Zadania

$\boxed{1.}$ Aká je hmotnosť štandardného balíka A4, v ktorom sa nachádza 500 listov? Vieme, že meter štvorcový papiera váži 80 g a rozmery jedného listu A4 sú 210×297 mm.

$\boxed{2.}$ Z výšky H voľne pustíme teleso. V tom istom okamihu vyhodíme iné teleso zo zeme. Akú rýchlosť mu máme udeliť, aby sa obe telesá stretli vo výške $\frac{1}{2}H$?

$\boxed{3.}$ Tinka má guličku na šnúrke a točí ňou po kružnici. Keď má gulička rýchlosť v, šnúrka sa roztrhne. Pri akej rýchlosti guličky by sa Tinke roztrhla dvojnásobne dlhá šnúrka?

$\boxed{4.}$ V akom pomere treba zmiešať kvapaliny s hustotami ρ_1 a ρ_2 ($\rho_1 < \rho_0 < \rho_2$), aby sme dostali zmes s hustotou vody ρ_0?

$\boxed{5.}$ Ako vysoko nad povrch zeme musíme vyniesť kocku ľadu, aby jeho potenciálna energia vzhľadom na povrch zeme stačila na jeho roztopenie? Ľad má nulovú teplotu, jeho hustota je približne $900\,\mathrm{kg/m^3}$ a skupenské teplo topenia asi $340\,\mathrm{kJ/kg}$.

$\boxed{6.}$ Peťo a Paťo behajú konštantnými rýchlosťami po bežeckej dráhe. Bežať začali obaja naraz. Paťo si všimol, že kým on zabehol svojich prvých desať okruhov, rýchlejší Peťo prebehol cieľom už dvanásť krát. Čo najpresnejšie určte pomer rýchlostí Paťa k rýchlosti Peťa!

$\boxed{7.}$ Adrenalínový zimný športovec Jakub má ambiciózny plán, ako stihnúť ráno školu a zároveň sa udržať v kondícii. Vyštartuje z domu rýchlosťou $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ a bude rovnomerne spomaľovať, až kým nepríde do školy. Škola stojí 10 km od jeho domu z ktorého vyráža 45 min pred začiatkom vyučovania. Aké najväčšie spomalenie (v $\mathrm{km\,h^{-2}}$) si môže Jakub dovoliť?

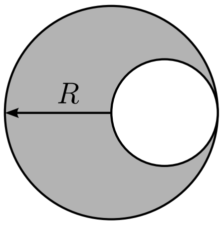
$\boxed{8.}$ Tlak vody vo vodovodnom potrubí na prízemí budovy je 10 atmosfér. Aká najvyššia môže byť budova, aby aj na jej vrchu tiekla voda z vodovodu?

$\boxed{9.}$ V elektrickej sieti máme striedavé napätie s frekvenciou asi 50 Hz. Koľko krát za minútu bude vláknom žiarovky pripojenej na takúto sieť tiecť nulový prúd?

$\boxed{10.}$ Kamión s liečivým bahnom uháňa z Piešťan do Bratislavy. Trasu dlhú 90 km chce prejsť konštantnou rýchlosťou za jednu hodinu. Prvá tretina trasy ubehla bez problémov. Na druhej tretine trasy práve opravovali diaľnicu a pohyboval sa priemernou rýchlosťou len $72\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Ako rýchlo sa má pohybovať na poslednej tretine trasy, aby dorazil podľa plánu?

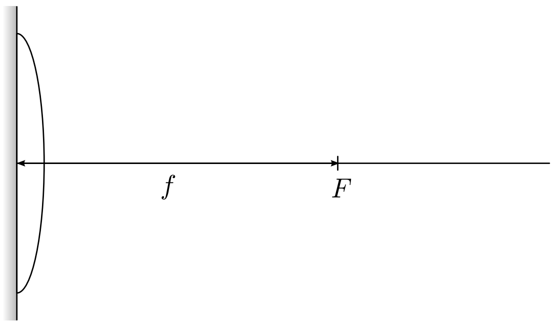
$\boxed{11.}$ Polik býva na elektrifikovanom internáte a vodu na čaj si zohrieva pomocou elektrickej energie. Vezme špirálu a napojí ju na zdroj napätia U, vďaka čomu získa tepelný výkon P. V záchvate zohrievania vzal druhú (rovnakú) špirálu a pripojil ju do série k prvej. Aký bude tepelný výkon nového zohrievača pozostávajúceho z dvoch špirál?

$\boxed{12.}$ Janka si chcela v izbe navodiť vianočnú atmosféru. Preto si začala z papiera strihať všakovaké hviezdičky, snehové vločky a mesiačiky. Vzala si papierový kruh s polomerom R a vystrihla z neho menší kruh s polomerom $\frac{1}{2}R$, ako to znázorňuje obrázok. Ako ďaleko od stredu pôvodného kruhu sa nachádza ťažisko takéhoto mesiačika?

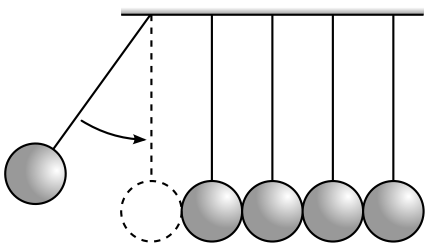


13. Fajo by si rád dal teplý kúpeľ vo svojej vani, ktorá má obsah dna $S = 0{,}8\,\mathrm{m}^2$ a zvislé steny. V rámci šetrenia vody si predsavzal, že sa chce kúpať vo vode hlbokej $h = 40\,\mathrm{cm}$. Odhadnite, koľko litrov vody si má do vane napustiť, ak jeho hmotnosť je $m = 80\,\mathrm{kg}$? Predpokladajte, že Fajo počas kúpania vo vode „pláva“, tj. nedotýka sa ani dna, ani okrajov vane.

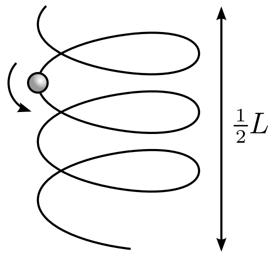
14. Marcelka vzala ploskovypuklú šošovku s ohniskovou vzdialenosťou f a ploskou stranou ju priložila k rovinnému zrkadlu, ako to znázorňuje obrázok. Do ohniska šošovky vložila bodový zdroj svetla. Geometricky určte, kde sa lúče vychádzajúce zo zdroja stretnú (tj. kde vznikne obraz).



15. Aká je perióda malých kmitov Newtonových guľôčok, tj. sústavy 5 pružných oceľových guľôčok na závesoch tesne pri sebe? Perióda malých kmitov jednej guľôčky je T.



16. Špirála na obrázku má výšku $\frac{1}{2}L$ a je zhotovená z drôtu dĺžky L. Koľkokrát dlhšie sa po nej bude šmýkať zhora nadol malá korálka, než je čas jej voľného pádu z rovnakej výšky, teda $\frac{1}{2}L$?



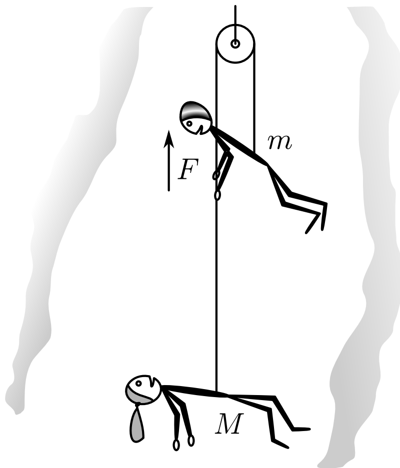
$\boxed{17.}$ Ideálna možnosť ako sa zvečniť, je nechať sa spopolniť a rozprášiť sa po povrchu Zeme. Koľko atómov z tela nebožtíka nájdu pozostalí na jednom metri štvorcovom povrchu? Uvažujte, že z človeka zostane po spopolnení $m = 1\,\mathrm{kg}$ uhlíka s mólovou hmotnosťou $M_\mathrm{C} = 12\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$. Uvážte, že povrch Zeme má veľkosť približne $S_\mathrm{z} = 5 \cdot 10^8\,\mathrm{km^2}$ a že v jednom móle látky sa nachádza približne $N_\mathrm{A} = 6 \cdot 10^{23}$ častíc.

$\boxed{18.}$ Amálka, nadšená športovým spravodajstvom, sníva sen o kariére futbalistky. V návale entuziazmu vyšla na útes čnejúci sa vo výške h nad inak rovným terénom a vykopla odtiaľ loptu vodorovným smerom rýchlosťou v_0. Aká bude veľkosť rýchlosti lopty bezprostredne pred dopadom? Odpor vzduchu zanedbajte!

$\boxed{19.}$ Teplovzdušný balón s celkovou hmotnosťou M prelietal práve ponad internáty v Mlynskej doline, keď naň zosadol kŕdeľ holubov, každý s hmotnosťou m. Koľko ich bolo, ak sa kvôli nim začal balón približovať k zemi so zrýchlením a? Odporové sily zanedbajte!

$\boxed{20.}$ Jedna z techník vyťahovania bezvládneho človeka z ľadovcovej trhliny spočíva v zostrojení kladkostroja nad trhlinou, v ktorej nám visí kamarát. Potom sa plní entuziazmu vrhneme do trhliny a hooop! Problém nastáva, keď sme ľahší ako on. Akou najmenšou silou musím vyťahovať kamarátove lano nahor, aby som stroj uviedol do pohybu? Vaša hmotnosť je m, hmotnosť vášho kamaráta je M.

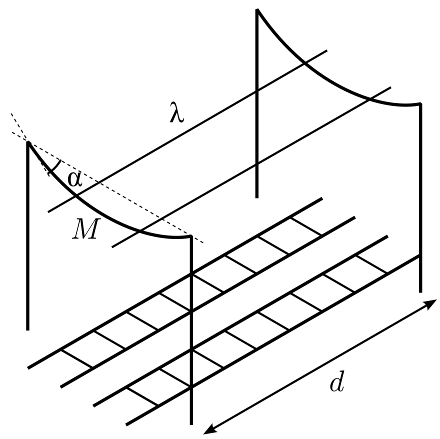
Pozn.: Ja sa potom vytiahnem nahor pri zablokovanej kladke.



