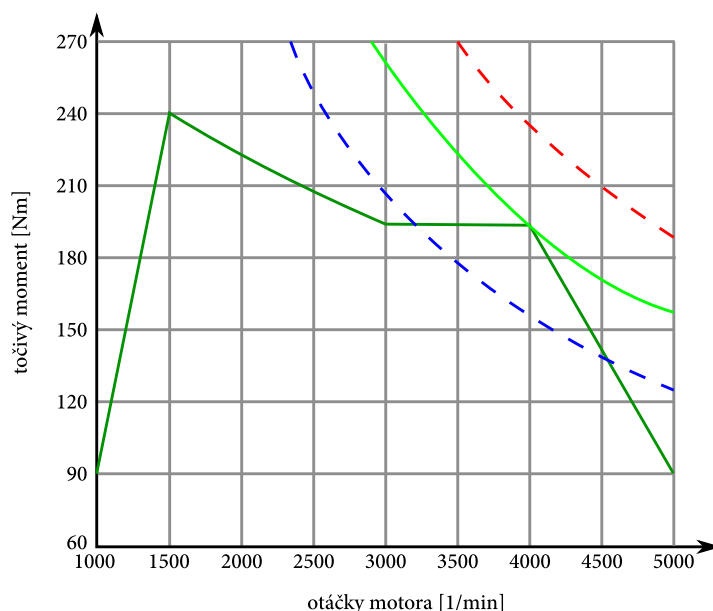
¹Skutočné zrýchlenie ešte samozrejme závisí od toho, ako silno Plyš stlačí plynový pedál.

odčítame. Alebo sa trochu zamyslíme a zistíme, že najvyššiu hodnotu môže nadobúdať iba v jednom z dvoch bodov:

- maximum točivého momentu (1500 otáčok za minútu),
- alebo pravý koniec plochej časti krivky (4000 otáčok za minútu).

To odôvodníme tak, že hodnoty f menšie, ako 1500 otáčok za minútu, majú menší aj moment, aj otáčky, takže majú určite menšiu aj hodnotu výkonu. Rovnako neprichádzajú do úvahy ani hodnoty medzi 1500 a 4000 otáčkami – nech vyberieme hociktorý bod, hodnota výkonu je určite menšia, ako $195 \cdot 4000 \text{ Nm/min}$, ktorú vieme dosiahnuť na 4000 otáčkach. Nad 4000 otáčkami zase točivý moment klesá príliš rýchlo na to, aby ho rastúce otáčky stíhali kompenzovať. Priamym porovnaním hodnôt v týchto dvoch bodoch zistíme, že vyššiemu výkonu zodpovedá ten druhý.

Alebo na to pôjdeme inak: zamyslíme sa, ako na tomto grafe vyzerajú krivky rovnakého výkonu. Takýmto „vrstevnicami“ výkonu sú hyperboly – funkcie v tvare $M = \frac{k}{f}$, kde k je ľubovoľná konštanta (a každá jej hodnota odpovedá nejakému konkrétnemu výkonu P). Ak si začneme tieto hyperboly kresliť, hneď uvidíme, že do tej s najvyšším možným k vieme začať práve pri 4000 otáčkach.



Obrázok 3: Krivky rovnakého výkonu. Zelená zodpovedá maximálnemu výkonu plyšmobilu, 82 kW.

Maximálny výkon plyšmobilu teda po premene jednotiek na obvyklé vychádza

$$2\pi \cdot 780\,000 \text{ Nm/min} = 2\pi \cdot 780\,000 \frac{\text{kgms}^{-2}\text{m}}{60 \text{ s}} \doteq 81\,681 \text{ kgm}^2\text{s}^{-3} \doteq 82 \text{ kW}.$$

Všimnime si, že celá naša úvaha nezávisela od rýchlosti. Teda nech je rýchlosť akákoľvek, pre maximálne zrýchlenie **vždy** chceme udržiavať motor na týchto otáčkach. Ak zrýchľovať nechceme, väčšinou sa nám motor oplatí udržiavať na otáčkach nízkych, pretože má vtedy nízku spotrebu. Výkon nám stačí taký, aby sme prekonal odpor vzduchu a kolies. Preto by sme mali na prevodovke mať pri pokojnej jazde zaradený čo najvyšší stupeň (s najslabším prevodom).

Takže celá situácia by mala vyzeráť nasledovne: Plyš drží otáčky nízko, až kým pomalé auto nedobehne. Následne preradí na taký prevod, ktorý zodpovedá jej momentálnej rýchlosti 110 kmh^{-1} a zároveň 4000 otáčkam

motora za minútu a šliapne na plynový pedál. Auto začne zrýchľovať, čiže rýchlosť v začne rásť. Aby sa motor stále držal v otáčkach najvyššieho výkonu, prevodový pomer λ zákonite musí pomaly klesať, čiže musí stupeň pomaly zvyšovať.

Toto celé dokonca platí aj vtedy, ak nemáme bezstupňovú prevodovku, ale iba obyčajnú päťstupňovú. Mimo obce jazdíme väčšinou na najvyššom stupni, ale pri predbiehaní sa oplatí podradiť, aby sme sa dostali do blízkosti otáčok, kde je výkon motora najväčší.

1.3 Neprofesionálna deformácia

vzorák **Simon** a **Jaro**, opravoval **Simon**

Budeme sa zaujímať o spomalenie, ktoré Kvík zažije vo všetkých troch prípadoch. Na to musíme vedieť, aká bude príslušná celková zmena rýchlosti Kvíkovho auta a na akej dráhe sa táto zmena udeje. Je zrejmé, že čím menšia zmena a na čím väčšej dráhe, tým lepšie pre Kvíka. Ako by sme mohli určiť zmenu rýchlosti? Zo zákona zachovania hybnosti, samozrejme. A prečo nie zo zákona zachovania energie? Lebo energia sa pri zrážke bude meniť na iné formy, t. j. nebude platiť nič také že $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \text{const}$.

Museli by ste tam zahrnúť aj energiu potrebnú na pokrútenie plechov, energiu, ktorá sa premení na teplo, atď. Ale zákon zachovania hybnosti platí v izolovanej sústave vždy, nezávisle na tom, koľko pohybovej energie sa premení na iné formy. To je na ňom to najkrajšie. Je jedno, ako sa veci zohrejú, ako budú vibrovať, koľko hluku vznikne a podobne, vždy bude platiť že $m_1v_1 + m_2v_2$ sa zachováva. Odporúčam vám dobre nad tým porozmýšľať, lebo toto je veľmi hlboká myšlienka a asi jedna z najdôležitejších vo fyzike.

