



## Fyzikálny korešpondenčný seminár 27. ročník, 2011/2012

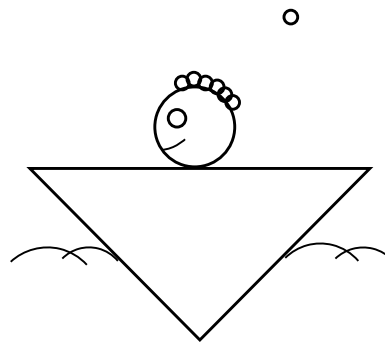
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava  
e-mail: otazky@fks.sk web: <http://fks.sk>

### Zadania 2. kola zimnej časti 2011/2012

Termín: 28. 11. 2011

#### B0 – Polikova plavba II (9 bodov)

Polik sa opäť vybral na plavbu okolo sveta. Tentokrát si zvolil plavidlo tvaru hranola, ktorý má ako podstavu pravouhlý trojuholník. Náčrt plavidla môžete vidieť na obrázku. Keď Polik nastúpil do loďky, ponor bol 0,8 metra. Keď k nemu pristúpila Bum, ponor sa zvýšil na jeden celý meter. Ak viete, že Polik váži 80 kíl, dokážete určiť Buminu hmotnosť?

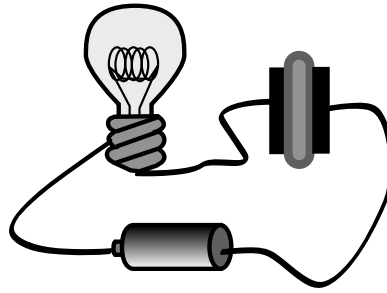


Obr. 1: Polikova loď

#### B1 – Kondík (9 bodov)

Lukáš sa vo voľnom čase rád hrá so svojou stavebnicou. Nedávno v nej našiel kondík – taká veľmi zaujímavá súčiastka. Tvoria ho dve platne v malej vzdialenosti od seba, ktoré sú oddelené nejakým izolantom, takže cez ne nemôže tiecť prúd. Napriek tomu, keď taký kondík zapojíte do obvodu s baterkou a žiarovkou, žiarovka sa na chvíľu rozsvieti a potom zhasne. Následne, keď batériu odpojíte a obvod spojíte, žiarovka sa opäť na chvíľu rozsvieti a opäť zhasne. Toto blikavé potešenie dokázalo zabávať Lukáša pomerne dlhú dobu, neskôr si však, ako správny fyzik, začal klásť otázku: „Sto striel hrmených, prečo to tak funguje? Veď cez ten kondík nemôže tiecť prúd, keď je tam izolant!“ Viete Lukášovi vysvetliť, ako je možné, že obvodom tečie prúd napriek tomu, že platne kondíku nie sú vodivo spojené?





Obr. 2: Schéma zapojenia

**B2 – Pneumatika (9 bodov)**

Typický pretlak vzduchu v pneumatike osobného auta sú tri atmosféry (tj. v pneumatike je o tri atmosféry väčší tlak ako mimo nej). Bežné auto váži dve tony. Na základe týchto údajov sa pokúste odhadnúť plochu, ktorou sa koleso dotýka vozovky. Dostali ste uveriteľné hodnoty? Porovnajete na nejakom aute v okolí.

**B3, A1 – Biliard (9 bodov)**

Marika sa učí hrať biliard a aby jej to šlo ľahšie, hrá na nekonečnom biliardovom stole. Taký stôl nemá hrany ani rohy a jediná šanca, ako sa pobaviť, je odrážať gule od seba navzájom. Najnovšia Marikina zábavka je rozostaviť gule (všetky samozrejme rovnaké) a do jednej ťuknúť tágom tak, aby sa *pohla*, poodrážala od ostatných gulí a vrátila na pôvodné miesto. Koľko najmenej gulí Marika potrebuje na uskutočnenie tohto plánu a ako ich treba rozostaviť? Ak sa prvá guľa okamžite po udretí tágom pohybovala rýchlosťou  $v$ , akou najväčšou rýchlosťou sa môže vracieť späť na svoje miesto? Pri riešení uvažujte, že všetky zrážky sú dokonale pružné, koeficient trenia medzi stolom a guľami je nekonečný a koeficient trenia medzi guľami navzájom je nulový.

**B4, A2 – Nevoľný pád (9 bodov)**

Frico našiel na povale starú knihu od pánov Landaua a Lifšica. Ako si ju tak čítal, zaujalo ho, že sa v knihe rieši problém padajúceho telesa bez zanedbania odporu vzduchu. Frico sa potešil a začal rátať, o koľko spadne kilová olovená guľa za čas  $t$  po tom, ako ju vyhodí (pustí) z okna. Zrátal túto úlohu deväťkrát a vždy dostal iný výsledok. Pomôžte mu vyradiť výsledky, ktoré sú určite nesprávne.

- |                                |   |
|--------------------------------|---|
| (i) $1/2gt^2$                  | (vi) $(g/k^2)(kt + \exp(-kt))$                        |
| (ii) $1/3gt^2$                 | (vii) $(g/k^2)(2kt + \exp(-kt) - 1)$                  |
| (iii) $kg t^2$                 | (viii) $\frac{1}{2}(g/k^2)(\exp(kt) + \exp(-kt) - 2)$ |
| (iv) $gt(t - 1/k)$             | (ix) $(g/k^2)(kt \exp(-k^2 t^2) + \exp(-kt) - 1)$     |
| (v) $(g/k)(t + \exp(-kt) - 1)$ |   |

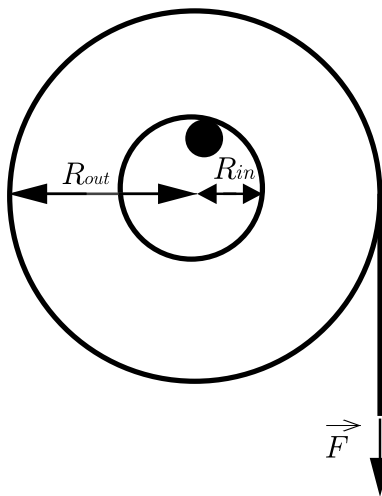
Výsledky udávajú dĺžku, o ktorú guľa spadne za čas  $t$ ,  $k$  je nejaká špecifická konštanta závislá od vlastností Fricovej gule a parametrov vzduchu.