$\boxed{21.}$ Jakub trávil noc v snehovom záhrabe pri $-5\,°\mathrm{C}$ a bol veľmi smädný. Preto v priebehu polhodiny zjedol 0,5 kg snehu. O koľko musí narásť jeho tepelný výkon, aby jeho telesná teplota ostala $37\,°\mathrm{C}$? Tepelná kapacita ľadu je $2{,}1\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, vody $4{,}2\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ a skupenské teplo topenia ľadu je $334\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$.

$\boxed{22.}$ Teleso pláva v sude, pričom ponorené sú dve tretiny jeho objemu. Aká časť objemu bude ponorená, ak sud budeme dvíhať s konštantným zrýchlením a?

$\boxed{23.}$ Vlakové troleje nad dvojkoľajovkou sú zavesené na stĺpoch v rozostupoch d. Dĺžková hustota (tj. hmotnosť na jednotku dĺžky) trolejového vedenia je λ. Lano, na ktorom visia troleje, má hmotnosť M. Určte silu, ktorou toto lano pôsobí na každý zo stĺpov, ak vieš, že v bode uchytenia zviera lano s horizontálou uhol α.



$\boxed{24.}$ Kubo raz sedel na záchode a premýšľal nad úlohami z teórie žiarenia, keď mu zrazu hlavou prešla skvostná myšlienka: „Aké by to bolo krásne robiť balenie toaletného papiera po troch kusoch!“ Zaujíma ho, aká najmenšia plocha igelitu je potrebná na ich zabalenie. Pomôžte mu! Predpokladajte pri tom, že toaletný papier má tvar pevnej kocky so stranou a.

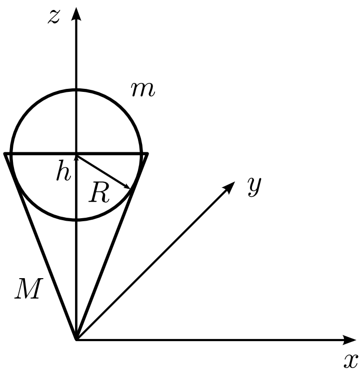
$\boxed{25.}$ Uvažujme šošovku vyplnenú vzduchom, ktorá má tvar bežnej spojky s polomermi R. Umiestnime ju do vody. Dajme teraz zdroj svetla ďaleko od nej. V akej vzdialenosti za šošovkou sa lúče zo zdroja skoncentrujú? Index lomu vody je n.

$\boxed{26.}$ Civilné lietadlo letí rýchlosťou v menšou ako rýchlosť zvuku c. Aký môže byť najväčší uhol medzi smerom k lietadlu a smerom, odkiaľ počujem jeho motor?

$\boxed{27.}$ V inej galaxii sa nachádza planetárna sústava podobná tej našej. Rozdiel je v tom, že všetky rozmery sú tam tretinové a všetky hustoty polovičné. Koľko trvá na tamojšej „Zemi“ rok?

$\boxed{28.}$ Záhradník Braňo polieval trávnik. Všimol si, že keď drží ústie hadice nízko nad zemou, prúd vody vytvorí oblúk vysoký H a dopadajúci vo vzdialenosti L. Akou rýchlosťou vychádzala voda z ústia hadice? Odpor vzduchu neuvažujte.

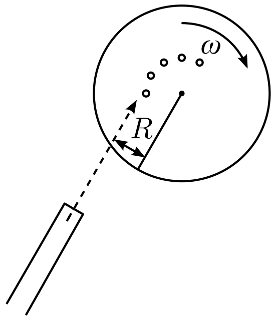
29. Nájdi polohu ťažiska kornútika so zmrzlinou (pozri obrázok)! Hmotnosť zmrzliny je M, hmotnosť kornútika m.



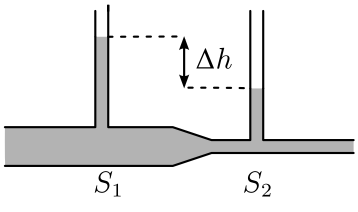
30. Prierazná intenzita vzduchu je $3\,\mathrm{kV\,mm^{-1}}$. Ak máme kondenzátor o ploche $100\,\mathrm{cm^2}$ a vzdialenosti dosiek $0{,}5\,\mathrm{mm}$, medzi ktorými je vzduch, tak akú maximálnu energiu vie poňať? Permitivita vzduchu je približne $\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$.

31. Netopier letí smerom k stene. Vydáva ultrazvuk s frekvenciou f_1 a počúva odraz s frekvenciou f_2. Akou rýchlosťou letí? Rýchlosť zvuku vo vzduchu je c.

32. Guľka z guľometu urobí do terča dierku polomeru $r = 0{,}6\,\mathrm{cm}$. Guľomet má os rovnobežnú s osou terča, ktorý sa točí uhlovou rýchlosťou $\omega = 80\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, avšak strieľa do vzdialenosti $R = 38\,\mathrm{cm}$ od stredu terča. Kadencia guľometu je $f = 600\,\mathrm{Hz}$. Koľká guľka rozstrelí terč definitívne na 2 kusy?

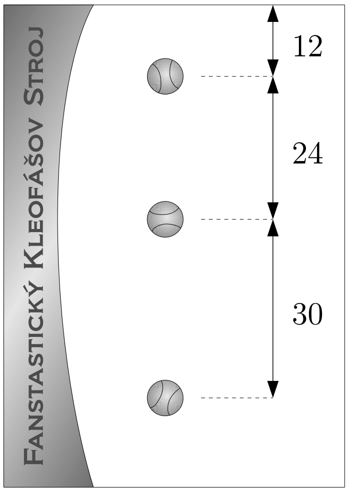


33. Z rozdielu výšok Δh a z prierezov $S_1 > S_2$ potrubí urči prietok Q vody potrubím. Hustota vody je ρ.



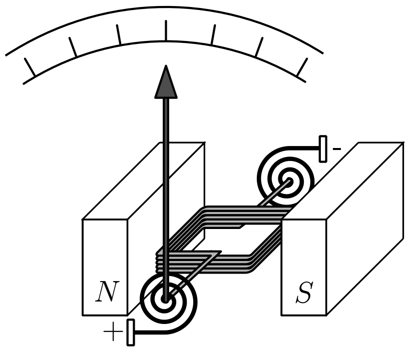
34. Tomáš zlaňuje po pružnom lane, ktoré má v nenatiahnutom stave dĺžku L. Keď zlaní na koniec, tak zistí, že vplyvom pružnosti visí $L + \Delta L$ pod miestom, kde začal zlaňovať. Tomáš má hmotnosť m. Koľko tepla sa v lane vytvorilo počas zlanenia?

35. Kleofáš si postavil stroj na púšťanie tenisových lôpt v pravidelných intervaloch. Aby sa mohol pochváliť svojim kamarátom, odfotil si svoj vynález počas jeho chodu. Výsledok si môžete pozrieť na nasledujúcom obrázku. Ako vysoko nad vrchným okrajom fotografie sa nachádza otvor na púšťanie loptičiek?



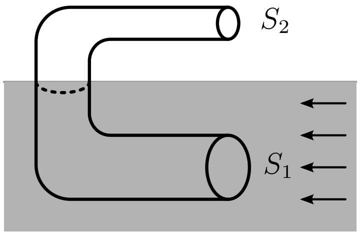
36. Potom, čo Kubík pozapájal rezistory do tvaru všakovakých platónskych telies, znížil sa k prízemnejším schémam. Zobral si tri rezistory. Keď dva z nich zapojil paralelne, postupne nameral celkový odpor 30, 40, resp. 60 kΩ. Aký odpor nameria, ak ich zapojí paralelne všetky tri naraz?

37. Máme galvanometer, ktorý funguje nasledovne: Skúmaný prúd prechádza cievkou s N závitmi, každý o ploche S. Táto cievka je uložená v homogénnom magnetickom poli B, ktoré je v rovnovážnej polohe kolmé na normálu cievky. Navyše je cievka pripevnená k 2 špirálovým pružinám, ktoré na ňu spolu pri pootočení o uhol φ pôsobia momentom sily $M = -k\varphi$. O aký uhol sa otočí ručička oskou pripojená na cievku, ak galvanometrom prechádza malý prúd I? Predpokladajte, že aj otočenie cievky je potom malé, preto $\cos\varphi \approx 1$ a $\sin\varphi \approx \varphi$.



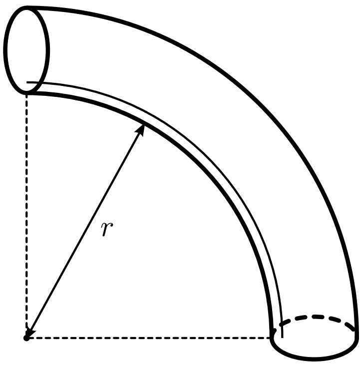
38. Halucinka má dve zrkadlá, ktoré zvierajú uhol $\alpha < 90\,°$. Namierila medzi ne svetelný lúč rovnobežne s jedným zo zrkadiel, vzdialenosť medzi týmto zrkadlom a lúčom je d. Ako najbližšie ku spojnici zrkadiel sa lúč počas odrážania dostane?

39. Pankrác zobral trubicu v tvare `U` a vložil ju väčším otvorom S_1 do prúdu vody tečúcej rýchlosťou v, v dôsledku čoho voda vyteká neponoreným menším otvorom S_2. Akou silou treba trubicu držať, aby ju nápor vody neodplavil preč? Hustota vody je ρ, viskózne vlastnosti vody zanedbajte.



40. O koľko sa predĺži oceľová tyč dĺžky L a hmotnosti M v dôsledku jej vlastnej tiaže, pokiaľ ju zavesíme za jeden koniec? Modul pružnosti ocele je E, prierez tyče má obsah S.

41. Vnútri hladkej rúrky tvaru štvrťkruhu s polomerom r je špagát, ako to zobrazuje obrázok. Určte jeho zrýchlenie v prvom okamihu!



42. Pri hlasitosti 100 dB je amplitúda tlaku pri bežných podmienkach (asi 10^5 Pa a 300 K) približne 2 Pa. Aká je amplitúda teploty? Poissonova konštanta κ pre vzduch je 1,4. Pri riešení môžete využiť, že pre $|x| \ll 1$ platí $(1+x)^n \approx 1 + nx$.