Tak sa teda do toho pustíme. Predpokladajme dokonale nepružnú zrážku, čo v praxi znamená, že zrazivšie sa objekty sa už po zrážke od seba neoddelia, čím efektívne vytvoria teleso s hmotnosťou $m_1 + m_2$. Nech je rýchlosť tohto objektu po zrážke v . Potom podľa zákona zachovania hybnosti platí $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$, odkiaľ

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Už sme povedali, že bude záležať na tom, na akej vzdialenosti sa zrážka udeje. Poďme o tom pouvažovať detailnejšie. Pri náraze do nehybného múru je to zjavné. Asi nikto nepochybuje, že spomalenie sa udeje na dráhe 1 m. Ale čo v ďalších prípadoch, keď autá idú rôznymi rýchlosťami alebo majú dokonca rôzne hmotnosti? Ako sa medzi ne celková deformačná dĺžka rozdelí?² Ak by obe autá išli rovnakou rýchlosťou a boli by rovnako ťažké, situácia by bola symetrická a opäť by bolo zjavné, že každé z áut zastaví v priebehu polovice z celkovej deformačnej dĺžky. Ale čo keď pri rôznych rýchlostiach napríklad rýchlejšie z áut prejde nejakú časť dĺžky skôr a pritlačí sa na druhé auto, a tomu potom zostane menej dráhy alebo ťažšie auto nebude spomaľovať tak veľmi ako ľahké, a preto využije menej z celkovej dĺžky alebo čosi podobné? Vidíme, že riešenie tejto otázky nie je až také priamočiare.

Aby sme vedeli vyriešiť tento problém, musíme sa na celú situáciu pozrieť v správnej vzťažnej sústave. V prvom rade si uvedomme, že prejdená dráha jednotlivých objektov závisí na voľbe vzťažnej sústavy. Tak napríklad nehybný múr vo vzťažnej sústave spojennej s cestou počas zrážky neprejde žiadnu dráhu, no vo vzťažnej sústave pohybujúcej sa vzhľadom na cestu nenulovou rýchlosťou prejde počas zrážky nenulovú dráhu. Ak by sme uvažovali nejakú vzhľadom na cestu rýchlo sa pohybujúcu vzťažnú sústavu, oba objekty v nej prejdú počas zrážky obrovské dráhy, ktorých súčet zjavne nie je rovný deformačnej dĺžke.³ Nie je až tak zložitý nahliadnuť, že ich súčet je rovný deformačnej dĺžke len vo vzťažnej sústave, v ktorej sú oba objekty po zrážke v pokoji.

²Zrejme počas zrážky nezáleží na tom, z ktorého auta pochádza ktorá časť deformačnej zóny, tak budeme hovoriť len o celkovej deformačnej dĺžke.

³Platilo by to pre posunutia, ktoré by mohli byť aj záporné.

Presuňme sa teda do tejto sústavy. Už vieme, že vzhľadom na cestu sa táto vzťažná sústava pohybuje rýchlosťou v určenou vzťahom 1. Rýchlosti objektov v tejto vzťažnej sústave sú potom

$$\tilde{v}_{1,2} = v_{1,2} - v = \frac{m_{2,1}}{m_1 + m_2} (v_{1,2} - v_{2,1}). \quad (2)$$

Túto vzťažnú sústavu budeme nazývať ťažiskovou, pretože v nej má spoločný hmotný stred zrážajúcich sa objektov nulovú rýchlosť.

Zaujímať sa o zrýchlenia objektov počas zrážky. Ťažisková sústava má tú výhodu, že zrazivšie sa objekty sú v nej po zrážke v pokoji.⁴ To znamená, že dráhu prejdenú počas zrážky vypočítame jednoducho podľa vzťahu $s_{1,2} = \frac{1}{2} a_{1,2} t^2$. Vzhľadom na to, že za čas t musí klesnúť rýchlosť objektov z ich počiatočných rýchlostí v ťažiskovej sústave až na nulu, tak $t = \frac{\tilde{v}_{1,2}}{a_{1,2}}$ a po dosadení do vzťahu pre dráhu dostávame vyjadrenie pre zrýchlenie

$$a_{1,2} = \frac{\tilde{v}_{1,2}^2}{2s_{1,2}}. \quad (3)$$

A teraz späť k tým dráham. Vieme, že autá musia spomaliť na dráhach, ktoré dokopy dajú celkovú deformačnú dĺžku

$$L = s_1 + s_2. \quad (4)$$

Ale ako si ju rozdelia? Na to sa musíme trochu zamyslieť. Vieme, že autá počas zrážky pôsobia na seba vzájomne silou. Podľa tretieho Newtonovho zákona platí $m_1 a_1 = m_2 a_2$. Ale my predsa poznáme aj vzťah medzi zrýchlením, dráhou a časom, ktorý sme spomínali pred chvíľou, podľa ktorého $a_{1,2} = \frac{2s_{1,2}}{t^2}$. Skombinujúc tieto tri rovnice dostávame

$$m_1 s_1 = m_2 s_2. \quad (5)$$

A máme čo sme chceli! Vozidlá si deformačnú dĺžku rozdelia v opačnom pomere svojich hmotností. Takže čím ťažšie auto, tým menej si zoberie. Odporúčam vám dobre si to premyslieť, lebo toto je celkom neočividný výsledok.⁵

Teraz už máme všetko, čo potrebujeme, aby sme mohli nájsť spomalenie Kvíkovho auta. Rovnice 4 a 5 prezrádzajú, koľko si z deformačnej dĺžky jednotlivé objekty odnesú

$$s_{1,2} = \frac{m_{2,1} L}{m_1 + m_2}. \quad (6)$$

Po dosadení 2 a 6 do 3 konečne dostávame hľadané zrýchlenia

$$a_{1,2} = \frac{m_{2,1}}{m_1 + m_2} \frac{(v_1 \mp v_2)^2}{2L}. \quad (7)$$

Teraz sa môžeme pozrieť na jednotlivé situácie:

Zrážka s múrom

Zadanie nám hovorí, že múr môžeme považovať za dokonale tuhý, čo znamená, že do celkovej deformačnej dĺžky nijako neprispieva, teda $L = 1$ m, a nekonečne ťažký, čiže $m_2 \rightarrow \infty$. V takom prípade výraz sa $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ s

⁴Ved' práve preto sme si ju vybrali.