**A3 – Autoloď (9 bodov)**

Koľko minimálne energie musí spáliť auto hmotnosti  $m$  stojace na lodi hmotnosti  $M$ , aby sa začalo vzhľadom na loď pohybovať rýchlosťou  $v$ ?

**A4 – Toaleťák (9 bodov)**

Na matfyzáckych záchodoch majú obrovské toaleťáky. Tak veľké, že občas je problém odmotiť si pásik bez toho, že by sa roztrhol. Inu, spočítajme si potrebnú silu sami. Hmotnosť toaleťáku je  $M$ , vonkajší polomer toaleťáku  $R_{out}$ , vnútorný polomer  $R_{in}$ . Toaleťák je upevnený na drevku valcového tvaru s polomerom  $r$  a koeficient trenia medzi drevkom a kotúľkou je  $f$ . Akou najmenšou silou musím ťahať, aby sa toaleťák rozkrútil?



Obr. 3: Toaletný papier

## Zadania 3. kola zimnej časti 2011/2012

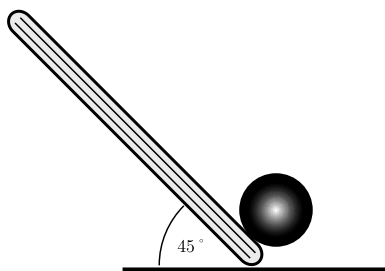
Termín: 12. 12. 2011

**B0 – RGB (9 bodov)**

Keď zmiešame svetlo modrej, zelenej a červenej farby, výsledkom je biela. Keď však to isté spravíme s pastelkami, bielu nedostaneme. Viete to vysvetliť?

**B1 – Squash (9 bodov)**

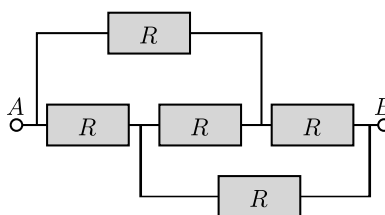
Peťo rád hrá squash. Najradšej v kockovej miestnosti s hranou  $a$ . Momentálne stojí v strede miestnosti, keď odpáli loptičku tesne nad zemou pod uhlom  $45^\circ$  od zeme (pozri obrázok). Loptička sa následne odrazí od prednej steny, od zadnej steny a ešte raz od prednej steny, až nakoniec skončí v pravom zadnom rohu miestnosti. Akú počiatočnú rýchlosť udal Peťo loptičke?



Obr. 4: Peťov squash

**B2 – Ľúbezné odpory (9 bodov)**

Určte odpor medzi bodmi  $A$  a  $B$  na obrázku.



Obr. 5: Odporná schéma

**B3, A1 – Budiška (9 bodov)**

Odmerajte, aký najväčší tlak sa dokáže vytvoriť vo fľaške Budišky, keď ňou poriadne zatrasiete.

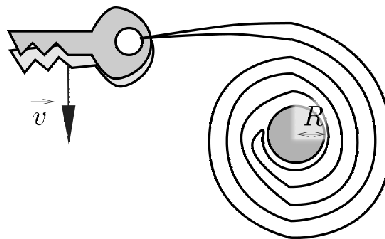
**B4, A2 – Bucatiny (9 bodov)**

Peťo si na intráku veľmi často varí bucatiny. Pri varení využíva zaujímavý spôsob, ktorý tu však popisovať nebudeme. Po dovarení sa bucatiny zmiešajú s kupovanou omáčkou a pridá sa

nastrúhaný syr. Peťo je ale zábudlivý a vždy si spomenie, že syr treba strúhať, až keď sú už bucatiny hotové. Akú stratégiu má zvoliť, ak chce, aby výsledné jedlo bolo čo najteplejšie? Má omáčku zmiešať s bucatinami a potom začať strúhať syr, alebo najskôr začať strúhať syr a všetko zmiešať dokopy až na záver? Svoju odpoveď Peťovi vysvetlite.

### A3 – Samove kľúče (9 bodov)

Samo sa často mimovoľne hrá s predmetmi okolo seba. Z tohto dôvodu si kúpil všedolný mobilný telefón, ten už za svoj krátky život zažil mnoho pádov. O ňom však nie je táto úloha. Samo sa veľmi rád hrá s Marikinmi kľúčmi na šnúrke. Roztočí si kľúče okolo prsta a čaká (ďalej už neroztáča), kým mu do neho vrazia. Určte, akou rýchlosťou sa kľúče pohybujú tesne pred nárazom ak poznáte dĺžku šnúrky, hrúbku prsta (aproximujte valcom) a počiatočnú rýchlosť, ktorú Samo kľúčom udelil.



Obr. 6: Kľúče

### A4 – Hodinky (9 bodov)

Bzdušo odhodil svoje hodinky rýchlosťou  $v$  blízkou rýchlosti svetla. Teraz ich sleduje cez ďalekohľad. Koľkokrát za minútu vidí pohnúť sa sekundovú ručičku?

## Vzorové riešenia 1. kola zimnej časti 2011/2012

### 1.1 B0 – Kúzelný deduško kupuje auto (opravoval Miso, vzorák Miso)

Kúzelný deduško sa rozhodol po mnohých rokoch v rozprávkach modernizovať svojho tátoša a vymenil ho za trabanta. Jeho nový trabant má päť prevodových stupňov, motor, ktorý zvláda pracovať na otáčkach od tisíc po dvetisíc a maximálna rýchlosť na prvom prevodovom stupni je desať kilometrov za hodinu. Na základe týchto údajov urobte čo najlepší horný odhad maximálnej rýchlosti auta kúzelného deduška.