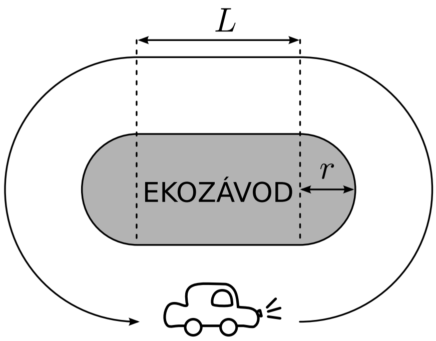
43. Juro nasadol do vesmírnej rakety a rýchlosťou 0,8c uháňa priamo k najbližšej hviezde. Aby sa nenudil, začal hrať v beztiažovom stave squash tak, že loptičku odráža v smere pohybu rakety. Jeho kamarát Jano to všetko pozoruje zo Zeme ďalekohľadom. Zistil, že odpálená loptička sa od neho vzďaľuje rýchlosťou 0,9c. Akou rýchlosťou sa pohybuje v sústave spojenej so Zemou loptička po odraze od steny? Predpokladajte, že zrážka loptičky je napriek jej astronomickej rýchlosti dokonale pružná.

44. Nádoba tvaru kocky po okraj naplnená vodou sa vyprázdni cez malý otvor na svojom dne za čas t. Za aký čas sa vyprázdni plná nádoba, ktorá je v každom rozmere, vrátane otvoru na dne, k-krát väčšia?

45. Jakub trávil noc v snehovom záhrabe pri $-5\,^\circ\mathrm{C}$ a kvôli smädu pokračoval v jedení snehu rýchlosťou 1 kg za hodinu. O koľko by poklesla jeho teplota, keby nebol zvýšil svoj tepelný výkon 150 W? Pripomeňme si, že jeho pôvodná telesná teplota bola $37\,^\circ\mathrm{C}$, tepelná kapacita ľadu je $2{,}1\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, vody $4{,}2\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ a skupenské teplo topenia ľadu je $334\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$.

46. Závodný okruh pretekárskych automobilov vyzerá ako ovál na obrázku: V jeho protiľahlých častiach sa nachádzajú neklopené zákruty s vnútorným polomerom r a vonkajším polomerom rádovo väčším. Tie sú spojené rovnými úsekmi dlhými $L = 4r$. Závodí sa konštantnou rýchlosťou, lebo ide o ekologický pretek. Za predpokladu, že máme auto s nízkym ťažiskom (nepreklopí ho v zákrute) a koeficient trenia medzi kolesami a cestou je f, za aký najmenší čas dokážeme okruh prejsť?

Uvažujte, že po rovných úsekoch sa pohybujeme rovno a v zákrutách po kružnicovom oblúku o uhle o 180° a to bez prešmykovania!



Vzorové riešenia

$\boxed{1.}$ Hmotnosť štandardného balíka A4 je cca 2,5 kg.

$\boxed{2.}$ Teleso treba vyhodiť rýchlosťou $\sqrt{Hg}$.

$\boxed{3.}$ Dvojnásobne dlhá šnúrka sa roztrhne pri rýchlosti $\sqrt{2}v$.

$\boxed{4.}$ Kvapaliny treba zmiešať v pomere $V_1/V_2 = (\rho_0 - \rho_2)/(\rho_1 - \rho_0)$.

$\boxed{5.}$ Ľad treba vyniesť do výšky 34 km.

$\boxed{6.}$ Pomer rýchlostí Paťa a Peťa je medzi $\frac{10}{13}$ a $\frac{10}{12}$.

$\boxed{7.}$ Jakub môže mať spomalenie maximálne $\frac{160}{9}\,\mathrm{km\,h^{-2}} \approx 18\,\mathrm{km\,h^{-2}}$.

$\boxed{8.}$ Budova môže mať maximálne 90 m.

$\boxed{9.}$ Vláknom žiarovky bude tiecť nulový prúd 6 000 krát za minútu.

$\boxed{10.}$ Zrátajme, aké meškanie bude mať po druhom úseku. Časť, ktorú mal prejsť za 20 minút mu trvala v skutočnosti $30\,\mathrm{km} : (72\,\mathrm{km\,h^{-1}}) = 25\,\mathrm{min}$. Aby dobehol svoje meškanie, poslednú časť musí prejsť za 15 minút a jeho priemerná rýchlosť na tomto úseku teda musí byť $v = 30\,\mathrm{km} : (0{,}25\,\mathrm{h}) = 120\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

$\boxed{11.}$ Pre výkon uvoľnený na špirále platí vzťah $P = IU$, kde I je prúd prechádzajúci spotrebičom a U napätie na ňom. Po zapojení druhej špirály do série sa odpor sústavy zdvojnásobí, kvôli čomu klesne prúd na polovicu. Okrem toho sa napätie U rozdelí na obe špirály, takže na každej špirále bude aj napätie polovičné. Ak ešte uvážime, že tepelný výkon P_2 konajú dve špirály, dostávame

$$P_2 = 2 \cdot \tfrac{1}{2} I \cdot \tfrac{1}{2} U = \tfrac{1}{2} P\,.$$

$\boxed{12.}$ Vezmime kruh z antipapiera s polomerom $\frac{1}{2}R$ (bude mať teda hmotnosť $m = -\frac{1}{4}M$) a priložme ho na veľký kruh. Na mieste, kde sa dotýkajú papier s antipapierom, tieto sa vyrušia a zostane diera. Vidíme, že vystrihnutý mesiačik je to isté ako kruh, na ktorom je nalepený polovičný kruh so zápornou hmotnosťou. A kde leží ťažisko takejto sústavy? Zjavne y-ová súradnica sa nezmení. Ak navyše za počiatok súradnicovej sústavy vezmeme stred veľkého kruhu, pre x-ovú súradnicu ťažiska platí

$$x_t = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{0M + \frac{1}{2}Rm}{M+m} = \frac{-\frac{1}{8}RM}{\frac{3}{4}M} = -\frac{1}{6}R\,.$$

Výsledná vzdialenosť od stredu preto je $\Delta R = |x_t| = \frac{1}{6}R$.

13. Keď Fajo pokojne pláva na vode, na neho pôsobiaca tiažová a vztlaková sila sú v rovnováhe. Ak označíme časť objemu Faja pod hladinou vody ako V_1 a hustotu vody ako ρ_v, dostávame

$$mg = V_1 \rho_\mathrm{v} g\,,$$
$$V_1 = \frac{m}{\rho_\mathrm{v}}\,.$$

Ak od objemu medzi hladinou a dnom vane $V_2 = hS$ odpočítam objem ponorenej časti Faja V_1, dostávam objem vody vo vani

$$V = V_2 - V_1 = hS - \frac{m}{\rho_\mathrm{v}} \approx 240 \text{ litrov.}$$

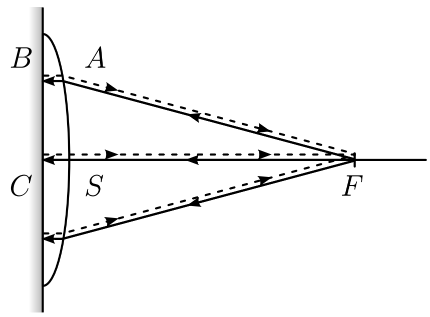
14. Pri riešení využijeme základné pravidlá používané v geometrickej optike:

(i) lúče prechádzajúce ohniskom šošovky sa lámu rovnobežne s optickou osou;

(ii) lúče idúce rovnobežne s optickou osou sa lámu do ohniska;

(iii) lúče dopadajúce na zrkadlo sa odrážajú pod rovnakým uhlom, pod akým dopadli.

Budeme sledovať nejaký lúč vychádajúci zo zdroja: Na šošovku dopadne v bode A. Keďže tento lúč prechádzal ohniskom šošovky, zalomí sa na povrchu šošovky rovnobežne s optickou osou. Postupuje k zrkadlu, na ktoré dopadne kolmo v bode B, kde sa odrazí a po pôvodnej trajektórii sa vracia naspäť do bodu A a do ohniska. Takúto úvahu však možno urobiť aj pre lúč idúci po optickej osi (body S, C na obrázku) či dokonca pre každý lúč idúci zo zdroja ku šošovke vôbec. Je preto jasné, že všetky takéto lúče sa opäť stretnú v ohnisku (resp. zdroji), ako to znázorňuje obrázok.

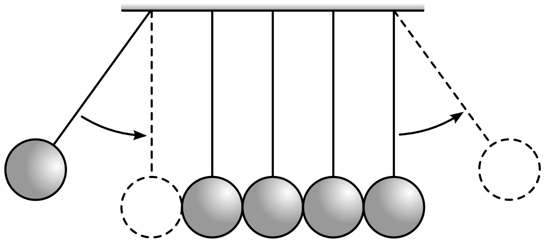


Poznámka: Niektorým z vás zrejme napadlo, že lúče, ktoré dopadajú na zrkadlo mimo šošovky tvoria virtuálny obraz za zrkadlom. Na ten sme sa však nepýtali, pretože sme hľadali bod, kde sa stretnú lúče, čo je reálny obraz.

15. Najprv sledujme jednu guľôčku pri kmite. Po uvoľnení z najvyššej polohy vplyvom tiažovej sily klesá a zrýchľuje. Po čase $\frac{1}{4}T$ je guľôčka v najnižšej polohe a má najväčšiu rýchlosť. Zotrvačnosťou stúpa, pričom ju tiažová sila spomaľuje až sa o ďalší čas $\frac{1}{4}T$ zastaví v najvyššej

polohe na druhej strane. Odtiaľ sa rovnako vráti do východzieho bodu. Celú periódu T sme si takto rozdelili na štyri rovnako dlhé úseky.