⁵Ak niekto radšej uvažuje v medziach rýchlostí, tak nie je problém pretransformovať tento vzťah do jemu sympatickej podoby. Stačí si uvedomiť, že zákon zachovania hybnosti v ťažiskovej sústave vedie na rovnosť $m_1 \tilde{v}_1 = -m_2 \tilde{v}_2$, čo využijúc vo vzťahu {5} vedie na podmienku $\frac{s_1}{\tilde{v}_1} = -\frac{s_2}{\tilde{v}_2}$.

narastajúcim m_2 blíži k 1. Navyše múr je nehybný, preto $v_2 = 0 \text{ kmh}^{-1}$. Potom rovnica { 7 } vedie na $a_1 = \frac{v_1^2}{2L} \doteq 272 \text{ ms}^{-2}$.

Zrážka s autom

Protiidúce auto má rovnakú hmotnosť $m_2 = m_1$ a keďže ide opačným smerom, má zápornú rýchlosť $v_2 = -72 \text{ kmh}^{-1}$. Obe autá majú rovnako veľkú deformačnú zónu, preto celková deformačná dĺžka je $L = 2 \text{ m}$. V takom prípade $a_1 = \frac{(v_1 - v_2)^2}{4L} \doteq 235 \text{ ms}^{-2}$.

Zrážka s kamiónom

Kamión má deformačnú zónu dlhú 20 cm , teda celková deformačná dĺžka je $L = 1,2 \text{ m}$ a jeho rýchlosť je $v_2 = -24 \text{ kmh}^{-1}$. V tomto prípade $a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2L} = 312,5 \text{ ms}^{-2}$.

Najlepší scenár je B!

Teraz môžeme porozmýšľať o hodnotách zrýchlení, ktoré nám vyšli. Sú vysoké alebo nízke? Aká by asi bola šanca na prežitie? Samozrejme, že zrýchlenia sú vysoké. Ale určite prežiteľné. Treba si uvedomiť, že účinky prudkej zmeny rýchlosti (napríklad nárazu) na človeka nemusia závisieť iba od zrýchlenia. Tak ako samotný pojem „rýchlosť“ vyjadruje mieru menenia polohy a zrýchlenie vyjadruje mieru menenia rýchlosti, tak aj zrýchlenie sa v čase nejako vyvíja, mení sa. To znamená, že musí existovať veličina, ktorá popisuje rýchlosť menenia zrýchlenia. Keď idete v autobuse a ten náhodou prudko zabrzdí, trhne to s vami. Zrýchlenie autobusu ani nemuselo byť až také prudké, avšak rýchlosť, akou sa to zrýchlenie objavilo, mohla byť veľmi vysoká. To pociťujete ako trhnutie, alebo myknutie. Táto veličina sa nazýva *ryv*. Anglický termín je **“jerk”**, čo by sa naozaj dalo preložiť ako trhnutie.

A čo sa týka zrýchlení, tiež pre zdravotné následky záleží na tom, ako dlho je mu človek vystavený. V našich príkladoch vychádza čas pod jednu desatinu sekundy. Dlhodobé je tolerovateľné zrýchlenie asi 3-násobok gravitácie, toľko zažívajú napríklad astronauti počas štartu na obežnú dráhu po dobu niekoľkých minút. Pilot stíhačky môže pri prudkej zmene smeru pociťovať až 9 g. A aké je maximálne (dlhodobejšie, t.j. nie len počas desiatín alebo stotín sekundy) zmerané zrýchlenie, aké človek prežil? Po druhej svetovej vojne sa istý lekár menom John Stapp⁶ podrobil experimentom, keď ho posadili na sedadlo na koľajniciach a urýchlili raketovým motorom. Počas jednej z jazd to bolo 46,2 g počas 1,4 sekundy. Teda ešte o 150 ms^{-2} viac ako pri zrážke s nákladňakom. A prežil bez akýchkoľvek následkov!

1.4 Ťažká chobotina

vzorák Maťo, opravovali Mary a Maťo

Zmyslom tejto úlohy bolo v prvom rade precvičiť Váš cit pre odhad. Nebudeme preto zbytočne plytvať miestom a pustíme sa rovno do riešenia. Čo to od nás úloha vlastne chce? Odhadnúť mechanický výkon slonieho chobota, keď strieka vodu. Len dodáme, že v skutočnosti sa zaujímame o výkon jeho pľúcnych svalov pri tom, ako vytláča vodu zo svojho chobota. Samozrejme, spôsobov ako odhadnúť mechanický výkon, je mnoho.

Môžeme si napríklad nájsť údaj o tom, že slony dokážu vo svojom chobote udržať približne 8 litrov vody a potom z nejakého videa odhadnúť, ako dlho takému slonovi trvá, kým vodu zo seba dostane. Môžeme si takisto odhadnúť množstvo vody v chobote slona čisto z jeho rozmerov a z vhodnej fotky pomocou šikmého vrhu odhadnúť rýchlosť prúdajúcej vody pri konci chobota. Tak či onak, každé fyzikálne aspoň trochu rozumné riešenie získalo 9 bodov, ak Vaše odhady boli niečím podložené a nevycucali ste si ich z prsta :-)

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/John_Stapp

Vo vzoráku si ukážeme druhý zo spomínaných spôsobov. Predpokladajme, že sloní chobot má dĺžku L a šírku d . Potom v sebe nesie vodu s hmotnosťou $m = \rho V = \pi \frac{d^2}{4} L \rho$. Výkon má rozmer energie za čas: $P \sim \frac{1}{2} \frac{mv^2}{t}$, čiže využijúc povedzme prietok,

$$P = \frac{1}{2} \frac{\rho V}{t} v^2 = \frac{1}{2} Q \rho v^2.$$

Prietok sa nám asi bude merať ťažko, no môžeme si znovu rozmyslieť, že rozmerovo je to plocha krát rýchlosť. Pre jednoduchosť si povedzme, že voda je uložená v celom priereze slonieho chobotu. Potom je prietok $Q = \pi \frac{d^2}{4} v$, čiže

$$P = \frac{1}{2} \pi \frac{d^2}{4} \rho v^3.$$

Ostáva nám len určiť rýchlosť vody pri výstreku. Povedzme, že sa nám pod ruku dostane nejaká zaujímavá fotka slona, na ktorej vidno, ako strieka vodu. Potom môžeme rýchlosť vody pri výstreku odhadnúť z dostrely a výšky výstreku. Samozrejme, efektami ako odpor vzduchu a podobne sa drzo nenecháme vyrušovať. Predpokladajme, že slon dostrelí do vzdialenosti D a pritom dosiahne voda maximálnu výšku H . Spomenúc si na vzťahy pre šikmý vrh

$$D = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha),$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g}.$$