Na základe údajov v zadaní máme určiť *horný odhad* maximálnej rýchlosti auta. To znamená, že máme vymyslieť taký model auta, ktorý spĺňa požiadavky zo zadania a spomedzi najvyšších rýchlostí všetkých mysliteľných spĺňajúcich zadanie je jeho najvyššia rýchlosť najvyššia.<sup>1</sup>

Motor auta roztáča hriadeľ, a ten pomocou ozubených prevodov roztáča kolesá auta. Rôznym počtom zubov na kolesách a na hriadeli je zabezpečená rôzna rýchlosť otáčania sa kolies a motora, a to v pomere počtu zubov. Pri samotnom preradení sa tento pomer zmení tým, že sa jedno ozubené koliesko vymení za druhé, a tým sa zmení aj pomer otáčok motora a kolies auta.

Počas preradovania sa nemôže zmeniť rýchlosť auta (auto nedokáže zrýchliť ani spomaliť za taký krátky čas). Čo sa mení, sú preto otáčky motora, a nie otáčky kolies. Zamyslime sa preto, ako bude fungovať auto, ktoré nám umožní dosiahnuť čo najvyššie otáčky kolies, a teda aj rýchlosť.

Na prvom prevodovom stupni pri 2000 rpm ide auto rýchlosťou 10 km/h. Pri preradení klesnú otáčky na 1000 rpm (nižšie nemôžu). Auto na druhom stupni postupne zrýchľuje na maximálne otáčky a dosiahne rýchlosť 20 km/h. Toto sa opakuje aj na treťom, štvrtom a piatom stupni. Auto takto zdvojnásobí svoju rýchlosť celkom štyrikrát a dosiahne výslednú maximálnu rýchlosť:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 \text{ km/h} = 160 \text{ km/h}$$

Mnohí z vás si povedali, že údaje v zadaní nie sú dostačujúce a zistili si rôzne údaje z internetu. Tým pádom riešili inú úlohu, ktorá, aj keď bola správne vyriešená, nemohla byť ocenená plným počtom bodov. Žiadne ďalšie väčšie problémy sa nevyskytli.

### 1.2 B1 – Ako Tinka vo vode (opravoval Maťo Ch, vzorák Maťo Ch)

Tinka je ako ryba – nerada chodí po súši, radšej pláva vo vode. Sedí si pri jabloni na jednom brehu rieky a dostala chuť na čerešne – presne oproti jabloni na druhom brehu rieky. Zistite s presnosťou na jeden meter, ako najbližšie sa vie dostať k čerešni bez toho, aby spravila čo i len krok po súši, ak poznáte nasledovné údaje:

- Tinka pláva rýchlosťou 3 km/h;
- voda v rieky sa pohybuje rýchlosťou 5 km/h;
- čerešňa je presne oproti jabloni vzhľadom na rieku;
- rieka je široká 300 m.

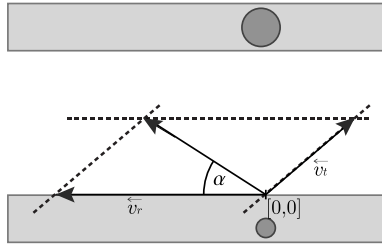
<sup>1</sup>Túto vetu si čítajte dovtedy, kým jej neporozumiete.

V tomto príklade bolo treba vyriešiť dva problémy:

1. nájsť rovnicu, ktorá popisuje náš problém,
2. zistiť, pre ktoré hodnoty premenných nám dáva najmenšiu hodnotu vzdialenosti Tinky od čerešne.

Po chvíli zamyslenia prídeme na to, že Tinka sa oplatí plávať stále rovnakým smerom. Rieka je totiž všade rovnaká. Úlohou teda ostáva určiť optimálny smer, ktorým má Tinka vyplávať. Pokúsime sa preto nájsť rovnicu popisujúcu vzdialenosť Tinky od čerešne po preplávaní rieky v závislosti od smeru, ktorým Tinka vyplávala.

Aby sme mohli túto rovnicu nájsť, musíme najprv pochopiť, ako sa pohybuje Tinka vzhľadom na breh, keď pláva v tečúcej rieke. Keby neplávala a iba by sa nechala unášať riekou, mala by rýchlosť  $v_t$  rovnú rýchlosti vody v rieke  $v_r$ . Keďže však ešte sama v rieke pláva, jej výsledná rýchlosť v smere rovnobežnom s brehom bude súčtom (resp. rozdielom) rýchlosti vody v rieke a jej rýchlosti v tomto smere, viď obr.:



Obr. 7: Tinka v tom vie plávať.

Na základe tejto úvahy môžeme zostaviť sústavu rovníc popisujúcu polohu Tinky v čase doplávania:

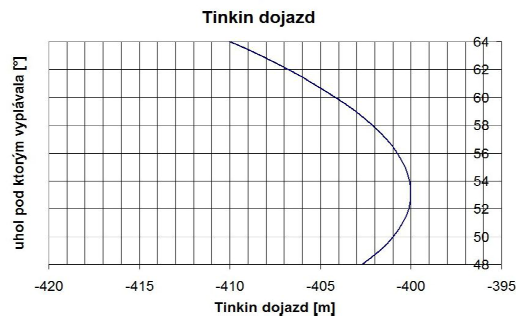
$$\begin{aligned}x &= (v_t \cos \alpha - v_r)t \\l &= (v_t \sin \alpha)t\end{aligned}$$

Vyjadrením času z druhej rovnice a dosadením do prvej dostávame pre závislosť  $x$  od  $\alpha$  vzťah:

$$x = l / \operatorname{tg} \alpha - \frac{lv_r}{v_t \sin \alpha} \quad (1)$$

Juchú! Máme rovnicu, ktorá nám vraví, kam Tinka dopláva, ak vieme, pod akým uhlom vypláva. Tým sme vyriešili problém 1. z úvodu vzoráku a môžeme sa teda pustiť do riešenia problému 2.