Teraz sledujme Newtonove guľôčky. Krajnú vychýlime a po uvoľnení klesá a zrýchľuje, až kým narazí na druhú. Tento pohyb je úplne rovnaký ako v prípade jednej guľôčky, preto bude trvať čas $\frac{1}{4}T$. Potom dôjde k zrážke medzi prvou a druhou guľôčkou. Podľa predpokladu sú guľôčky pružné, preto pri zrážke odovzdá prvá guľôčka všetku svoju hybnosť druhej. (Pri centrálnej pružnej zrážke dvoch rovnako ťažkých telies si tieto vymenia rýchlosti. Premyslite si, že to vyhovuje zákonu zachovania hybnosti i energie.) Druhá ju pri zrážke odovzdá tretej atď., až kým hybnosť nezíska piata guľôčka. Tá vystúpi do rovnakej výšky, z akej bola pustená prvá guľôčka, čo potrvá opäť čas $\frac{1}{4}T$. Potom sa bude diať to isté v opačnom smere.



Zistili sme, že periodický pohyb Newtonových guľôčok sa skladá zo štyroch úsekov dĺžky $\frac{1}{4}T$ a z dvoch úsekov, pri ktorých si guľôčky odovzdávajú hybnosť. Tieto sa však dejú rýchlosťou zvuku v danom materiáli (oceli), tj. prakticky okamžite. Tento dej je teda v porovnaní s časom T zanedbateľný. Perióda malých kmitov Newtonových guľôčok je preto tiež T, rovnako ako perióda jedinej guľôčky.

$\boxed{16.}$ Využijeme, že pri rovnomerne zrýchlenom pohybe platí pre čas t potrebný na prejdenie dráhy s vzťah $t = \sqrt{2s/g}$. Voľný pád korálky z výšky $\frac{1}{2}L$ preto potrvá

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{2}L}{g}} = \sqrt{\frac{L}{g}}\,.$$

Pohyb malej korálky po špirále sa od pohybu po naklonenej rovine líši len v tom, že na ňu pôsobí nejaká dostredivá sila. Tá však smeruje kolmo na špirálu, čiže kolmo na pohyb korálky. To znamená, že hoci mení smer rýchlosti, nemení jej veľkosť. Preto nám nič nebráni odrolovať a vyrovnať špirálu.

Dostaneme tak naklonenú rovinu s výškou $\frac{1}{2}L$ a dĺžkou L, čiže rovinu naklonenú pod uhlom $\alpha = 30\,°$. Ak si nakreslíme rozklad síl, vidíme, že korálka je urýchľovaná silou $F = mg\sin\alpha$, teda má zrýchlenie $a = g\sin\alpha = \frac{1}{2}g$. Doba pohybu preto bude

$$t_2 = \sqrt{\frac{2L}{\frac{1}{2}g}} = \sqrt{\frac{4L}{g}}\,.$$

Vidíme, že pohyb po špirále bude trvať dvakrát dlhšie.

Dodajme ešte, že v prípade väčších korálok, ktorých polomer už nie je zanedbateľný oproti polomeru krivosti dráhy, bude výsledok ovplyvnený otáčaním korálky. V zadaní sa však spomína, že korálka je malá, preto je naše zanedbanie oprávnené.

$\boxed{17.}$ Veličina, ktorá prepojí hmotnosť a počet častíc je látkové množstvo. To je definované ako podiel hmotnosti a molovej hmotnosti alebo ako podiel počtu častíc a Avogadrovej konštanty (čo je počet častíc v jednom mole). Platí teda

$$m/M_\mathrm{C} = n_\mathrm{C} = N/N_\mathrm{A}\,,$$

odkiaľ pre počet uhlíkových atómov nebožtíka dostávame

$$N = mN_\mathrm{A}/M_\mathrm{C}\,.$$

Tieto častice sa rovnomerne rozprášia po povrchu zeme. Počet atómov na jednotku plochy dopočítame jednoducho ako

$$\frac{N}{S_\mathrm{z}} = \frac{mN_\mathrm{A}}{M_\mathrm{C}S_\mathrm{z}} \approx 10^{11} \text{ častíc na meter štvorcový.}$$

$\boxed{18.}$ K riešeniu sa dá pristupovať dvoma spôsobmi. Začnem riešením cez sily. Na loptu počas jej pádu pôsobí iba gravitačná sila (kedže odpor vzduchu sme zanedbali). Tá smeruje kolmo nadol, teda ovplyvňuje iba y-ovú zložku rýchlosti.

$$\begin{aligned} v_x &= \text{konšt,} = v_0\,,\\ v_y &= gt\,. \end{aligned}$$

Čas padania lopty t zistíme z dráhy voľného pádu

$$h = \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Pre v_y pri dopade dostávame

$$v_y = \sqrt{2hg}$$

a celkovú veľkosť rýchlosti pri dopade získame spočítaním prepony pravouhlého trojuholníka

$$v_\mathrm{d} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\,.$$

Rýchlejšie sa dá úloha spočítať cez zákon zachovania mechanickej energie. Jednoducho zapíšeme rovnicu

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \tfrac{1}{2}mv_\mathrm{d}^2\,,$$

čo vedie na rovnaký výsledok.

$\boxed{19.}$ Než balón preletel ponad Mlynskú dolinu, letel v konštantnej výške. To znamená, že naň pôsobiaca vztlaková a tiažová sila sú v rovnováhe, resp. že $Mg - F_\mathrm{vz} = 0$. Keď na balón zosadne kŕdeľ holubov, tiažová sila sa zväčší, ale vztlaková zostane rovnaká. Balón preto začne padať k zemi. Označme hľadaný počet holubov ako N. Z Newtonovho zákona sily dostávame

$$Mg + Nmg - F_\mathrm{vz} = (M + Nm)a\,,$$

kde napravo je celková hmotnosť padajúceho balóna s holubmi. Tiažová sila samotného balóna a vztlaková sila sú však predsa rovnako veľké a vykrátia sa. Takže stačí riešiť rovnicu

$$Nmg = (M + Nm)a\,,$$

odkiaľ dostávame výsledok

$$N = \frac{Ma}{m(g-a)}\,.$$

$\boxed{20.}$ Treba si uvedomiť, že ak záchranca zatiahne za špagát smerom nahor silou F, potom aj on „oťažie“ o silu F. Podobne, ako keď dvíhame balvan, tak to cítime v nohách. Lano nad záchrancom bude teda napínané silou $mg+F$. Na druhej strane bude lano kvôli nadľahčovaniu napínané silou iba $Mg-F$. Kladka sa uvedie do pohybu, keď

$$mg + F > Mg - F\,,$$

odkiaľ pre najmenšiu potrebnú silu F dostávame $F = \frac{1}{2}(M-m)g$.

$\boxed{21.}$ Jakub stráca telesné teplo kontaktom s okolím, preto musí mať istý tepelný výkon P na udržanie telesnej teploty. Ak začne jesť studený sneh, telo ho musí ohriať na telesnú teplotu a Jakubov tepelný výkon ΔP sa musí nutne zvýšiť.

Teplo pri zohrievaní snehu je potrebné na

(i) ohriatie ľadu z teploty $-5\,°\mathrm{C}$ na teplotu $0\,°\mathrm{C}$;

(ii) premenu ľadu na vodu;

(iii) ohriatie vody z teploty $0\,°\mathrm{C}$ na $37\,°\mathrm{C}$.

Ak veličiny označíme známymi písmenkami, dostávame pre potrebné teplo

$$\Delta Q = mc_{\text{ľad}}(T_1 - T_0) + ml_{\text{topenia}} + mc_{\text{voda}}(T_2 - T_1)\,.$$

Toto teplo sa musí vyprodukovať v priebehu času $\Delta t = 0{,}5\,\mathrm{h}$. Pre zmenu tepelného výkonu preto dostávame

$$\Delta P = \Delta Q/\Delta t = \left[mc_{\text{ľad}}(T_1 - T_0) + ml_{\text{topenia}} + mc_{\text{voda}}(T_2 - T_1)\right]/\Delta t \approx 139\,\mathrm{W}\,.$$

$\boxed{22.}$ Stačí si uvedomiť zo života dobre známu skutočnosť, že zotrvačná sila pôsobiaca v rovnomerne zrýchľujúcej vzťažnej sústave je na nerozoznanie od tiažovej sily. Napríklad ak človeka zavrieme do rakety bez okien, neexistuje experiment, ktorým by vnútri rakety zistil, či jeho raketa stojí v homogénnom tiažovom poli, alebo či zrýchľuje s konštantným zrýchlením g nahor.

Všetky telesa spojené so sudom pociťujú pri jeho dvíhaní akési zdanlivé tiažové zrýchlenie $g^* = g + a$. Ak fyziku opisujeme z hľadiska tejto neinerciálnej vzťažnej sústavy, toto g^* sa objaví vo všetkých rovniciach namiesto g a to vrátane tiažovej a vztlakovej sily. Tak dostávame pre rovnováhu telesa plávajúceho v sude vo vode

$$mg^* = V_{\text{pon.}}\rho_{\text{v}}g^* \quad\longrightarrow\quad V_{\text{pon.}} = m/\rho_{\text{v}}\,,$$

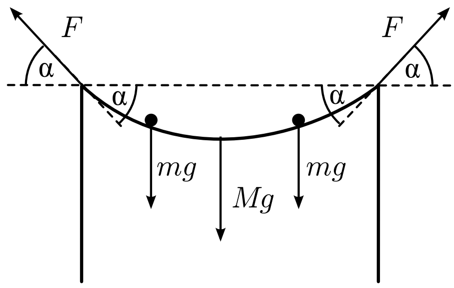
teda ponorená časť telesa nezávisí na g^*. Aj pri dvíhaní sudu budú preto ponorené dve tretiny objemu telesa.

Úloha sa dá, samozrejme, riešiť aj v sústave Zeme. Treba si však uvedomiť, že aj tu pre vztlakovú silu platí $F_{\text{vz}} = V_{\text{pon.}}\rho_{\text{v}}(g+a)$, pretože hydrostatický tlak v zrýchľujúcej kvapaline je úmerný $g + a$, nielen g. V ustálenom stave teleso zrýchľuje spolu so sudom so zrýchlením a nahor. Z Newtonovho zákona sily dostávame rovnicu

$$mg - V_{\text{pon.}}\rho_{\text{v}}(g+a) = -ma\,,$$

čo nás privedie k tomu istému výsledku. Objem ponorenej časti telesa nezávisí na zrýchlení sudu a.