Vyjadrením $\sin^2(\alpha)$ z druhej rovnice a dosadením do prvej rovnice využijúc $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ dostaneme

$$D = 2 \frac{v_0^2}{g} \sqrt{\frac{2Hg}{v_0^2}} \sqrt{\frac{v_0^2 - 2Hg}{v_0^2}},$$

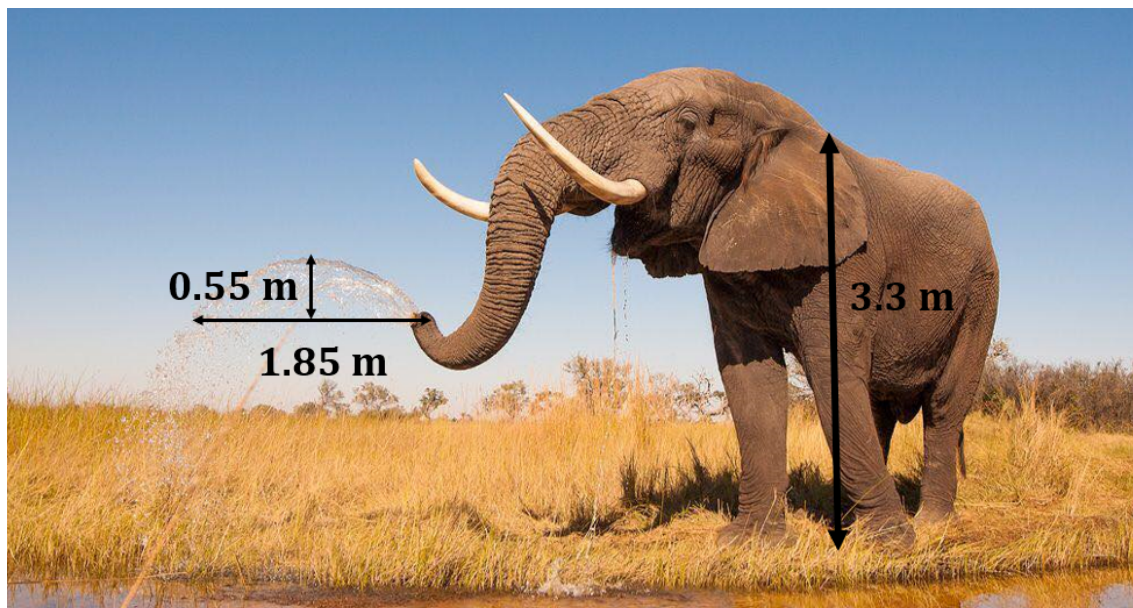
odtiaľ

$$v_0 = \sqrt{2g \left(H + \frac{D^2}{16H} \right)},$$

a preto výkon možno napísať ako

$$P = \frac{1}{2} \rho \frac{\pi d^2}{4} \left(2g \left(H + \frac{D^2}{16H} \right) \right)^{3/2}.$$

Prierez slonieho chobota môžeme rádovo odhadnúť na nejakých približne 15 – 20 cm. Typická výška afrického slona je asi 3,3 m. Zanedbaním perspektívy a odmeraním si vzdialeností na základe výšky slona napríklad z tejto fotky určíme $H = 0,55$ m a $D = 1,85$ m. Naše údaje sú najviac zaťažené chybou pri určení výšky slona, preto sa pokojne uspokojíme s konzervatívnou chybou 20 %. Dosadením hodnôt získame rádový odhad výkonu slonieho chobotu približne $800,0 \pm 4,0$ W.



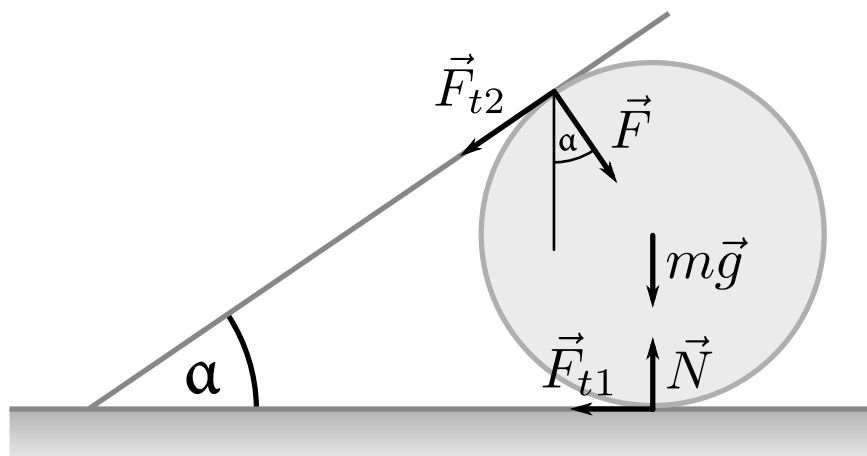
Obrázok 4: Fotografia slona s pokusom odčítať relevantné vzdialenosti.

1.5 Pôjde Ti karta

vzorák **Vladko**, opravoval **Vladko**

Úlohy na statiku sú veľmi často iba technickým výpočtom. Keď raz pochopíme, ako sa také veci počítajú, už nás nezvyknú prekvapiť. Otázky zvyknú byť vždy formulované tak, že hľadáme „najmenší koeficient trenia“, „najväčšiu hmotnosť“, „najmenší uhol“ a podobne. V praxi to znamená: uvedomme si, že veľkosť trecej sily je $F_t \leq Nf$, kde N je veľkosť normálovej sily, ktorou podložka podopiera objekt. Napríklad keď položíme mobil na knižku a postupne knižku nakláňame, trecia sila sa zväčšuje až po hranicu $F_t = Nf$, kedy dosiahne maximum a pri zväčšení uhla náklonu sa začne mobil zošúchávať. Pri statických úlohách zvykneme študovať práve takúto hranicu medzi stavom, kedy sú objekty stabilné, a stavom, kedy sa začnú pohybovať.

Na hranici uvažujeme ešte stabilný stav – všetky sily v smere x a smere y sú v rovnováhe a objekty sa neotáčajú (t.j. celkový moment sily je nulový). Skúmame pohyb valčeka, teda si nakreslíme všetky sily, ktoré naň pôsobia: tiažová veľkosť mg zvislo nadol, normálová od podložky veľkosť N zvislo nahor, trecia sila od podložky v smere proti šmyku veľkosť F_{t1} , sila od karty veľkosť F pôsobiaca kolmo na valček a trecia sila smere proti šmyku karty z valčeka veľkosť F_{t2} .