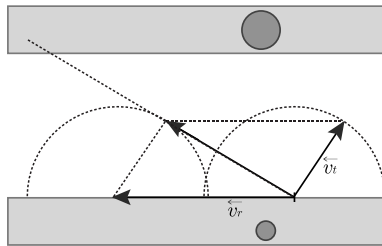
Treba nájsť také  $\alpha$ , po dosadení ktorého do rovnice (1) nám vyjde najmenšie  $x$ . Jeden spôsob, ako takéto  $x$  nájsť, je nakresliť si graf závislosti  $x$  od  $\alpha$  (napr. v programe *LibreOffice Calc*), pozrieť sa kde má približne funkcia minimum a potom zazoomovať graf natoľko, aby sme dostali presnosť požadovanú zadaním. Správna hodnota je 400 m, ako môžete vidieť na grafe:



Obr. 8: Kam dopláva?

**Poznámky k riešeniam:** Ak dáte do riešenia graf, ktorý má dieliky po 100 m, určite tým, že v takomto dieliku má funkcia minimum, nedosahujete presnosť 1 m. Keď však pošlete graf s dielikmi 1 m, ktorý zobrazuje minimum funkcie, je to už OK. Tentokrát som za to body nestrhával ale nabudúce si na to dajte pozor.

Niektorí z vás prišli aj na geometrické riešenie úlohy pomocou nasledujúceho obrázka:



Obr. 9: „Nedotýkajte sa mojich kruhov!“

Koncový bod rýchlosti  $v_t$  bude ležať určite niekde na pravej kružnici. Zostrojíme si výslednicu rýchlostí  $v_t$  a  $v_r$ , ktorá bude určite ležať na ľavej kružnici. Nakoľko Tinka pláva v smere výslednice rýchlostí, na druhý breh dopláva najbližšie k čerešni práve vtedy, keď bude vektor jej výslednej rýchlosti dotyčnicový k ľavej kružnici. (Rozmyslite si, prečo!)

### 1.3 B2 – Kyvadlo (opravoval JAno, vzorák Marika)

Marika sa rozhodla vyrobiť si betónové kyvadlo z veľmi dlhej betónovej tyče dĺžky  $l$ , ktorú našla vo FKS. Na koniec kyvadla chce pripevniť betónovú guľu, tú však najskôr musí objednať v betonárstve (vo FKS sme nemali). Ak označíme hustotu betónu  $\rho$  a medzu pevnosti v ťahu  $\sigma$ , akú najväčšiu guľu môže Marika objednať  $r$ , aby sa kyvadlo dalo zavesiť a nerozpadlo sa?

Medza pevnosti v ťahu  $\sigma$  udáva, akou maximálnou silou  $F$  môžeme pôsobiť na jednotkovú plochu prierezu materiálu  $S$ , aby sa tento nepoškodil. Teda platí  $\sigma = F/S$ . Má rozmer tlaku, čo by sa dalo preložiť ako „hrubšie lano (s väčším prierezom) unesie viac“. Toto je kľúčová myšlienka príkladu.

Keď kyvadlo zavesíme, začne každý jeho kúsok ťahať nadol vlastná tiaž. Navyše všetky tieto kúsky začnú pôsobiť na ostatné a ťahať ich so sebou. Najhoršie na tom bude chudák kúsok na vrchu, lebo na ňom visia všetky ostatné.

Horný koniec s prierezom tyče musí teda znášať ťažobu celého kyvadla. Aby to vydržal, musí byť tlak (ťah) v ňom nanajvyš taký, aký materiál ešte znesie, teda  $\sigma = F/S$ .

Sila  $F$ , ktorá tu pôsobí, je celková tiaž kyvadla  $F = m \cdot g$ , kde  $m$  je hmotnosť kyvadla a  $g$  je tiažové zrýchlenie. Hmotnosť kyvadla je súčinom jeho hustoty a objemu  $m = \rho \cdot V$ . Objem kyvadla je súčtom objemu FKS-áckej tyče – valca a betonárskej gule  $V = V_{\text{valca}} + V_{\text{gule}}$ . Na vzorčeky pre objemy valca a gule siahneme do pamäti alebo do tabuliek. Podľa zadania a obrázka dĺžku tyče označíme  $l$ , jej prierez<sup>2</sup>  $S$  a polomer gule označíme  $r$ . Dostaneme tak  $V = l \cdot S + 4/3\pi r^3$ .

Toto dosadíme do pôvodného vzorca pre pnutie a získame:

$$\sigma = F/S = \rho \cdot V \cdot g/S = \rho \cdot (l \cdot S + 4/3\pi r^3) \cdot g/S$$

Z tohto vzťahu si teraz stačí osamostatniť to, čo nás zaujíma – polomer gule  $r$ . Po jednoduchých úpravách rovnice dostaneme výsledok<sup>3</sup>:

$$r = \sqrt[3]{\left(\frac{\sigma}{\rho g} - l\right) \frac{3}{4\pi} S}$$

Trikom v príklade bolo nezabudnúť na tiaž ťažkej betónovej tyče z FKS. Taktiež je vhodné si uvedomiť, že ak je tiaž závesu zanedbateľná, kritický je najmenší prierez – najslabšie ohnivko reťaze.

#### 1.4 B3, A1 – Podtlak (opravoval Marek K, vzorák Miso)

Odmerajte, aký najväčší podtlak dokážete vytvoriť vo svojich ústach.

Chceme pmerať, aký najmenší tlak dokážeme vytvoriť v ústach, tak si zhotovíme vhodnú aparatúru. Princíp našej aparatúry bude založený na vzťahu  $p_a = p_u + p_h$ , ktorý hovorí, že atmosférický tlak je rovný súčtu tlaku v našich ústach a hydrostatického tlaku. V praxi bude teda aparatúra vyzeráť ako zvislá rúrka, ktorá bude dole ponorená do nádoby s vodou<sup>4</sup>, pričom na hornom konci budeme nasávaním z trubice vytvárať podtlak, pokiaľ to len pôjde. Po dosiahnutí maximálnej výšky ju odmeriame od hladiny v dolnej nádobe a vyjadríme tlak v našich ústach. Teda pre hydrostatický tlak stĺpca platí  $p_h = h\rho g$ , z čoho po dosadení do prvého vzťahu dostaneme<sup>5</sup>  $p_u = p_a - h\rho g$ .