$\boxed{23.}$ Nakreslíme si všetky sily, ktoré pôsobia na lano.



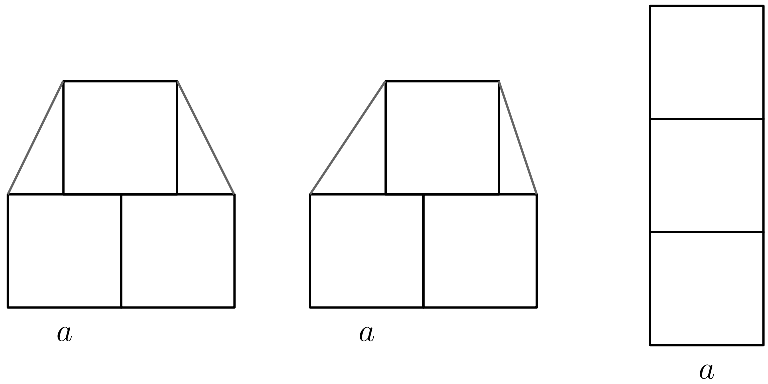
Tiažová sila pôsobiaca na lano je Mg. Jedno lano navyše drží dva kusy trolejového vedenia dĺžky d. Hmotnosť každého je $m = \lambda d$ a príslušná tiažová sila λdg. Napokon je tu sila F, ktorú chceme vypočítať. Využijeme fakt, že lano s trolejami sú v rovnováhe, tzn. že na ne pôsobiace sily sú v rovnováhe. Z rovnováhy vodorovných zložiek zisťujeme, že sila F musí byť na oboch stĺpoch rovnaká. Z rovnováhy zvislých zložiek pôsobiacich síl dostávame rovnosť

$$2F\sin\alpha = 2\lambda dg + Mg$$

a odtiaľ

$$F = \frac{\left(\lambda d + \frac{1}{2}M\right)g}{\sin\alpha}\,.$$

$\boxed{24.}$ Zrejme stačí uvažovať najtesnejšie usporiadania, aby sme neplytvali igelitom na balenie prázdneho priestoru. Po krátkom zamyslení zistíme, že stačí skúmať nasledujúce uloženia:



(1) (2) (3)

Rôznymi geometrickými argumentami sa dá odôvodniť, že uloženie (2) je menej optimálne ako uloženie (1), pretože na pokrytie bokov síce minieme igelitu rovnako veľa, ale na pokrytie obvodu minieme v prípade (2) viac. Stačí preto porovnávať uloženia (1) a (3)

Pytagorovou vetou určíme dĺžku šikmých úsekov v uložení (1) ako $s = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$. Ak obvod uloženia (1) označíme ako O, potom pre potrebnú plochu igelitu dostávame v tomto prípade

$$\begin{aligned} S_1 &= 2S_{\text{bok}} + aO \\ &= 2 \cdot \tfrac{7}{2}a^2 + a\bigl(5a + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\bigr) \\ &= \bigl(12 + \sqrt{5}\bigr)a^2 \,. \end{aligned}$$

Plochu igelitu v prípade (3) určíme veľmi jednoducho, $S_3 = 14a^2$. Keďže $\sqrt{5} > 2$, tak $S_3 < S_1$. Na zabalenie troch kusov toaletného papiera preto potrebujeme igelit o ploche najmenej $14a^2$.

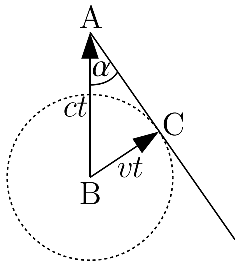
$\boxed{25.}$ Ak dáme zdroj svetla veľmi daleko od šošovky, na ňu dopadajúce lúče budú prakticky rovnobežné a všetky sa na šošovke zalomia smerom do ohniska. Potrebujeme teda určiť ohniskovú vzdialenosť takejto šošovky. Ak vezmeme známy vzťah

$$\frac{1}{f} = \frac{n_1 - n_2}{n_1}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) ,$$

kde $n_1 = 1$ je index lomu šošovky (tj. vzduchu), $n_2 = n$ je index lomu prostredia v ktorom je šošovka (tj. vody) a $r_1 = r_2 = R$ sú polomery krivosti povrchov. Keďže však $n > 1$, dostávame záporný výsledok. *Kde udělali soudruzi z NDR chybu?*

Neudělali. Takáto Šošovka je totiž rozptylka, o čom sa dá presvedčiť aj iným spôsobom. To čo odlišuje spojku a ropztylku je (okrem iného) pre svetlo potrebný čas na prejdenie šošovkou pozdĺž optickej osi a mimo nej. V prípade spojky sú lúče idúce po optickej osi omeškané viac (v prípade bežných sklených spojok, ktoré sú v strede hrubšie, musia sa tieto lúče dlhší čas pohybovať v prostredí s väčším indexom lomu, tj. menšou rýchlosťou) než lúče idúce mimo optickej osi. V prípade ropztylky je to opačne. V prípade našej šošovky prejde rýchlejšie lúč idúci po optickej osi, pretože sa najdlhší čas pohybuje prostredním s menším indexom lomu, tj. najdlhší čas sa pohybuje väčšou rýchlosťou. Naša šošovka „tvaru spojky“ je teda naozaj rozptylka a lúče sa za ňou neskoncentrujú.

$\boxed{26.}$ Keďže rýchlosť svetla je výrazne väčšia ako rýchlosť zvuku, budeme optický vnem považovať za okamžitý. Miesto, v ktorom sa nachádza pozorovateľ, označme ako A. Nech práve počuje prichádzať zvuk z miesta B vzdialeného ct. Tam sa lietadlo nachádzalo pred časom t a odvtedy sa stihlo presunúť najďalej na kružnicu s polomerom vt.



Z obrázka vidno, že uhol bude najväčší, ak sa lietadlo nachádza v bode C, v ktorom je polpriamka AC dotyčnicou ku spomínanej kružnici. Vtedy platí $\sin\alpha = v/c$.

$\boxed{27.}$ Z rovnosti gravitačnej a odstredivej sily si vyjadríme rýchlosť obehu (predpokladáme, že Zem aj „Zem“ obiehajú po kružnici).

$$GmM/R^2 = mv^2/R\,,$$
$$v = \sqrt{GM/R}\,,$$

M je hmotnosť Slnka, m hmotnosť Zeme, R vzdialenosť Zem–Slnko, G gravitačná konštanta, v rýchlosť obehu Zeme. Pomocou v si vyjadríme čas obehu

$$T = s/v = 2\pi R/v = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\,.$$

Ak si hmotnosť Slnka vyjadríme cez hustotu a polomer $M = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$, dostávame

$$T = \sqrt{\frac{3\pi R^3}{Gr^3\rho}} = 1\ \text{rok}.$$

Takto sme vyjadrili periódu obehu len pomocou škálovaných parametrov a konštánt. Ak teraz vo výsledku zameníme dĺžky $R \to \frac{1}{3}R$, $r \to \frac{1}{3}r$ a hustotu $\rho \to \frac{1}{2}\rho$, dostávame novú periódu

$$T' = \sqrt{\frac{3\pi\cdot\frac{1}{27}R^3}{G\cdot\frac{1}{27}r^3\cdot\frac{1}{2}\rho}} = T\sqrt{2} = \sqrt{2}\ \text{roka}.$$

$\boxed{28.}$ Ide o šikmý vrh, čo je pohyb zložený z rovnomerného priamočiareho pohybu vo vodorovnom smere a voľného pádu. Pre rýchlosti a súradnice platia vzťahy (tiažové zrýchlenie má smer $-y$):

$$v_x = v_0\cos\alpha\,, \qquad x = v_0 t\cos\alpha\,,$$
$$v_y = v_0\sin\alpha - gt\,, \qquad y = v_0 t\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2\,.$$

Počas pohybu nastanú dva významné okamihy. V čase výstupu t_v je súradnica y rovná H a zvislá rýchlosť nulová.

$$H = v_0 t_\mathrm{v} \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t_\mathrm{v}^2\,, \qquad 0 = v_0 \sin\alpha - g t_\mathrm{v}\,,$$

odkiaľ

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

a v čase dopadu t_d je súradnica y nulová a súradnica x rovná L.

$$0 = v_0 t_\mathrm{d} \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t_\mathrm{d}^2\,, \qquad L = v_0 t_\mathrm{d} \cos\alpha\,,$$

odkiaľ

$$L = 2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha / g\,.$$

V rovniciach pre L a H by sme sa radi zbavili neznámeho uhla α. Môžeme použiť napr. vzťah $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Z rovnice pre H si vyjadrím $\sin^2\alpha = 2gH/v_0^2$. Umocnením rovnice pre L, dosadením za funkcie uhla α a postupným upravovaním dostávame

$$\begin{aligned}
g^2 L^2 &= 4v_0^4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha\,,\\
g^2 L^2 &= 4v_0^4 \cdot 2gH/v_0^2 \cdot (1 - 2gH/v_0^2)\,,\\
\tfrac{1}{8} g L^2 / H &= v_0^2 - 2gH\,,\\
v_0 &= \sqrt{\tfrac{1}{8} g L^2/H + 2gH}\,.
\end{aligned}$$

K riešeniu sa dalo dopracovať aj inými spôsobmi, pri ktorých treba použiť iné vlastnosti goniometrických funkcií.

$\boxed{29.}$ Zrejme hľadané ťažisko bude priamo na zvislej osi. Gulička zmrzliny má ťažisko vo výške H. Kornútik má ťažisko vo výške $h = \frac{2}{3}H$, lebo si ho môžem predstaviť hranatý – ako zloženinu z uzučkých rovnoramenných trojuholníčkov s jedným vrcholom vo vrchole kornútku a základňou na časti okraja kornútika. Každý takýto trojuholníček má ťažisko vo výške $h = \frac{2}{3}H$, a teda aj celý kornútik pozostávajúci z takýchto trojuholníčkov bude mať ťažisko vo výške h. Nakoľko hranatý kornútok je pre veľký počet trojuholníčkov, na ktoré ho rozdelím, na nepoznanie od skutočného, tak aj ťažisko oblého kornútika bude vo výške h. Výsledné ťažisko je vo výške

$$y_\mathrm{T} = \frac{mh + MH}{m + M} = \frac{H(2m + 3M)}{3(m + M)}\,.$$

$\boxed{30.}$ Energia uložená v kondenzátore je rovná $\frac{1}{2}CU^2$, kde C je kapacita kondenzátora a U je napätie medzi jeho doskami. Všimnime si, že energia bude tým väčšia, čím väčšie bude napätie U. Hodnota napätia však musí byť taká, aby elektrická intenzita medzi doskami neprekročila prieraznú intenzitu vzduchu. Inak by medzi doskami preskočila iskra a kondenzátor by sa vybil.