Obrázok 5: Rozklad síl

Ak je celkový moment sily nulový, je jedno, vzhľadom na ktorý bod ho počítame. My budeme počítat' na stred valčeka s polomerom r , keďže vtedy silový moment od síl $\vec{F}$, $\vec{N}$ a $\vec{F}_g$ je nulový (rozmyslite si, že prečo!), čo zjednoduší podmienku iba na

$$rF_{t2} = rF_{t1}.$$

Vidíme, že veľkosti trecích síl v rovnováhe sú rovnaké, označme si ich T . Teraz si rozložíme sily do smerov x a y a napíšeme podmienky stability. Pre y -smer platí

$$N - mg - \underbrace{F \cos \alpha}_{F_y} - \underbrace{T \sin \alpha}_{T_{2y}} = 0$$

a pre x -smer platí

$$-T + \underbrace{F \sin \alpha}_{F_x} - \underbrace{T \cos \alpha}_{T_{2x}} = 0.$$

Stále nevieme veľkosť trecej sily. Z ostatných dvoch rovníc ju vylúčime a s pomocou $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ dostávame hodnotu normálovej sily N

$$N = mg + F.$$

Dostali sme, že veľkosť sily N je väčšia ako veľkosť sily F . Pri myslenom zmenšovaní koeficientu f sa valec začne šúchať o kartu, a nie o podložku. Je to zrejmé z toho, že hranica šmyku, kedy trecia sila má rovnakú veľkosť ako súčin koeficientu trenia a normálovej sily, nastane skôr pri menšej normálovej sile F . Pre hraničný prípad smelo dosadzujeme $T = fF$ a z rovnice pre x -smer dostávame výsledok

$$f = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2}.$$

Ten platí bez ohľadu na hmotnosť valčeka a karty. Predpokladáme, že karta je dostatočne dlhá na to, aby bola dotýčnicou ku valčeku, ale dostatočne krátka, aby ju ťažisko nepreklopilo. Rovnako ako je na obrázku v zadaní. V riešeníach sme hodnotili aj argument, prečo sa valček začne šmýkať pri karte, ale nie pri podložke.

1.6 Aj majster Dick sa utne!

vzorák Fero, opravoval Maťo

Ampérov zákon

Najprv si poriadne premyslíme, prečo vôbec vznikne vo vodiči magnetické pole. Vyjdeme z Ampérovho zákona. Ak ste o ňom nepočuli, nebojte sa čítať ďalej, v krátkosti vysvetlíme, o čo ide.⁷

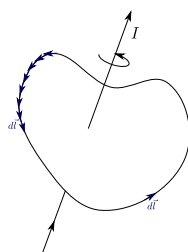
Samotný Ampérov zákon v statickom prípade má najjednoduchší tvar, pokiaľ ho zapíšeme

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{uz}.$$

⁷Celá elektromagnetodynamika, teda takmer úplne všetko, s čím ste sa stretli v súvislosti s elektrinou a magnetizmom, sa dá odvodiť z piatich takýchto postulátov. Je to Lorentzov zákon sily, a štyri Maxwellove rovnice – Gaussov zákon, Ampérov zákon, Faradayov zákon a zákon neexistencie magnetických monopólov. V podstate hovoria, že zdrojom elektrických polí sú elektrické náboje, a zdrojom magnetických polí sú tečúce prúdy. Okrem toho hovoria aj to, že zmena magnetických polí vedie k vzniku elektrických polí a naopak. Avšak v statickom prípade, kedy je všetko ustálené a polia, prúdy ani rozloženia hustoty sa nemenia, platí iba predpredchádzajúca veta a Maxwellove rovnice sa podstatne zjednodušia. Na Ampérov zákon je dobré pozeráť ako na postulát.

Vysvetlíme si, čo nám táto rovnica hovorí. $\vec{B}$ je magnetické pole, μ_0 je konštanta. $\oint$ je integrál, ale nie klasický, ako poznáte, ale takzvaný krivkový.⁸ To je také oné, že majme nejakú slučku v priestore. Túto slučku si rozdelíme na malé dieliky. Keďže ide o slučku, tieto dieliky budú vektory $d\vec{l}$.

Nie som si istý, či je to dobrý príklad, lebo možno ste sa s tým nestretli, ale keď bol autor vzoráku mladý, na informatike v škole sme pracovali v programe IMAGINE⁹, kde sme mali navigovať korytnačku tak, aby vykreslila nejaké útvary. Predstavte si, že chcete navigovať korytnačku, aby vykreslila danú slučku. Urobíte to tak, že rozdelíte túto slučku na malé časti, a za každú časť korytnačke povieť, o koľko sa má posunúť hore a koľko horizontálne. V podstate korytnačke vždy zadáte malý vektor $d\vec{l}$, o ktorý sa má posunúť. No a pravá strana Ampérovho zákona je skoro to isté, akurát ešte korytnačke povieť, aby vždy zmerala aj vektor magnetického magnetického poľa v danom bode a spočítala skalárny súčin nameraného magnetického poľa a vektora, o ktorý sa má posunúť: $\vec{B} \cdot d\vec{l}$. Tento medzivýsledkok si zapamätá, a na konci, keď sa vráti tam, odkiaľ vyštartovala, vám povie súčet všetkých medzivýsledkov, teda $\sum \vec{B} \cdot d\vec{l}$.



Obrázok 6: Integračná slučka.

Na pravej strane je už spomínaná konštanta μ_0 a I_{uz} , čo je prúd uzavretý slučkou, teda celkový prúd pretekajúci plochou, ktorú uzatvára slučka.¹⁰

Je to veľmi obdobné Gaussovmu zákonu, ktorý už poznáte. Tam počítate podobný integrál $\oint \vec{E} d\vec{S}$. Aby sme to zhrnuli, Ampérov zákon nám hovorí o tom, aké magnetické pole „preteká“ po krivke a že je úmerné prúdu uzavretému v slučke. Predstavte si, že máme iba tenký nekonečný vodič. V prípade cylindrickej symetrie, bude pole v rovnakej vzdialenosti konštantné. Preto ak si zvolíme kružnicu s polomerom r okolo vodiča, Ampérov zákon prejde na

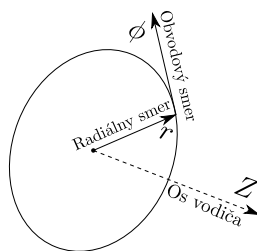
$$B2\pi r = \mu_0 I_{uz}.$$

Odtiaľ $B(r) = \frac{\mu_0 I_{uz}}{2\pi r}$. Problém je, že takýmto spôsobom sme určili iba obvodovú zložku magnetického poľa, kvôli tomu, že sme robili skalárny súčin s obvodovou zložkou. Magnetické pole by mohlo mať ešte radiálnu alebo zložku v smere osi. Tieto zložky sú nulové. Že to tak bude sa síce dá zistiť z Maxwellových rovníc, ale neučiníme tak, a proste to berieme ako fakt, nakoľko poznáme Ampérove pravidlo pravej ruky, a pomocou neho vieme určiť smer poľa nekonečného vodiča.