Meraní je vhodné urobiť viac, aby sa neskôr pri priemerovaní hodnôt „vypriemerovali“ náhodné chyby. Tie môžu vzniknúť ľudským faktorom, rôzne zatrasenou kofolou, ... Prejavujú sa rozptylom nameraných hodnôt okolo určitej strednej priemernej hodnoty.

Druhý typ nepresností sú chyby vyplývajúce z nedokonalosti aparatúry, nevhodnosti postupu, nepresnej teórie. Tieto sa dajú odstrániť jedine zdokonalením aparatúry, postupu, ...

Vykonalí sme 5 meraní, pričom namerané hodnoty v metroch boli:

1,798; 1,803; 1,801; 1,787; 1,809

<sup>2</sup>Nedostatkom zadania bolo, že táto veličina mala byť, ako uvidíte vo výsledku, zadaná. Za túto hroznú nedôslednosť sa ospravedľujeme.

<sup>3</sup>Ako vidno, výsledok je úmerný tretej odmocnine prierezu  $S$  chýbajúcemu v zadani.

<sup>4</sup>Poznáme hustotu:  $1\,000\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

<sup>5</sup> $p_a = 101\,325\text{ Pa}$

Aritmetický priemer tým pádom vyšiel 1,800 m. Všimnite si, že som hodnotu nenapísal ako 1,8 m, ale pripísal som aj dve nuly. Toto je zaužívaný zvyk vo fyzike a aj ostatných vedách, ktoré pracujú s nepresnými dátami, ako dať najavo, ktoré desatinné miesta sú ešte relevantné.

Z rozptylu hodnôt okolo stredu môžeme určiť takzvanú smerodajnú odchýlku priemeru  $s$ . Tento údaj nám hovorí (za istých predpokladov), v akom intervale môžeme očakávať skutočnú hodnotu meranej veličiny. S pravdepodobnosťou približne 70 % je skutočná hodnota z intervalu  $\times_{\text{priemer}} \pm s$ . Ak by sme vzali polomer intervalu  $2s$ , resp.  $3s$ , pravdepodobnosti by boli 95 % a 99,8 %.

Vzorec na výpočet  $s$  je nasledovný (padol z neba)

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x_{\text{priemer}})^2}{N(N-1)}}.$$

Hodnotu sme nemohli určiť s presnosťou väčšou, ako je polovica najmenšieho dielika na našom meradle. Tento príspevok pripočítame k  $s$  a dostaneme tak náš odhad chyby.

$$\Delta x_{\text{priemer}} = 0,0046 \text{ m}.$$

Nami nameraná výška teda bola:

$$x = (1,800 \pm 0,0046) \text{ m}.$$

Všimnite si, že posledná uvedená cifra hodnoty  $x$  je na rovnakej pozícii ako prvá uvedená cifra chyby. To má svoje opodstatnenie. Keď budete svojmu kamarátovi rozprávať, ako ďaleko bývate od školy, nepoviete mu: „Bývam 3 573,32 metra plus mínus jeden kilometer od školy.“ Mali by vás za blázna. Miesto toho poviete, bývam približne štyri kilometre od školy, hore dole jeden kilometer.

Ostáva nám určiť hodnotu a chybu pre tlak, nakoľko však stačí výsledok (podľa nášho vzorca) len vynásobiť  $\rho g$ , nemáme ťažkú robotu

$$p_u = (17,65 \pm 0,05) \text{ kPa}.$$

**PS:** Hodnoty, ktoré sa nachádzajú v tomto vzorovom riešení pochádzajú od jedného riešiteľa. Kto príde na to, prečo viem, že nemôžu byť namerané a sú určite vymyslené, má u mňa čokoládu.

*Samo*

### 1.5 B4, A2 – Pol gule s vodou (opravovali Svetlana, polik, vzorák Lukas)

Sklená polsféra polomeru  $R$  s malou dierkou na vrchu je položená na gumenom stole (aby to tesnilo). Nádobu naplníme až po vrch vodou. Voda spod polsféry nevyteká. Aké hrubé je sklo?

Po prvom prečítaní tohto príkladu sa môže zdať, že otázka nesúvisí so zadaním. Prečo by teda voda mala pretekať, keď všetko dokonale tesní? A akú úlohu hrá hrúbka polsféry? Dozvieme sa.

Naša polsféra je vlastne nádoba s vodou objemu  $1/2 \cdot 4/3 \cdot \pi R^3$ , v ktorej je vzdialenosť hladiny od dna (povrchu stola)  $R$ . Na dne je hydrostatický tlak  $p = R\rho_v g$ , ktorý nezávisí od tvaru nádoby, iba od jej hĺbky – vzdialenosti hladiny od dna v smere tiažového poľa. Tento fakt

sa na strednej škole učí pod názvom hydrostatický paradox. Paradoxom je preto, že by sme očakávali aj závislosť od množstva kvapaliny v nádobe.

Vzťah  $p = H\rho g$  sa v škole odvodzuje z tiažovej sily, ktorou pôsobí stĺpec kvapaliny na dno bez uvažovania nádob exotických tvarov, preto je hydrostatický paradox len zvestovanou pravdou. Tento neutešený stav nášho poznania však možno napraviť.

Uvažujme všeobecnú nádobu s dnom o ploche  $S$ . Dno posunieme o nejakú malú vzdialenosť  $\Delta d$ , čím sa všetka voda v nádobe poposúva a hladina vody v nádobe poklesne o  $\Delta h$ . Potenciálna energia kvapaliny sa zmení tak, ako keby sme kvapalinu objemu  $\Delta dS$  posunuli z hladiny na dno, teda o vzdialenosť  $h$ . Zmena potenciálnej energie je  $\Delta dS\rho gh$ . Túto zmenu potenciálnej energie možno stotožniť<sup>6</sup> s prácou vykonanou tlakovou silou  $F = pS$  pôsobiacou po dráhe  $\Delta d$ :

$$\Delta dS\rho gh = pS\Delta d$$

$$p = \rho gh$$

Zaujímavé je, že táto úvaha platí nielen pre kvapaliny, ale aj pre sypké tuhé látky (piesok).