Pre maximálne napätie U_{max} na kondenzátore teda platí

$$U_{\mathrm{max}}/d = E_{\mathrm{prieraz}} \,,$$

odkiaľ dostávame

$$U_{\mathrm{max}} = dE_{\mathrm{prieraz}} = 3\,\mathrm{kV\,mm^{-1}} \cdot 0{,}5\,\mathrm{mm} = 1{,}5\,\mathrm{kV} \,.$$

Nakoniec stačí vypočítať kapacitu kondenzátora: $C = \varepsilon_0 S/d \approx 1{,}77 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{F}$ a dosadiť do vzťahu pre energiu. Dostaneme výsledok 0,2 mJ.

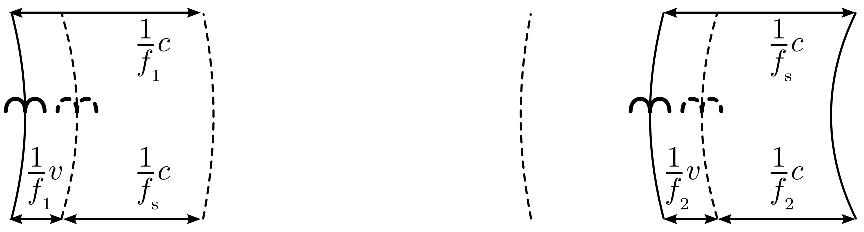
$\boxed{31.}$ Najprv porátajme frekvenciu f_s, ktorú bude počuť pozorovateľ stojaci pri stene. Na obrázku je plnou čiarou nakreslená poloha netopiera a prvej vlnoplochy v okamihu, keď ju netopier vydal. Obdobne, čiarkovanou čiarou je znázornená poloha netopiera a vlnoplôch v okamihu, keď netopier vydal druhú vlnoplochu.

Medzi vydaním prvej a druhej vlnoplochy uplynul čas $1/f_1$. Preto je vzdialenosť medzi polohou plného a čiarkovaného netopiera $1/f_1 \cdot v$ (rýchlosť netopiera sme si označili ako v). Prvá vlnoplocha za tento čas precestovala vzdialenosť $1/f_1 \cdot c$. Napokon vzdialenosť medzi vlnoplochami v smere letu netopiera bude $1/f_s \cdot c$ (k pozorovateľovi majú prichádzať vlnoplochy s frekvenciou f_s). Z prvého obrázku[1] vidno, že môžeme písať rovnosť

$$\frac{v}{f_1} + \frac{c}{f_s} = \frac{c}{f_1} \,.$$

Odtiaľ dostaneme

$$f_s = f_1 c/(c - v) \,.$$



(1) (2)

Zvuk odrazený od steny bude mať túto frekvenciu f_s. Netopier sa však pohybuje smerom k stene, preto bude počuť inú frekvenciu f_2. Vzťah medzi f_s a f_2 zistíme z nasledovnej úvahy: Pozrime sa na dve po sebe idúce vlnoplochy odrazené od steny.

Na druhom obrázku sú plnou čiarou nakreslené polohy netopiera a vlnoplôch v okamihu stretu netopiera a prvej vlnoplochy. Polohy vlnoplôch a netopiera v okamihu stretu netopiera a druhej vlnoplochy sú nakreslené čiarkovane. Medzi prvým a druhým spomínaným okamihom ubehol presne čas $1/f_2$. Za ten čas netopier preletel vzdialenosť $1/f_2 \cdot v$ a vlnoplochy sa posunuli o $1/f_2 \cdot c$. Okrem toho vieme, že vzdialenosť medzi vlnoplochami je $1/f_s \cdot c$. Preto môžeme napísať rovnosť

$$\frac{v}{f_2} + \frac{c}{f_2} = \frac{c}{f_s} \,.$$

[1] Pozor, obrázok znázorňuje iba šírenie zvuku v jednom rozmere – v smere letu netopiera.

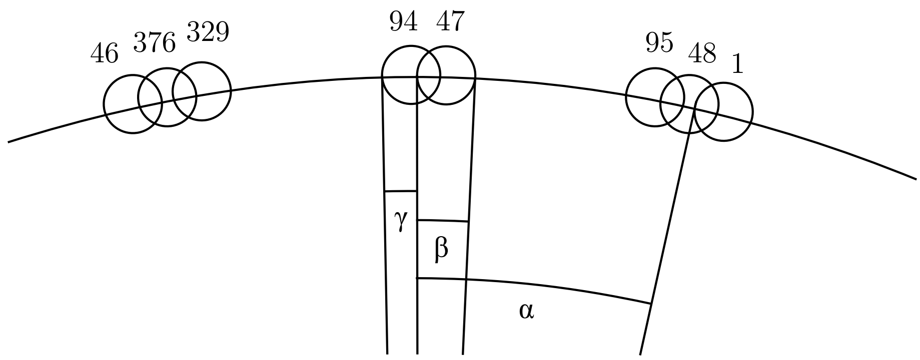
Dosadíme za f_s:

$$\frac{v+c}{f_2} = \frac{c-v}{f_1}\,.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme rýchlosť netopiera:

$$v = c(f_2 - f_1)/(f_2 + f_1)\,.$$

32. Terč sa medzi jednotlivými zásahmi pootočí o uhol $\alpha = \omega/f \approx 0{,}133\,33\,\mathrm{rad}$, čo je viac ako uhol, ktorý zaberá dierka po guľke, $\beta = 2\arcsin(r/R) \approx 0{,}031\,58\,\mathrm{rad}$. Všimnime si, že 48. guľka urobí dierku, ktorá sa prekrýva s prvou dierkou, čím zväčší túto dierku o uhol $\gamma = 2\pi\,\mathrm{rad} - 47\alpha \approx \approx 0{,}016\,52\,\mathrm{rad}$. Po siedmich otočeniach 330. guľka spojí dierky, ktoré vytvorili guľky č. 1 a 47. Nuž a 376. guľka dielo dokončí.



33. V mieste 2 je tlak vody o $\Delta p = \Delta h\rho g$ menší ako v mieste 1. Označme si rýchlosť tečenia vody v mieste 1 ako v_1, resp. ako v_2 v mieste 2.[2] Potom prietok potrubím je $Q = S_1v_1 = S_2v_2$. Pre ideálnu (neviskóznu) kvapalinu potom platí pre každú prúdnicu Bernoulliho rovnica. Nakoľko uvažujeme rovnakú rýchlosť tečenia v celom priereze potrubia, tak celý tok je jedinou prúdnicou a platí

$$\Delta p + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = \tfrac{1}{2}\rho(S_1/S_2 \cdot v_1)^2\,.$$

Prietok potrubím je

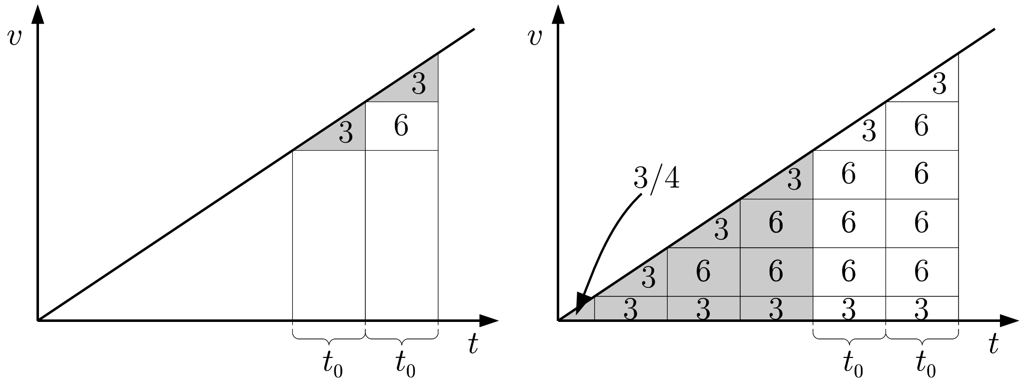
$$Q = S_1v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta hg}{S_1^2 - S_2^2}}S_1S_2\,.$$

34. Budeme uvažovať, že pre lano platí Hookov zákon, t.j., že sila pružnosti je priamo úmerná jeho predĺženiu. Potom konštanta pružnosti je $k = mg/\Delta L$. Lano natiahnuté o ΔL má energiu pružnosti $E_{\mathrm{lano}} = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2 = \frac{1}{2}mg\Delta L$. Tomáš pri zlanení stratil potenciálnu energiu $E_{\mathrm{tiaž}} = mg(L + \Delta L)$. Kinetická energia na konci i na začiatku je nulová. Lano považujeme za nehmotné. Potom celkovo klesla potenciálna energia sústavy *lano plus Tomáš* o $E_{\mathrm{tiaž}} - E_{\mathrm{lano}} = mg\big(L + \frac{1}{2}\Delta L\big)$ a práve toľko tepla sa muselo vyvinúť pri samotnom zlanení.

[2] Teda sa tvárime, že rýchlosť je v celom priereze potrubia konštantná, čo je pre turbulentné prúdenie pomerne rozumná aproximácia.

$\boxed{35.}$ Označme interval, v ktorom stroj púšťa loptičky, ako t_0. Padajúce loptičky konajú rovnaký rovnomerne zrýchlený pohyb. Zakreslime si graf rýchlosti loptičky od času padania. Využime skutočnosť, že plocha pod takýmto grafom je rovná prejdenej dráhe.

Z obrázka v zadaní vidíme, že za istý časový interval dĺžky t_0 prejde padajúca loptička výšku 24 jednotiek a za nasledujúci interval dĺžky t_0 výšku 30 jednotiek, čo je o 6 jednotiek viac. To možno graficky zakresliť ako to znázorňuje ľavý z nasledujúcej dvojice obrázkov.