⁸Krivka ale musí byť uzavretá – to znamená, že keď sa po nej prejdeme, raz sa vrátíme tam, odkiaľ sme začali.

⁹[https://sk.wikipedia.org/wiki/Imagine_\(programovac%C3%AD_jazyk\)](https://sk.wikipedia.org/wiki/Imagine_(programovac%C3%AD_jazyk))

¹⁰Môže vám napadnúť otázka, že ktorá plocha, keďže plôch, ktoré uzatvára slučka môže byť viac. Pravda je taká, že všetky plochy sú rovnako dobré.



Obrázok 7: Znázornené smery vo vodiči. Magnetické pole ma smer $\hat{\Phi}$.

Magnetické pole v hrubom vodiči

Vyjasnime si, ako presne funguje náš vodič. Vodič je celkovo neutrálny, je v ňom rovnako kladných ako záporných nábojov. Za kladné náboje považujeme jadrá atómov. Tieto jadrá sú fixované v kryštalickej mriežke vodiča, a v sústave spojenej s ním sa nehýbu.

Pokiaľ teda máme vodič s nezanedbateľnou hrúbkou, stále vieme využiť Ampérov zákon a cylindrickú symetriu. Použitím rovnakých úvah zisťujeme, že magnetické pole vo vnútri vodiča je

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_{uz}}{2\pi r}.$$

Tu sme urobili zásadné zanedbanie, predpokladáme totiž, že permeabilita vodiča je rovnaká ako permeabilita vákua. Aký prúd ale preteká kružnicou s polomerom r ? Prúd je daný podielom náboja, ktorý pretečie nejakým úsekom vodiča, a času, za ktorý tak učiní.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho S \Delta h}{\Delta t} = \rho S v = \rho \pi r^2 v.$$

Predchádzajúca rovnica dáva do súvisu magnetické pole s rozložením nábojov a ich rýchlosťami. ρ označuje hustotu nábojov. Využili sme predpoklad, že hustota vo vodiči je konštantná. Keďže kladné náboje sa vo vzťažnej sústave spojenej s jadrami nepohybujú, ich rýchlosť je nulová a preto ani nevytvárajú magnetické pole, ani necítia jeho účinky. Magnetické pole vytvárajú iba pohybujúce sa elektróny.

$$B(r) = \frac{\mu_0 \rho_- \pi r^2 v}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \rho_- r v}{2}.$$

ρ_- označuje hustotu záporných elektrónov. Tu si treba uvedomiť jednu vec: rýchlosť elektrónov tu nie je ich okamžitá rýchlosť, ale rýchlosť, ktorou sa hýbu všetky elektróny po spriemerovaní, teda takzvaná *driftová rýchlosť*.

Silové pôsobenie na elektróny

Všetky nabité častice cítia elektrickú silu. Nás zaujíma iba sila na elektróny, keďže kladné jadrá považujeme za fixované kryštalicou mriežkou.¹¹ Avšak pohybujúce sa elektróny cítia okrem toho aj magnetickú silu. Lorentzov zákon sily nám hovorí, že

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}.$$

¹¹Tým sa myslí, že medzi jednotlivými jadrami sú chemické väzby, ktoré by vyvážili účinky iných síl. Avšak elektróny považujeme za takmer voľné častice.

Prvá časť rovnice popisuje, ako súvisí sila, ktorú cíti náboj q s elektrickým poľom $\vec{E}$, druhá časť hovorí o súvisi s magnetickým poľom. Elektróny cítia nenulovú elektrickú silu v smere osi vodiča. Kvôli nej sa pohybujú vodičom. Avšak cítia aj magnetickú silu, ktorá ich ťahá do stredu vodiča, konkrétne

$$F_{\text{mag}} = qv \frac{\mu_0 \rho_- r v}{2}.$$

Musíme si vyjasniť smer sily. Premyslite si¹², ale jej smer bude smerom do vodiča¹³, teda

$$\vec{F}_{\text{mag}} = -qv \frac{\mu_0 \rho_- r v}{2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Kvôli tejto sile sa časť elektrónov nahnú bližšie ku stredu. Teda hustoty kladných a záporných nábojov nebudú rovnaké. Nahrnutie záporných nábojov do stredu vytvorí dodatočné elektrické pole, ktoré bude balansovať magnetickú silu.

Označme si hustoty elektrónov ρ_- a hustoty jadier ρ_+ . Gaussov zákon hovorí:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}.$$

Využitím cylindrickej symetrie

$$E 2\pi r h = \rho \pi r^2 h = (\rho_+ + \rho_-) \pi r^2 h.$$

Odtiaľ vyjadríme elektrické pole ako

$$E(r) = (\rho_+ + \rho_-) \frac{r}{2\epsilon_0}.$$

Aby celková sila na elektróny bola nulová,

$$0 = q(E(r) + F_{\text{mag}}) = q\left((\rho_+ + \rho_-) \frac{r}{2\epsilon_0} - v \frac{\mu_0 \rho_- r v}{2}\right).$$

Z predchádzajúcej rovnice vyjadríme

$$\rho_- = -\frac{\rho_+}{1 - v^2 \mu_0 \epsilon_0} = -\frac{\rho_+}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

kde sme využili známu vedomosť, že $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, pričom c je rýchlosť svetla.

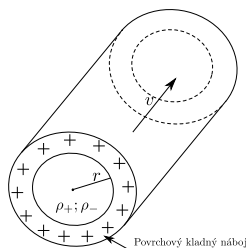
Čiže dostávame zaujímavý výsledok: hustota kladných a záporných častíc nie je vnútri vodiča rovnaká. To je pomerne neintuitívny výsledok, pretože náboj z vodiča zmiznúť nemohol a my sme predsa tvrdili, že vodič je neutrálny. V skutočnosti sa celá situácia zachráni tak, že v úzkej vrstve pri povrchu vodiča nebudú žiadne záporné elektróny, a budú tam iba kladné jadrá. Budú to v podstate dva do seba vnorené valce. Preto sa nejde o žiaden paradox. V reálnych vodičoch je kvôli malým rýchlostiam elektrónov tento efekt pomerne zanedbateľný, ale napríklad v plazme je tento efekt výrazný a nazýva sa *pinch effect*.