Na dne našej polguľovej nádoby je teda tlak  $R\rho_v g$ . Na jej dno (na povrch stola) pôsobí tlaková sila  $F = pS = p\pi R^2 = \pi\rho_v R^3 g$ . Rovnako veľkou reakčnou silou pôsobí stôl na vodu v nádobe. Táto sila môže podvihnúť polsféru, čím spod nej vytečie nejaká voda. Aby k tomu nedošlo, musí sklená polsféra vážiť toľko, aby bol súčet tiažovej sily pôsobiacej na polsféru a tiažovej sily pôsobiacej na vodu pod polsférou rovný reakcii na tlakovú silu. Z toho máme podmienku pre hmotnosť polsféry  $m$ :

$$F_g(\text{sklo}) + F_g(\text{voda}) = \pi\rho_v R^3 g$$

$$mg + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_v g = \pi\rho_v R^3 g$$

$$m = \frac{1}{3}\pi R^3 \rho_v$$

Objem skla vypočítame ako  $1/2 \cdot 4\pi R^2 h$  (predpokladáme  $h \ll R$  a zanedbateľne veľký otvor), z čoho po dosadení do podmienky pre hmotnosť dostaneme hľadanú hrúbku skla ( $\rho_s$  je hustota skla):

$$d = \frac{\rho_v}{6\rho_s}$$

### 1.6 A3 – Mláčka (opravovala Tinka, vzorák Samo)

Maťo vylial pohár vody na stôl. Odhadnite, aká vysoká vrstva vody sa na stole vytvorila. Pri riešení považujte povrchové napätie stôl–voda rovnaké, ako voda–vzduch.

Cieľom tejto úlohy bolo spraviť nejaký (aspoň hrubý) odhad výšky mláčky vody na stole a porovnať ho s našou každodennou skúsenosťou. Systém sa po vyliatí vody na stôl snaží dostať do stavu s najnižšou energiou, našou úlohou je iba tento stav nájsť.

<sup>6</sup>Voda vykonala prácu na úkor svojej potenciálnej energie.

Uvažujme objem vody  $V$  vyliaty na stôl s výškou vodnej vrstvičky  $h$ . Celková energia sústavy voda stôl bude:

$$V/h \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3) + \frac{1}{2}V\rho gh$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sú povrchové napätia na rozhraniach voda-vzduch, stôl-voda, stôl-vzduch. Z týchto povrchových napätí poznáme len prvé, keďže nám však ide len o rádový odhad, môžeme si dovoliť predpoklad  $\sigma_1 = \sigma_2$ , ktorý bol v zadaní. Samozrejme, hodnoty budú závisieť od konkrétneho stola, ale je pomerne uveriteľné, že existuje stôl so  $\sigma_1 \approx \sigma_2$ . V zadaní sme však zabudli spomenúť, čo máte predpokladať o napätí na rozhraní stôl-vzduch. Za túto našu chybu sa ospravedľujeme a chválime všetkých riešiteľov, ktorí ju spozorovali. V tomto vzorovom riešení budeme uvažovať, že  $\sigma_3$  je zanedbateľné.

Potom dostávame výraz pre energiu:

$$\frac{1}{h} \cdot 2V\sigma + h \cdot \frac{1}{2}V\rho g$$

Tento výraz chceme minimalizovať. To je to isté ako minimalizovať výraz:

$$\frac{2\sqrt{\sigma}}{h\sqrt{\rho g}} + \frac{h\sqrt{\rho g}}{2\sqrt{\sigma}}$$

A ako ste už možno počuli, výraz  $a + a^{-1}$  nadobúda minimálnu hodnotu pre  $a = 1$ .<sup>7</sup> To v našom prípade znamená, že energia sa minimalizuje pre:

$$h = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \approx 5 \text{ mm}$$

### 1.7 A4 – Kmitajúce pero (opravovali Petrik Vanya, Marika, vzorák Petrik)

Robo má v poslednej dobe novú záľubu – položí si ceruzku na nohu, jemne do nej šťuchne a sleduje, ako kmitá. Určte periódu malých kmitov ceruzky, ak predpokladáte, že Robova noha má tvar valca s polomerom  $R$  a ceruzka má hmotnosť  $m$  a dĺžku  $l$ .

Počítanie periódy kmitov je vždy relatívne priamočiary proces. Objekt záujmu – v našom prípade pero – vychýlime a pozorujeme, aké sily naň začnú pôsobiť. Keď sa všetky naskladajú do jednej rovnice, vypadne z nej, že zrýchlenie plus konštanta krát výchylka (ktorou je vzdialenosť alebo uhol) sa rovná nule:

$$a + Cx = 0$$

Pri pohľade na túto tzv. rovnicu harmonických kmitov sa jednoducho prehlási, že  $C$  je uhlová frekvencia na druhú, a sme za vodou.<sup>8</sup>

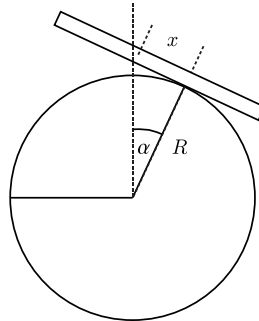
Vychýľme teda pero tak, že jeho bod dotyku s nohou bude zvierat uhol  $\alpha$  s kolmicou (ako na obrázku 10). Takto na pero začne pôsobiť moment tiažovej sily (pozrite obrázok), z ktorej berieme len zložku kolmú na os pera:

$$\tau = -xmg \cos \alpha$$

<sup>7</sup>Zrejme  $(a - 1)^2 \geq 0$ , potom  $a^2 + 1 \geq 2a$ , čiže  $a + a^{-1} \geq 2$ . Rovnosť zrejme nastáva pre  $a = 1$ .