Takto sme úlohu zvrtli na jednoduché počítanie obsahov. Stačí zistiť, akú dráhu prešla padajúca loptička pred prvým intervalom dĺžky t_0, tj. obsah zašedeného trojuholníka na pravom obrázku. Dokresľovaním rovnakých obdĺžnikov, resp. trojuholníkov ľahko dopočítame, že táto dráha je rovná $36 + \frac{3}{4}$ jednotiek. Ak ešte odpočítame 12 jednotiek zachytených na fotografii, zisťujeme, že otvor na púšťanie loptičiek sa nachádza vo výške $24 + \frac{3}{4}$ nad horným okrajom fotografie.

$\boxed{36.}$ Označme si odpory jednotlivých rezistorov ako X, Y a Z. Odpory namerané u dvoch paralelne zapojených rezistorov označme ako A, B a C. Platí

$$A^{-1} = X^{-1} + Y^{-1}\,,$$
$$B^{-1} = Y^{-1} + Z^{-1}\,,$$
$$C^{-1} = Z^{-1} + X^{-1}\,.$$

My by sme chceli vedieť, aký odpor R nameriame, ak zapojíme paralelne všetky tri rezistory A, B, C naraz. Vtedy platí

$$R^{-1} = X^{-1} + Y^{-1} + Z^{-1}\,.$$

Všimnime si, že ak jednoducho sčítame tri rovnice pre odpory A, B a C, dostávame

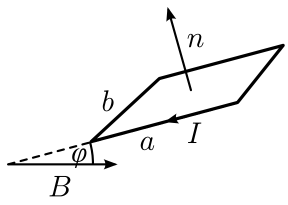
$$A^{-1} + B^{-1} + C^{-1} = 2(X^{-1} + Y^{-1} + Z^{-1})\,.$$

Z posledných dvoch rovníc dostávame

$$R^{-1} = \tfrac{1}{2}(A^{-1} + B^{-1} + C^{-1})\,,$$
$$R = 2/(A^{-1} + B^{-1} + C^{-1}) \approx 26{,}67\,\Omega\,.$$

Mimochodom, skúste si zrátať (alebo aspoň overiť), že tri Kubusove rezistory majú odpor $48\,\Omega$, $80\,\Omega$ a $240\,\Omega$.

$\boxed{37.}$ Najprv si spočítajme, aký moment sily bude pôsobiť na jednu prúdovú slučku v magnetickom poli B. Majme situáciu ako na obrázku: slučka v tvare obdĺžnika so stranami a a b, slučkou tečie prúd I, uhol medzi stranami slučky s dĺžkou a a smerom magnetického poľa je uhol φ.

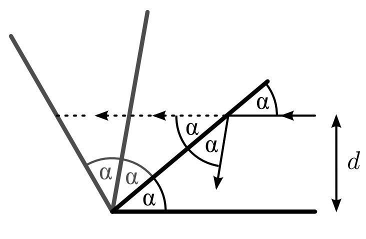


Všimnime si, že príspevky do celkového momentu sily od prednej a zadnej časti slučky sa navzájom vyrušia. Príspevky od vrchnej a spodnej časti budú rovnako veľké a budú otáčať slučku v tom istom smere, takže sa sčítajú.

Stačí teda spočítať moment sily pôsobiaci na vrchnú stranu obdĺžnikovej slučky. Sila pôsobiaca na drôt dĺžky b, ktorým prechádza prúd I a je umiestnený v magnetickom poli B, je rovná BIb a má smer nahor. Jednoduchou úvahou prídeme na to, že zložka tejto sily kolmá na rovinu slučky bude mať veľkosť $BIb\cos\varphi \approx BIb$.[3]. Preto príspevok do momentu sily od vrchnej časti slučky bude $\frac{1}{2}BIab$. Celkový moment sily (teda moment sily od spodnej a vrchnej časti) teda bude mať veľkosť $BIab = BIS$ a bude slučku otáčať v protismere hodinových ručičiek. Pre N-závitovú cievku bude samozrejme výsledok N-krát väčší: $BISN$.

Na cievku v zadaní pôsobí okrem práve porátaného momentu sily ešte moment sily od pružín. Cievka bude vychýlená do takej polohy, aby bol na ňu pôsobiaci výsledný moment sily nulový: $BISN - k\varphi = 0$. Odtiaľ dostávame $\varphi = BISN/k$. Ručička je pevne spojená s cievkou, takže aj ona sa vychýli o uhol φ, ktorý sme práve vypočítali.

$\boxed{38.}$ Všimnime si najprv, že ak by bol uhol $\alpha \geq 90\,^\circ$, tak lúč by preletel v najmenšej vzdialenosti práve d od spojnice zrkadiel. Načrtnime si situáciu $\alpha < 90\,^\circ$: Lúč „narazí“ do zrkadla, zmení svoj smer o 2α a smeruje k druhému zrkadlu. Túto sekundárnu úlohu môžeme *s výhodou* riešiť v obraze prvého zrkadla. V tomto totiž lúč jednoducho pokračuje ďalej a druhé zrkadlo sa zobrazí tiež jednoducho, viď. obrázok.



Zrejme vzdialenosť, na ktorú sa najbližšie dostane lúč ku spojnici zrkadiel je rovnaká aj v tomto obraze a môžeme zabudnúť na pôvodnú úlohu a riešiť iba sekundárnu úlohu v obraze

[3]Predpokladáme, že slučka bude vychýlená len o malé uhly, preto sme použili priblíženie odporúčané v zadaní.

prvého zrkadla. V tomto obraze „narazí“ lúč do druhého zrkadla a urobíme rovnakú fintu: úlohu prevedieme na terciárnu úlohu v obraze druhého zrkadle v obraze prvého zrkadla. Zrejme teda lúč preletí najbližšie ku spojnici zrkadiel vo vzdialenosti práve d zo zadania.

39. Najprv sa zamyslime, prečo by mala byť trubica odplavená preč. Viskózne vlastnosti vody zanedbávame, takže v tomto prípade je odpoveď, ktorá používa ako argument viskózne trenie, nesprávna. A to i napriek tomu, že viskozita vody väčšinou vysvetľuje, prečo napríklad veci plávajú s prúdom rieky.

Správna odpoveď je nasledovná: do trubice prúdi voda cez väčší otvor S_1 rýchlosťou v. Aby sa v trubici nič nehromadilo, všetka vtečená voda bude z trubice vytekať cez neponorený menší otvor S_2. Všimnime si, že smery rýchlostí vtekajúcej a vytekajúcej vody sú opačné. V trubici muselo teda dôjsť k zmene hybnosti vody. Hybnosť sa ale nemení sama od seba, na to treba silu: trubica musí na vodu pôsobiť silou, aby voda zmenila svoju hybnosť. Vďaka zákonu akcie a reakcie ale vieme, že ak trubica pôsobí na vodu, tak voda pôsobí na trubicu rovnako veľkou silou v opačnom smere. Toto je tá sila, ktorá nás zaujíma.

Teraz to poďme porátať. Sila je úmerná zmene hybnosti za čas. Vyjadríme si preto hybnosti vtekajúcej a vytekajúcej vody z trubice a zo zmeny hybnosti zistíme veľkosť sily.

Za čas Δt do trubice vtečie voda o objeme $v\Delta t S_1$. Jej hmotnosť bude $v\rho\Delta t S_1$ a jej hybnosť bude $p_1 = v^2\rho\Delta t S_1$. Ak označíme rýchlosť vytekajúcej vody ako v_2, objem vytečenej vody za čas Δt bude $v_2\Delta t S_2$. Jej hmotnosť bude $v_2\rho\Delta t S_2$ a jej hybnosť bude $p_2 = v_2^2\rho\Delta t S_2$. Sila pôsobiaca na trubicu bude

$$F = \Delta p/\Delta t = (p_2 + p_1)/\Delta t = v_2^2\rho S_2 + v^2\rho S_1\,.$$

Ešte treba zistiť rýchlosť vytekajúcej vody v_2. Použijeme skutočnosť, že množstvo vody, ktoré za čas Δt vtieklo, musí za čas Δt aj odtiecť: $v\Delta t S_1 = v_2\Delta t S_2$. Odtiaľ máme $v_2 = S_1/S_2\cdot v$.

Vzťah pre rýchlosť dosadíme a dostávame výsledok

$$F = v^2\rho S_1(S_1 + S_2)/S_2\,.$$

40. Spomeňme si na Hookov zákon $\sigma = E\varepsilon$. Na ľavej strane je ťahové napätie σ, ktoré sa v prípade voľne visiacej tyče mení (smerom nahor narastá). Preto bude aj relatívne predĺženie ε v rôznych častiach tyče rôzne.

Zaveďme si na tyči súradnicu y, ktorá popisuje vzdialenosť jej jednotlivých častí od jej dolného konca v nenatiahnutom stave. Pre napätie v mieste y potom môžeme napísať

$$\sigma(y) = \frac{F(y)}{S} = \frac{mg}{SL}y$$

a relatívne predĺženie v rôznych častiach tyče je

$$\varepsilon(y) = \frac{\sigma(y)}{E} = \frac{mg}{ESL}y\,.$$

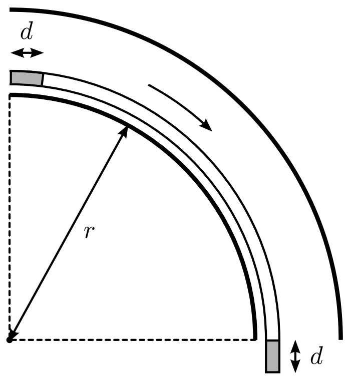
Všimnime si, že relatívne predĺženie tyče závisí lineárne od polohy y. Len vďaka tomu možno zaviesť priemerné relatívne predĺženie

$$\varepsilon_{\text{priem.}} = \tfrac{1}{2}\big[\varepsilon(0) + \varepsilon(L)\big] = \frac{mg}{2ES}\,,$$

pomocou ktorého vyjadríme celkové predĺženie tyče ako

$$\Delta L = \varepsilon_{\text{priem.}} L = \frac{mgL}{2ES}\,.$$

$\boxed{41.}$ Označíme si dĺžkovú hustotu špagátu ako λ. Použijeme metódu imaginárneho posunutia – nech sa špagát v rúrke zošmykne o nejakú maličkú dĺžku x pozdĺž rúrky. Zmena jeho potenciálnej energie je potom $\Delta U = rg\lambda x$; môžem si to predstaviť tak, že kúsoček špagátu dĺžky x bol preložený o výšku r nižšie. Keď sa teda špagátik zošmykne o x nižšie, tak bude mať kinetickú energiu $E_{\text{kin}} = \Delta U$, ktorú mu udelila sila F na dráhe x.[4] Z rovnosti $\Delta U = Fx$ dostávame hneď $a = F/m = 2g/\pi$, kde sme využili $m = \frac{1}{2}\lambda r\pi$.