Možno niektorí z vás tušia, že faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ má niečo spoločné s relativitou. Ako to súvisí s naším príkladom?

¹²Pravidlo pravej ruky nám povie smer magnetického poľa. Potom treba určiť smer vektorového súčinu.

¹³Fakt, že samotná hustota ρ_- je záporná, zmení tento smer na opačný. Ale aj náboj elektrónu q je záporný a preto sa tento smer zmení na opačný ešte raz, čiže dve záporné znamienka dajú plus a vo výsledku sa nič nezmení.

Predstavte si, že by sme prešli do sústavy spojenej s pohybujúcimi sa elektrónmi. V tejto sústave elektróny stoja, takže na ne nemôže pôsobiť magnetická sila! Pohybujú sa síce kladné jadrá, a tie vytvárajú magnetické pole, ktoré pôsobí iba na ne samotné. O tých však predpokladáme, že sa vzájomne nepohnú, lebo sú viazané v kryštalickej mriežke kovu. Avšak keď sme prešli do inej vzťažnej sústavy, vďaka relativite došlo ku kontrakcii dĺžky, hustoty sa zmenili, a teraz na elektróny od začiatku pôsobí elektrická sila. Je jednoduché zistiť, aké musia byť jednotlivé kontrahované hustoty. Potom prejdeme do našej pôvodnej sústavy, opäť nezabudneme na kontrakciu, a máme výsledok. Nebudeme tu viac uvádzať, ak vás to zaujalo, veľmi prehľadne je to spísané napríklad tu¹⁴.



Obrázok 8: Rozloženie nábojov vo vodiči. Vo vonkajšom cylindri sa nachádzajú iba kladné náboje. Vonkajší cylinder bude väčšinou veľmi tenká vrstva, a dá sa naň pozeráť ako na povrchovú hustotu. Preto vo vodiči máme dve hustoty, dve objemové a jednu kvázi povrchovú.

1.7 Intergalaktický chill

vzorák Kvík, opravoval Kvík

Čím hlbšie sa zaujímate o fyziku, tým častejšie sa stáva, že naše zmysly a intuícia zlyhávajú. Najlepšie to vidno v extrémnych podmienkach, s akými sa v bežnom živote nestretneme: pri veľmi malých alebo naopak veľmi veľkých rozmeroch, relativistických rýchlostiach a podobne. No a vnímanie teploty niečoho, čo teplotu vlastne nemá, tiež patrí do tejto kategórie.

Asi viete, že skutočná a pocitová teplota sa vôbec rovnať nemusia ani za bežných okolností. Napríklad keď vonku poriadne fúka, teplota vzduchu sa vôbec nemusí zmeniť, zato je vám podstatne chladnejšie. Dôvodom je to, že prúdiaci vzduch odoberá teplo omnoho efektívnejšie, ako stojaci a vaša koža potom rýchlo chladne. Preto skutočnou, správnou jednotkou „pocitu zimy“ by ani nemala byť teplota (K), ale strata tepelnej energie za čas na jednotku plochy – teda $W m^{-2}$.

Receptory v ľudskej koži totiž nikdy necítia teplotu okolia, ale len svoju vlastnú. A keďže telo sa pokúša udržať teplotu okolo $37\text{ }^{\circ}C$ a vytvára vlastné teplo, väčšinou je táto bilancia mierne záporná. Naše telo počas rôznych metabolických procesov hospodári s prebytkom tepelného výkonu na úrovni okolo 100 W , ktorého sa ideálne chce zbaviť. Keď sedíme v izbe s teplotou vzduchu $25\text{ }^{\circ}C$, strácame približne týchto 100 W a je nám príjemne. Keď si sadneme do rovnako teplej vane, strácame tepla výrazne viac a cítime chlad.

Vzduch je v totiž veľmi dobrý izolant, pokiaľ ide o vedenie tepla (kondukciu), môže však teplo viesť makroskopickým prenášaním teplých molekúl (konvekciou). Preto domy zateplujeme vzduchom, ktorému sme zabránili sa hýbať tým, že sme ho uväznili v bublinkách penového polystyrénu.

Okrem týchto dvoch spôsobov prenosu tepla ešte poznáme prenos žiarením a straty pri vyparovaní.

Každé teleso¹⁵ vyžaruje zo svojho povrchu energiu vo forme elektromagnetického žiarenia. V izbe sme väčšinou v stave rovnováhy – strácame rovnako veľa, ako prijímame. Ak si sadneme blízko horúcej pece, cítime

¹⁴http://fks.sk/~fero/density_in_current_carrying_wire.pdf

¹⁵Pokiaľ jeho teplota nie je absolútna nula

silné teplo. Stačí si však zatieniť kožu kúskom papiera a tento pocit zmizne¹⁶. Podobne ak sa priblížime k studenej vonkajšej stene, cítime chlad. Nie že by stena nejaký chlad vyžarovala – ide o to, že vyžarujeme my, a od steny nedostávame rovnaký výkon naspäť.

Na a nakoniec pri vyparovaní sa teplo z kože spotrebúva na vytrhávajúce molekúl z kvapaliny. Medzi jednotlivými molekulami pôsobia príťažlivé sily. Niektoré molekuly však náhodnými zrážkami občas získajú toľko energie, že tieto sily prekonajú. Pritom však časť energie odnesú so sebou, takže celková energia tepelného pohybu ostatných molekúl sa zníži a teda aj teplota klesne.

Keď sme už dostatočne teoreticky podkutí, poďme sa pozrieť, ako tieto štyri mechanizmy budú pôsobiť na Andreja.

Konvekcia

Aj v extrémne riedkom medzihalaktickom priestore stále nejaké častice sú. Ich skutočná teplota je na úrovni okolo $10^5 - 10^7$ K. Problémom je však ich veľmi nízka hustota, iba pár častíc na m^3 . Frekvencia zrážok teda bude tiež nízka: aj pri hornej hranici teploty 10^7 K odovzdá jedna častica energiu $kT \approx 1,6 \times 10^{-19} \text{ J K}^{-1} \cdot 10^7 \text{ K} \approx 1,6 \times 10^{-12} \text{ J}$. Prenos tepla týmito časticami, čiže konvekciou, môžeme úplne zanedbať.