<sup>8</sup>Ak máme nejakú harmonicky kmitajúcu vec s výchylkou  $x = A \sin(\omega t + \phi)$ , tak po zderivovaní platí  $\dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \phi)$  a po ešte jednom zderivovaní  $\ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$ . That's it.

$x$  je vzdialenosť stredu (ťažiska) pera od bodu dotyku. Tú si možno vyjadriť pomocou uhla  $\alpha$  ako  $x = R\alpha$ . Znamienko naznačuje, že moment pôsobí proti smeru, v ktorom meriame  $\alpha$ .



Obr. 10: Vychýlené pero.

Pohybová rovnica pre otáčavý pohyb je

$$\tau = I\varepsilon,$$

kde  $I$  je moment zotrvačnosti a  $\varepsilon$  uhlové zrýchlenie. S momentom zotrvačnosti si netreba lámať hlavu. Hráme sa na malé kmity, čo znamená, že  $x \ll l$ , a teda za os otáčania stále možno považovať stred pera. Moment zotrvačnosti vzhľadom na stred akejkoľvek rovnej palice snáď poznajú aj fyzikálne tabuľky, a ak nie ony, tak Wikipédia:

$$I = \frac{ml^2}{12}$$

Po napchaní jedného do druhého vzniká výraz:

$$xmg \cos \alpha = -\frac{ml^2}{12}\varepsilon$$

$$\varepsilon + \frac{12Rg}{l^2}\alpha \cos \alpha = 0$$

Ešte treba odstrániť ten nepekný kosínus. Opäť raz využijeme poznatok, že ide len o malé kmity, a preto  $\cos \alpha \approx 1$ . Takže môžeme písať:

$$\varepsilon + \frac{12Rg}{l^2}\alpha = 0$$

Uhlová frekvencia a následne aj perióda je teda:

$$\omega^2 = \frac{12Rg}{l^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{12Rg}}$$

Okrem silového prístupu existuje ešte energetický. Ten môže byť v niektorých prípadoch príjemnejší na použitie, preto stojí za to si ho na takomto jednoduchom príklade natrénovať.

Najskôr ale pomeníme označenie. Uhlové zrýchlenie bude odteraz  $\ddot{\alpha}$  a uhlová rýchlosť (ktorú tiež využijeme)  $\dot{\alpha}$ . Všetko, čo potrebujeme spraviť, je spočítať celkovú energiu, t. j. kinetickú plus potenciálnu.

Za kinetickú znova v dôsledku  $x \ll l$  berieme len otáčavú zložku (premýšľajte si presne, prečo), teda:

$$E_k = \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 = \frac{ml^2}{24} \dot{\alpha}^2$$

Pre potenciálnu energiu položíme nulovú úroveň na vrch nohy, teda pôvodný bod dotyku. Potom (skúste si toto sami nakresliť):

$$E_p = mg[x \sin \alpha - R(1 - \cos \alpha)]$$

Použijeme priblíženie  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ , a tak dostávame:

$$E_p = \frac{mgR}{2} \alpha^2$$

Takže celková energia je:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} mgR \alpha^2$$

Fyzikálna kuchárka hovorí, že ak  $E = \mu \dot{\alpha}^2 + \kappa \alpha^2$ , tak  $\omega^2 = \frac{\kappa}{\mu}$ . A naozaj:

$$\omega^2 = \frac{mgR}{\frac{ml^2}{12}} = \frac{12gR}{l^2}$$

Prečo to tak funguje? Stačí obe strany rovnice poderivovať podľa času. Naľavo v dôsledku konštantnosti energie vznikne nula a napravo:

$$\frac{d}{dt} \dot{\alpha}^2 = 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \alpha^2 = 2\alpha\dot{\alpha}$$

Potom:

$$0 = \mu \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + \kappa \alpha \dot{\alpha}$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{\kappa}{\mu} \alpha = 0$$

Ešte by to chcelo zopár teplých slov o tom, čo, prečo a ako zanedbávať, lebo tých zanedbaní tu bolo pomerne dosť. Pre (dostatočne) malé kmity sú všetky členy obsahujúce vyššiu ako prvú mocninu  $\alpha$  oproti zvyšným členom v rovnici zanedbateľné. Chceme vidieť rovnicu harmonických kmitov.<sup>9</sup> Ak by sme pri silovom prístupe použili  $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$  namiesto  $\cos \alpha \approx 1$ , vo výslednej rovnici by sa nám zjavilo jedno  $\alpha^2$ , ktoré by sa však v praxi neprejavilo – bolo by príliš malé oproti ostatným členom. Preto si ho môžeme dovoliť zanedbať.

<sup>9</sup>Pre alternatívny, do extrému privedený výklad metódy pozri [xkcd.com/759](http://xkcd.com/759).