$\boxed{42.}$ Skúmajme malý objemový element vzduchu, ktorým prechádza zvuková vlna. Ten sa periodicky stláča a rozpína. Keďže tento dej prebieha veľmi rýchlo, kúsok vzduchu si nestíha so svojím okolím vymieňať teplo. Ide teda o adiabatický proces, pri ktorom $pV^\kappa =$ konšt.

Nás zaujíma vzťah medzi tlakom a teplotou. Objem z rovnice eliminujeme, ak využijeme stavovú rovnicu $V = NkT/p$. Takto dostaneme

$$p^{\kappa-1}T^\kappa = \text{konšt.},$$

kde konštanta na pravej strane sa od tej prvej líši o Nk. Jej hodnota však pre nás nie je nijako dôležitá.

Označme si amplitúdu tlaku ako Δp a teploty ako ΔT. Má platiť

$$(p + \Delta p)^{\kappa-1}T^\kappa = p^{\kappa-1}(T + \Delta T)^\kappa\,.$$

[4] Sila F nepôsobí v jedinom bode, ale je rozložená pozdĺž celého špagátu. Rozmyslite si, že sila F, aby ďalšie úvahy dávali zmysel, je súčtom dotyčnicových zložiek síl pôsobiacich na špagát.

Ak obe strany rovnice predelíme výrazom $p^\kappa T^\kappa$, postupnými úpravami dostávame

$$\begin{aligned}(1+\Delta p/p)^{\kappa-1} &= (1+\Delta T/T)^\kappa\,,\\ 1+(\kappa-1)\Delta p/p &= 1+\kappa\Delta T/T\,,\\ \Delta T &= \frac{T(\kappa-1)\Delta p}{\kappa p}\,,\end{aligned}$$

kde sme v prvej úprave využili nápovedu zo zadania, že pre $|x| \ll 1$ platí $(1+x)^n \approx 1+nx$ a druhou úpravou sme už získali hľadanú amplitúdu teploty. Po dosadení číselných hodnôt dostávame $\Delta T \approx 1{,}7\cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}$,

$\boxed{43.}$ Ak si spomenieme ako sa skladajú relativistické rýchlosti, tak máme vyhrané. Ak z inerciálnej vzťažnej sústavy 1 (IVS1) pozorujem systém IVS2 s rýchlosťou v a v IVS2 pozorujem IVS3 s rýchlosťou u, tak potom vzájomná rýchlosť IVS1 a IVS3 je $w = (v+u)(1+vu/c^2)^{-1}$. Pre náš prípad aplikujme tak, že IVS1 je kozmická loď, IVS2 je Zem a IVS3 je loptička. Potom $v = -\frac{4}{5}c$ a $u = \frac{9}{10}c$ a $w = \frac{5}{14}c$ je rýchlosť loptičky voči rakete. Predpokladáme, že loptička je o mnoho ľahšia ako raketa a teda pružný odraz znamená rýchlosť $-w$ po odraze voči rakete. Voči Zemi to vypočítame jednoducho, zoberieme ako IVS1 Zem, ako IVS2 raketu a ako IVS3 loptičku po odraze. Vyjde nám $u_{\text{odrazená}} = 0{,}62c$.

$\boxed{44.}$ Zaveďme si veličinu $\omega = V/V_0$, kde V_0 je počiatočný a V je aktuálny objem vody v nádobe. ω je teda bezrozmerná veličina, ktorá popisuje, aký zlomok objemu vody zostal v nádobe. Poďme teraz skúmať, ako sa zmení ω pre menšiu a väčšiu nádobu za rovnaký časový interval Δt. Ak má voda v nádobe výšku h, jej výtoková rýchlosť je $v = \sqrt{2gh}$. Prietok Q je úmerný výtokovej rýchlosti a prierezu dierky S. Zmena objemu ΔV po uplynutí časového intervalu Δt bude $Q\Delta t \sim S\sqrt{2gh}\cdot\Delta t$. Percentuálna zmena objemu $\Delta\omega$ bude $\Delta V/V_0 \sim S\sqrt{2gh}\cdot\Delta t/V_0$. Ľahko teraz nahliadneme, že ak každý rozmer nádoby zväčšíme k-krát, $\Delta\omega$ sa $\sqrt{k}$-krát zmenší. Ak chceme, aby bola percentuálna zmena objemu rovnaká pre obe nádoby a z menšej nádoby necháme vodu vytekať čas Δt, z väčšej nádoby musíme nechať vytekať vodu $\sqrt{k}$-krát dlhšie.

„Rozkúskujme" proces vytekania z menšej nádoby na krátke časové úseky o dĺžke Δt a z väčšej nádoby na časové úseky o dĺžke $\sqrt{k}\cdot\Delta t$. Všimnime si, že počas každého z úsekov odtečie z každej nádoby rovnaké percento objemu vody. Preto na úplné vyprázdnenie oboch nádob bude treba rovnako veľa časových úsekov zvolenej dĺžky. Celkový čas potrebný na vyprázdnenie väčšej nádoby teda bude $\sqrt{k}$-krát dlhší.

$\boxed{45.}$ Jakubove tepelné straty $\Delta Q/\Delta t$ do okolia sú priamo úmerné rozdielu teplôt T_1, T_2 Jakubovho tela a okolia. V stave tepelnej rovnováhy sa tepelné straty kompenzujú tepelným výkonom tela P, teda platí

$$P = \varrho(T_1 - T_2)\,,$$

kde ϱ je neznáma konštanta úmernosti vyjadrujúca kvalitu Jakubovho oblečenia, spacáku a snehovej pokrývky.

Keď Jakub začne jesť sneh, časť tepelného výkonu minie na zohrievanie ľadu na telesnú teplotu. Tepelné straty do okolia nebude dobre kompenzovať, kvôli čomu jeho telesná teplota klesne a ustáli sa na nižšej hodnote T', ktorú chceme určiť. V novej rovnováhe bude platiť

$$P - \Delta P = \varrho(T' - T_2)\,,$$

kde ΔP je výkon potrebný na zohrievanie ľadu z teploty T_2 na teplotu T'. Ten sme určili v úlohe 8 ako

$$\Delta P = \left[mc_{\text{ľad}}(T_0 - T_2) + ml_{\text{topenia}} + mc_{\text{voda}}(T' - T_0)\right]/\Delta t = A + BT' ,$$

kde sme zaviedli substitúcie

$$\begin{aligned} A &= (-mc_{\text{ľad}}T_2 + ml_{\text{topenia}})/\Delta t \approx 95{,}7\,\mathrm{W} , \\ B &= mc_{\text{voda}}/\Delta t \approx 1{,}17\,\mathrm{W\,°C^{-1}} , \end{aligned}$$

a využili, že $T_0 = 0$°C.

Ak z rovníc pre tepelný tok eliminujeme neznámu konštantu ϱ a dosadíme za ΔP, postupnými úpravami dostávame

$$\begin{aligned} (P - \Delta P)(T_1 - T_2) &= P(T' - T_2) , \\ PT_1 - (A + BT')(T_1 - T_2) &= PT ,' \\ PT_1 - A(T_1 - T_2) &= T'\left[P + B(T_1 - T_2)\right] , \\ T' &= \frac{PT_1 - A(T_1 - T_2)}{P + B(T_1 - T_2)} \\ &\approx 7{,}7\,°\mathrm{C} . \end{aligned}$$

To je dosť nepríjemná vec. Jakub sa preto v snahe zvýšiť svoj tepelný výkon bude poriadne klepať od zimy.

$\boxed{46.}$ *Prejsť okruh za čo najkratší čas* zrejme znamená *vybrať si správny polomer ρ ($\rho > r$) točenia zákruty.* Pri danom polomere točenia ρ sme obmedzení v maximálnej rýchlosti $v(\rho)$ neprešmykovaním kolies, tj. podmienkou

$$\begin{aligned} F_{\text{odstredivá}} &= F_{\text{trecia}} , \\ mv^2(\rho)/\rho &= mgf , \\ v(\rho) &= \sqrt{gf\rho} . \end{aligned}$$

Ak si zvolíme polomer točenia ρ, dĺžka okruhu je $8r + 2\pi\rho$. To prejdeme konštantnou rýchlosťou $v(\rho)$ za čas

$$T(\rho) = \frac{8r + 2\pi\rho}{v(\rho)} = \frac{8r}{\sqrt{gf\rho}} + 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{gf}} .$$

Potrebujeme nájsť minimum funkcie $T(\rho)$. Niektorí z vás by ho vedeli nájsť pomocou derivácií. My si ukážeme šikovnejší postup pomocou tzv. „AG nerovnosti“ (tj. nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom). Podľa nej $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+ : x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1x_2}$, pričom rovnosť nastáva ak $x_1 = x_2$.

Po aplikovaní na náš problém dostávame

$$T(\rho) = \frac{8r}{\sqrt{gf\rho}} + 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{gf}} \geq 2\sqrt{\frac{16\pi r}{gf}} ,$$

pričom rovnosť nastáva pokiaľ

$$\frac{8r}{\sqrt{gf\rho}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{gf}}\,,$$
$$\rho = \frac{4}{\pi}r\,,$$

čo je viacej ako r, tj. takáto dráha je na okruhu skutočne realizovateľná. Najmenší čas, za ktorý sa dá okruh prejsť, je

$$T = 8\sqrt{\frac{\pi r}{gf}}\,.$$