Kondukcia

Nuž, tu nie je čo riešiť. Andrej je pomerne tuhé teleso a molekuly si s okolím veľmi nevymieňa – okrem vody vo forme vlhkosti kože, tú však vyriešime neskôr. Preto nemôže ani odovzdávať energiu kondukciou.

Žiarenie

Čo so žiarením? V prvom rade Andrej stráca teplo vyžarovaním z celého svojho povrchu. Povrch kože dospeleho muža je približne 2 m^2 . Keďže Andrej nie je konvexný¹⁷, časť žiarenia trafi nejakú inú časť jeho povrchu, a teda sa nevyžiari do voľného priestoru, ale opäť absorbuje. V rádovom odhade nám to ale prekážať nebude – pozrieme sa na ľubovoľnú plošku, ktorá vyžaruje do celého polpriestoru.

Koža, aj keď sa to nezdá, má emisivitu veľmi blízku dokonale čiernemu telesu¹⁸, takže celkový stratený výkon môžeme počítať priamo zo Stefanovho-Boltzmannovho zákona. Andrejova teplota by mala byť okolo 310 K , čo nám po dosadení dá hodnotu približne -523 W m^{-2} . Približne taký výkon stráca žiarením práve teraz aj vy.

Napriek tomu vám zrejme zima nie je, pretože sedíte v prostredí, ktoré vyžaruje rovnaký výkon späť. Andrej takýto luxus nemá, ale predsa však naňho žiari kozmické pozadie. Toto si môžeme predstaviť ako dokonale čierne teleso, ktoré Andreja kompletne obklopuje v priestorovom uhle 4π . Naša malá ploška teda takisto absorbuje žiarenie z celého polpriestoru, ktorý vidí. Teplota kozmického pozadia je však iba $2,73 \text{ K}$, čomu zodpovedá výkon približne $1,5 \mu\text{W m}^{-2}$. Takéto nič môžeme s pokojným svedomím úplne zanedbať.

Vyparovanie

Nakoniec si ešte uvedomíme, že Andrejova koža je určite aspoň trochu vlhká a že vyparovanie tejto vlhkosti ho bude ďalej chladiť. Na odparenie 1 g vody potrebujeme približne 2257 J . Pri prakticky nulovom tlaku bude toto odparovanie prebiehať veľmi rýchlo. Andrej teda najprv pocíti veľký chlad, ktorý sa postupne zníži na hodnotu okolo -523 W m^{-2} . Povedzme, že v prvej chvíli sa z jeho povrchu bude odparovať $1 \text{ gm}^{-2}\text{s}^{-1}$. Potom musí strácať ďalších 2257 W m^{-2} , čiže spolu $2790 \text{ W m}^{-2}\text{s}^{-1}$.

¹⁶Samozrejme, v miestnosti s pecou je obvykle aj vzduch celkom teplý.

¹⁷Aj keď vraj sa k tomu už pomaly blíži...

¹⁸Vraj 98 %, podľa https://www.thermoworks.com/emissivity_table

Kedže bežní ľudia ale pre jednotku W m^{-2} nemajú príliš pochopenie, nakoniec by sme mali výsledok prerátať späť na stupne Celzia. Pýtame sa teda: pri akej teplote bude nahý Andrej stojaci v nehybnom vzduchu strácať 523 W m^{-2} ?

Zhodu nájdeme napríklad pomocou tejto kalkulačky¹⁹. Tá síce nepodporuje nulovú rýchlosť vetra, môžeme tam však zadať pár malých čísel (napríklad 4, 3 a 2 ms^{-1}) a doextrapolovať výsledok tak, že budeme tipovať pôvodnú teplotu. Nie je to úplne lineárne, ale ako hrubý odhad to bude stačiť. Približnú zhodu nájdeme pri teplote okolo 9°C . Ak by sme však uvažovali aj odparovanie vody rýchlosťou $1 \text{ gm}^{-2}\text{s}^{-1}$, zhodu nájdeme až pri teplote okolo -90°C ²⁰. Skutočne, vo vákuu sa voda odparuje veľmi búrlivo a pritom odoberá množstvo tepla.

Záverom teda môžeme tvrdiť, že suchý Andrej sa v medzigalaktickom priestore bude cítiť asi ako za bezveterného suchého zimného rána s teplotou okolo $9^\circ\text{C} = 282 \text{ K}$. Ak by sa navyše vlhkosť z jeho kože odparovala rýchlosťou $1 \text{ gm}^{-2}\text{s}^{-1}$, pocíti treskúcu zimu na úrovni najchladnejších antarktických nocí. Pri nulovom tlaku a nulovom obsahu kyslíka ale tak či onak bude mať iné problémy, ako pocíti zimu.

Komentár autora úlohy a opravovateľa

Pri bodovaní tejto úlohy som mal tri základné požiadavky:

1. Uvedomiť si, že človek necíti priamo teplotu, ale tepelné straty alebo zisky na určitú plochu.
2. Ďalej treba opísať, ako sa vo vesmíre môže strácať teplo, teda že pôjde dominantne o žiarenie (približne) čierneho telesa. Vyparovanie vlhkosti je iba drobný bonus.
3. Potom si musíme všimnúť, že vo vzduchu budeme mať zdroje strát dva: opäť žiarenie do okolia a k nemu ešte straty vedením alebo konvekciou. Okrem toho nesmieme zabudnúť, že vzduch okolo Andreja naňho ešte žiari nezanedbateľným výkonom naspäť. Keď to všetko započítame, vieme nájsť teplotu, pri ktorej sa výkony budú rovnať. Buď pomocou nejakej tabuľky, alebo si vytvoríme model a dopočítame.

Za každé z týchto uvedení ste dostali približne dva body. Zvyšok sa dal získať za opis javov a zostavenie rovníc, občas som bod strhol za nejakú zjavnú numerickú chybu. Ako to v týchto úlohách býva, Vaše hodnoty konštánt sa mohli celkom divoko líšiť, takže som ich veľmi do úvahy nebral, ak to nedávalo vo výsledku nejaký zjavný nezmysel.

Veľmi pekné riešenia poslali Dvojka, Myšiel a Jonáš.

¹⁹https://www.weather.gov/epz/wxcalc_windchill

²⁰Presné číslo tu veľmi závisí od (nezadanej) rýchlosti vyparovania. Ale dôležité je, že to spraví poriadny rozdiel.