## Výsledková listina po 1. kole zimnej časti 2011/2012

## A

	Meno	Škola	3	4	5	6	♥	Σ <sub>1</sub>	Σ
1	Peter Kosec	G L. Štúra Trenčín	9	9	9	9	0	36,00	36,00
2	Dušan Kavický	G GJH	8	9	9	9	0	35,00	35,00
2	Michal Hledík	G GJH	8	9	9	9	0	35,00	35,00
4	Patrik Švančara	G L. Štúra Trenčín	9	9	9	7	0	34,00	34,00
5	Andrej Vlček	EGJT LM	9	9	9	6	0	33,00	33,00
6	Jakub Šafin	GPH	9	5	9	9	0	32,00	32,00
7	Radomír Gajdošoci	GPH	9	4	9	9	0	31,00	31,00
8	Klára Ficková	G Poštová	9	4	9	5	0	27,00	27,00
8	Vladimír Macko	GEŠ Zvolen	9	8	9	1	0	27,00	27,00
8	Juraj Surovčík	G P.O.H.	9	9	9		0	27,00	27,00
11	Patrik Turzák	G Poštová	8	*	8	9	0	25,00	25,00
12	Matúš Kulich	GymDT		5	8	9	0	22,00	22,00
12	Jaroslav Petrucha	G Metodova	9	9	1	3	0	22,00	22,00
14	Milan Pešta	G K Prešov	8	4	2	7	0	21,00	21,00
14	Peter Dupej	G GJH	9	9	3		0	21,00	21,00
16	Natália Tokárová	ŠPMNDAG	8	7	4	0	0	19,00	19,00
17	Adam Hložný	OG Varšavská	8	7	2	1	0	18,00	18,00
17	Tomáš Gonda	Gamča	9	9			0	18,00	18,00
19	Matus Rako	Gamča	8	2	2	1	0	13,00	13,00
20	Milan Smolík	Gamča	9	*	3		0	12,00	12,00
20	Barbora Klembarová	OG Kukučínova	7	4	1		0	12,00	12,00
22	Jakub Bahyl	OG Varšavská	8	1	1	1	0	11,00	11,00
23	Matej Badin	G GJH	9		1		0	10,00	10,00
24	Daniela Fecková	G Pankúchova		9			0	9,00	9,00
24	Pavol Kögler	G Galanta	6	1	1	1	0	9,00	9,00
24	Marián Horňák	GyPar			9		0	9,00	9,00
27	Michal Bock	Gamča	5		1		0	6,00	6,00
28	Tatiana Matejovičová	Gamča	*		2		0	2,00	2,00
28	Roman Hudec	GymNZ			2		0	2,00	2,00
30	Mária Kováčová	GsvCaM			1	0	0	1,00	1,00

## B

	Meno	Škola	1	2	3	4	5	♥	Σ <sub>1</sub>	Σ
1	Samuel Sučík	G GJH	9	9	9	9		0	36,00	36,00
1	Samuel Cibulka	G GJH		9	9	9	9	0	36,00	36,00
3	Irena Bačinská	G Lipany		9	9	8	9	0	35,00	35,00
3	Milan Mikuš	G L. Štúra Trenčín		9	8	9	9	0	35,00	35,00
5	Tomáš Kello	G JAR		9	9	9	7	0	34,00	34,00
5	Michal Červeňák	GymPU	9	9	9	7	4	0	34,00	34,00
7	Matúš Jenča	ZŠ Karloveská		9	9	9	5	0	32,00	32,00
7	Marek Šuppa	GsvCaM	9	9	9	3	5	0	32,00	32,00
7	Michal Minárik	G VBN Prievidza	8	9	8	7		0	32,00	32,00
7	Patrik Turzák	G Poštová	6	9	9	8	*	0	32,00	32,00
7	Mário Lipovský	G GJH	6	9	9	8		0	32,00	32,00
12	Zuzana Magyarová	G GBST	6	9	5	7	6	0	28,00	28,00
13	Tomáš Turlík	G JAR	5	9	5	8		0	27,00	27,00
13	Milan Smolík	Gamča		9	9	9	*	0	27,00	27,00
15	Jakub Cimerman	GJGT		9	9	8		0	26,00	26,00
16	Jerguš Greššák	ŠPMNDAG		9	9	7		0	25,00	25,00
16	Dominika Iždinská	G GJH	9	0	8	8		0	25,00	25,00
16	Matej Badin	G GJH		7	9	9		0	25,00	25,00
16	Miroslav Stankovič	G Poštová	8	9	8			0	25,00	25,00

	Meno	Škola	1	2	3	4	5	♡	Σ <sub>1</sub>	Σ
16	Jaroslav Hofierka	G JAR		9	8	8		0	25,00	25,00
21	Matus Rako	Gamča	6	1	8	8	2	0	24,00	24,00
22	Daniel Filakovský	G Snina	3	9	4	7		0	23,00	23,00
22	Miroslav Gašparek	SGOCZA		9	1	8	5	0	23,00	23,00
24	Michal Bock	Gamča		9	8	5		0	22,00	22,00
24	Matúš Kulich	GymDT		9	8		5	0	22,00	22,00
24	Barbora Klembarová	OG Kukučínova		2	9	7	4	0	22,00	22,00
24	Ela Bardiovská	ŠPMNDAG	5	3	7	7		0	22,00	22,00
28	Samuel Kočiščák	G Poštová	6	1	5	7	3	0	21,00	21,00
28	Michaela Brchnelová	GŠB	8	0	5	8		0	21,00	21,00
30	Andrej Tóth	GyPar	9	1		8	2	0	20,00	20,00
30	Katarína Kmeťová	OG Kukučínova			9	7	4	0	20,00	20,00
30	Eduard Batmendiijn	CGSM	*	9	9		2	0	20,00	20,00
30	Magdaléna Reháková	GFGL	9	1		4	6	0	20,00	20,00
34	Michal Smolík	Gamča		9	9		1	0	19,00	19,00
34	Karolína Šromeková	G Tatarku	2	0	8	9		0	19,00	19,00
36	Roman Hudec	GymNZ		9	8			0	17,00	17,00
36	Alžbeta Kurdelová	ŠPMNDAG		9	8			0	17,00	17,00
38	Barbora Halajová	G VOZA		0	7	6	3	0	16,00	16,00
39	František Dráček	ZŠ D. Mariková		6	6	3	0	0	15,00	15,00
40	Roman Selecký	GLŠ Zvolen		0	5	6	1	0	12,00	12,00
40	Peter Hojnoš	G SNV		1	4	7		0	12,00	12,00
42	Maros Polovka	OG Kukučínova		2	9			0	11,00	11,00
43	Tatiana Balušíková	G L. Štúra Trenčín		9				0	9,00	9,00
44	Peter Kovács	G Alejová		0	6			0	6,00	6,00
44	Martin Čižmár	CSS Dolný Kubín	6	0				0	6,00	6,00
46	Petra Hradňanská	GVC	2	2				0	4,00	4,00
47	Katarína Mančužková	CZŠ Ž. Bosniakovej	1	0	0		1	0	2,00	2,00
48	Mária Moravčíková	GVC		1				0	1,00	1,00
49	Samuel Andrejčák	ZŠ Holčíkovce	*					0	0,00	0,00
49	Mária Kováčová	GsvCaM	*	0				0	0,00	0,00